

Análisis de estabilidad del péndulo triple invertido entre un regulador lineal cuadrático LQR y un sintonizador de ganancia mediante el algoritmo PSO

Jorge Hurel-Ezeta¹, Darwin Alvarado-Bravo², Juan Peralta-Jaramillo³, Jorge Amaya-Rivas⁴, Francisca Flores-Nicolalde⁵

¹Laboratorio de modelado y control de sistemas, Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción, Escuela Superior Politécnica Del Litoral, ESPOL, Ecuador. Email: jhurel@espol.edu.ec

²Laboratorio de modelado y control de sistemas, Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción, Escuela Superior Politécnica Del Litoral, ESPOL, Ecuador. Email: jodaalva@espol.edu.ec

³Laboratorio de modelado y control de sistemas, Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción, Escuela Superior Politécnica Del Litoral, ESPOL, Ecuador. Email: jperal@espol.edu.ec

⁴Laboratorio de modelado y control de sistemas, Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción, Escuela Superior Politécnica Del Litoral, ESPOL, Ecuador. Email: jamaya@espol.edu.ec

⁵Laboratorio de modelado y control de sistemas, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Escuela Superior Politécnica Del Litoral, ESPOL, Ecuador. Email: ffloresn@espol.edu.ec

Resumen

El péndulo triple invertido es uno de los sistemas de mayor interés para los investigadores de la teoría de control debido a sus propiedades como la no linealidad y por ser un sistema subactuado. El artículo presente utiliza este sistema mecánico para analizar la estabilidad mediante dos algoritmos de control. En el primer caso, se utiliza un controlador LQR en lazo cerrado, mientras que en el segundo caso se diseña un algoritmo de optimización por enjambre de partículas (PSO) utilizando una señal de referencia y una función objetivo basada en los errores de los estados. La comparación entre las ganancias obtenidas es realizada bajo el mismo esquema de control en Matlab-Simulink con una señal tipo escalón unitaria como perturbación en el sistema. Los resultados muestran una mejor respuesta en el tiempo de estabilización del sistema al utilizar las ganancias obtenidas por el algoritmo PSO propuesto.

Palabras clave: Controlador LQR; péndulo triple invertido sobre carro; optimización de enjambres de partículas; estabilización.

Abstract

The inverted triple pendulum is one of the systems of greatest interest to control theory researchers because of its properties such as nonlinearity and since it is an underactuated system. The present paper uses this mechanical system to analyze stability using two control algorithms. In the first case, a closed-loop LQR controller is used, while in the second case a particle swarm optimization (PSO) algorithm is designed using a reference signal and an objective function based on the state errors. The comparison between the obtained gains is performed under the same control scheme in Matlab-Simulink with a unit step-type signal as a perturbation in the system. The results show a better response in system stabilization time when using the gains obtained by the proposed PSO algorithm.

Keywords: LQR Controller; inverted triple pendulum on a cart; particle swarm optimization; stabilization.

1. Introducción

El péndulo invertido es uno de los sistemas más importantes en dinámica y es un tema de análisis muy relevante en la literatura de control [1]. La razón principal es que constituye un sistema subactuado con un comportamiento no lineal, inestable y de fase no mínima y, por tanto, revela muchas propiedades teóricas de sistemas interesantes [2].

El problema de control consiste en obtener modelos dinámicos de los sistemas y utilizarlos para determinar leyes o estrategias de control que permitan alcanzar la respuesta y el rendimiento deseados de los sistemas en estudio [3]. Los controladores basados en la estabilización del péndulo invertido se utilizan en la simulación del equilibrio humano [4], el lanzamiento y control de misiles [5], etc.

En la literatura se han estudiado ampliamente diferentes sistemas de péndulo invertido y sus métodos de control [6]. como el péndulo invertido simple [7], el péndulo invertido doble [8], el péndulo invertido triple [2]. Sin embargo, en este artículo sólo se estudia el sistema de triple péndulo invertido porque presenta un mayor grado de dificultad debido a su considerable aumento de la inestabilidad.

En [9] el péndulo triple invertido (TIP) por sus siglas en inglés, se estabiliza utilizando un controlador computacional robusto basado en la teoría lineal de tiempo discreto. En [10] se estabiliza utilizando un controlador de retroalimentación de una sola entrada. En [11] se diseña un controlador basado en la teoría H de tiempo discreto y se implementa un observador dinámico robusto. En [2] se diseña e implementa un controlador de oscilación basado en un esquema de dos grados de libertad.

La estrategia de control comúnmente utilizada para estabilizar un Péndulo Triplemente Invertido en un carro es mediante el uso de un Regulador Lineal Cuadrático. [12] [13], donde encontrar las matrices Q y R adecuadas es una tarea fundamental para obtener una buena respuesta en el sistema. Sin embargo, la búsqueda de estas matrices es un poco cansada y tediosa, ya que se realiza por ensayo y error lo que se traduce en un gasto de tiempo.

Por ello, en los últimos años se han desarrollado y aplicado con éxito métodos de inteligencia bioinspirada para ajustar los controladores de un péndulo invertido, como la optimización por enjambre de partículas (PSO) [14], [15], [16].

El algoritmo PSO es un método metaheurístico basado en el comportamiento que exhiben los enjambres de abejas cuya función es optimizar una función objetivo actualizando la posición y la velocidad del enjambre

[17]. Esta técnica presenta una solución de alta calidad con convergencias más estables y un menor tiempo de cálculo.

Por ello, en este trabajo se utiliza el algoritmo de optimización de enjambre de partículas (PSO) para encontrar las ganancias adecuadas hasta conseguir la estabilización del sistema en el menor tiempo posible aprovechando el error cometido en cada estado.

El objetivo de este trabajo es realizar un análisis comparativo de la estabilidad de un péndulo triple invertido entre el controlador LQR y un ajuste de ganancia mediante el algoritmo PSO.

El resto del documento se organiza como sigue. La sección 2 presenta la metodología donde se incluye el modelo dinámico del péndulo triple invertido, el diseño del regulador lineal cuadrático y del sintonizador de ganancias con la implementación del algoritmo PSO, La Sección 3 presenta el análisis y resultados experimentales. Finalmente las conclusiones del trabajo son presentadas en la sección 4.

2. Metodología

2.1. Modelado dinámico del sistema.

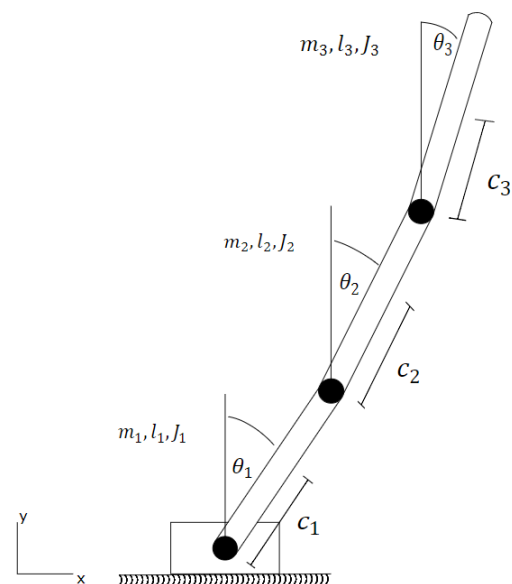


Figura 1. Esquema del triple péndulo invertido sobre carro.

El sistema triple péndulo invertido se muestra en la figura 1. Consta de tres eslabones rígidos cuya longitud está representada por l_1, l_2, l_3 respectivamente. Estos eslabones están conectados por medio de juntas rotativas. El primer eslabón, en su articulación inferior, está conectado con un carro que se mueve a lo largo del eje horizontal debido a la fuerza $u(t)$, ejercida por medio de un actuador. La masa de los eslabones se

denota por m_1, m_2, m_3 y la masa del carro por m_c . Los ángulos formados por los eslabones con respecto al eje vertical se denotan por $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ respectivamente y el desplazamiento del carro con respecto al marco de referencia $[x_0; y_0]$ se representa por x_c .

2.1.1. Ecuaciones de movimiento

El sistema presenta cuatro grados de libertad $[x_c, \theta_1, \theta_2, \theta_3]$, por lo que se eligen cuatro coordenadas generalizadas $[q_1, q_2, q_3, q_4]$. La posición del centro de masa de cada eslabón con respecto al marco de referencia $[x_0; y_0]$, viene dada por:

$$\begin{aligned} B_1 &= [x_c + c_1 \text{sen}\theta_1, c_1 \text{cos}\theta_1] \\ B_2 &= [x_c + l_1 \text{sen}\theta_1 + c_2 \text{sen}\theta_2, l_1 \text{cos}\theta_1 + c_2 \text{cos}\theta_2] \\ B_3 &= [x_c + l_1 \text{sen}\theta_1 + l_2 \text{sen}\theta_2 + c_3 \text{sen}\theta_3, l_1 \text{cos}\theta_1 + l_2 \text{cos}\theta_2 + c_3 \text{cos}\theta_3] \end{aligned}$$

Mientras que las ecuaciones de movimiento del sistema son obtenidas mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = \tau_{\delta_{i1}} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (1)$$

Donde L representa la función lagrangiana $L = T - V$ y R representa la función de disipación de Rayleigh utilizada para incorporar la fricción viscosa en las juntas, mientras que la fricción producida por el carro es ignorada en este estudio. Esta función de disipación está dada por:

$$R = \frac{1}{2} d_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} d_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} d_3 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2)^2 \quad (2)$$

La energía cinética del sistema se la obtiene mediante la ecuación:

$$T = \frac{1}{2} m_c \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \dot{B}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i \dot{\theta}_i^2 \quad (3)$$

donde $\frac{1}{2} m_c \dot{x}_c^2$ representa la energía cinética del carro y $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \dot{B}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i \dot{\theta}_i^2$ representa la energía cinética de los péndulos. La energía potencial del sistema está representada por la ecuación:

$$V = g [m_1 B_{1,2} + m_2 B_{2,2} + m_3 B_{3,2}] \quad (4)$$

Las ecuaciones de movimiento del sistema TIP son las siguientes:

$$a_0 \ddot{q}_0 + a_1 (\ddot{q}_1 \cos q_1 - \dot{q}_1^2 \text{sen} q_1) + a_2 (\ddot{q}_2 \cos q_2 - \dot{q}_2^2 \text{sen} q_2) + a_3 (\ddot{q}_3 \cos q_3 - \dot{q}_3^2 \text{sen} q_3) = \tau \quad (5)$$

$$a_1 (\ddot{q}_0 \cos q_1 - g \text{sen} q_1) + a_4 (\ddot{q}_2 \cos (q_2 - q_1) - \dot{q}_2^2 \text{sen} (q_2 - q_1)) + a_5 (\ddot{q}_3 \cos (q_3 - q_1) - \dot{q}_3^2 \text{sen} (q_3 - q_1)) + b_1 \ddot{q}_1 + J_1 \ddot{q}_1 + d_1 \dot{q}_1 - d_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) = 0 \quad (6)$$

$$a_2 (\ddot{q}_0 \cos q_2 - g \text{sen} q_2) + a_4 (\ddot{q}_1 \cos (q_2 - q_1) + \dot{q}_1^2 \text{sen} (q_2 - q_1)) + a_6 (\ddot{q}_3 \cos (q_3 - q_2) - \dot{q}_3^2 \text{sen} (q_3 - q_2)) + b_2 \ddot{q}_2 + J_2 \ddot{q}_2 + d_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - d_3 (\dot{q}_3 - \dot{q}_2) = 0 \quad (7)$$

$$a_3 (\ddot{q}_0 \cos q_3 - g \text{sen} q_3) + a_5 (\ddot{q}_1 \cos (q_3 - q_1) + \dot{q}_1^2 \text{sen} (q_3 - q_1)) + a_6 (\ddot{q}_2 \cos (q_3 - q_2) + \dot{q}_2^2 \text{sen} (q_3 - q_2)) + b_3 \ddot{q}_3 + J_3 \ddot{q}_3 + d_3 (\dot{q}_3 - \dot{q}_2) = 0 \quad (8)$$

Las ecuaciones de movimiento expresadas en notación vectorial pueden escribirse como sigue:

$$D(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G \dot{q} + g(q) = \tau \quad (9)$$

Los puntos de equilibrio del sistema son $[x_c, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dot{x}_c, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3]^T = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$. Por tanto, el modelo en espacio de estados del modelo linealizado es obtenido como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (10)$$

Utilizando los parámetros indicados en la Tabla 1 las matrices de estado son obtenidas, éstas se presentan a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 18.2787 & -0.9534 & 0.0269 & 0 & 0.6039 & -0.0075 & 0.0005 \\ 0 & -144.5732 & 54.2372 & -1.5302 & 0 & -4.7965 & 0.1561 & -0.0288 \\ 0 & 75.0684 & -80.3780 & 11.9416 & 0 & 2.5125 & -0.2048 & 0.0806 \\ 0 & -8.2026 & 46.2486 & -38.7707 & 0 & -0.2903 & 0.1592 & -0.1713 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8223 \\ -2.7813 \\ 0.2008 \\ -0.0219 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tabla 1. Parámetros del péndulo triple invertido

$m_1 = 0.876 \text{ kg}$	Masa del péndulo 1
$m_2 = 0.938 \text{ kg}$	Masa del péndulo 2
$m_3 = 0.553 \text{ kg}$	Masa del péndulo 3
$l_1 = 0.323 \text{ mts}$	Longitud del péndulo 1
$l_2 = 0.419 \text{ mts}$	Longitud del péndulo 2
$l_3 = 0.484 \text{ mts}$	Longitud del péndulo 3
$c_1 = 0.215 \text{ mts}$	Centro de masa del péndulo 1
$c_2 = 0.269 \text{ mts}$	Centro de masa del péndulo 2
$c_3 = 0.226 \text{ mts}$	Centro de masa del péndulo 3
$J_1 = 0.013 \text{ Nms}^2$	Momento de inercia del péndulo 1
$J_2 = 0.024 \text{ Nms}^2$	Momento de inercia del péndulo 2
$J_3 = 0.018 \text{ Nms}^2$	Momento de inercia del péndulo 3
$d_1 = 0.215 \text{ Nms}$	Fricción de junta 1
$d_2 = 0.002 \text{ Nms}$	Fricción de junta 2
$d_3 = 0.002 \text{ Nms}$	Fricción de junta 3

Fuente: datos tomados de [2]

2.2. Regulador lineal cuadrático (LQR)

Cuando la acción de control de un sistema es óptima, es porque esa acción requiere sólo el coste mínimo. Y cuando el sistema dinámico está representado por ecuaciones diferenciales lineales y la función de coste mínimo está representada por una función cuadrática, se denomina problema LQ [12]. Así, el LQR se define como un método de control basado en las variables de estado y las entradas de control que minimiza el índice de rendimiento J .

$$J = \int (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (11)$$

Donde Q y R son matrices de ponderación positivas semidefinidas de las variables de estado y de entrada del sistema [18]. En este trabajo estas matrices son definidas arbitrariamente como:

$$Q = \text{diag}[10, 100, 100, 100], \quad R = 1 \quad (12)$$

Para determinar el cambio óptimo de control, la función de Hamilton es derivada e igualada a cero para obtener:

$$u(t) = -Kx(t) = R^{-1}B^T P x(t) \quad (13)$$

Donde el valor de P se determina mediante la ecuación algebraica de ecuación algebraica de Riccati, expresada como:

$$(PA - PBR^{-1}B^T P + Q + A^T P) = 0 \quad (14)$$

La figura 2 muestra el esquema del controlador LQR en lazo cerrado.

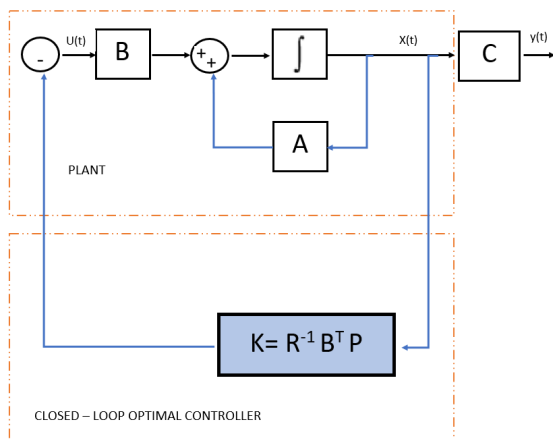


Figura 2. Esquema del controlador LQR en lazo cerrado.

2.3. Sintonizador de ganancias PSO.

La determinación de los parámetros del LQR se suele hacer por el método de prueba y error, lo que suele ser extremadamente laborioso y es casi imposible

encontrar los mejores parámetros con este método. Por esta razón, se utilizan métodos de optimización para determinar los parámetros óptimos del LQR [14], [15] [16].

Esta sección presenta la implementación del algoritmo PSO en un sistema péndulo triple invertido para sintonizar las ganancias en cada uno de los estados para estabilizar el sistema como se muestra en la figura 3.

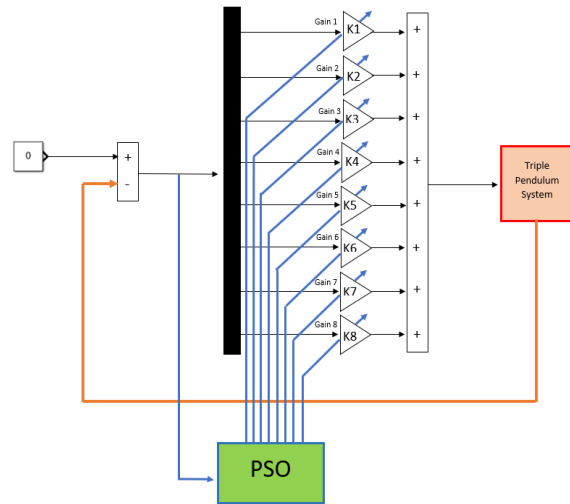


Figura 3. Diagrama de bloques para el ajuste de las ganancias mediante PSO.

2.3.1. Optimización por enjambre de partículas (PSO)

El algoritmo PSO optimiza una función objetivo mediante una búsqueda global estocástica multidimensional, su aplicación es relativamente fácil y siempre se pueden obtener resultados muy precisos.

Se compone de un número fijo de partículas que coexisten en el espacio de soluciones, donde se realiza una búsqueda colaborativa de una posición óptima, haciendo uso de un componente cognitivo que intuye la partícula para mejorar su propia ubicación, y un componente social que arrastra la partícula hacia la mejor posición global hasta el momento.

El proceso que ejecuta el algoritmo PSO se presenta en la figura 4. Donde se rastrea y almacena la mejor posición de la i -ésima partícula ($Libest$) y la mejor posición global del enjambre ($Gbest$) implementando las siguientes ecuaciones:

$$v_i(k+1) = w * v_i(k) + c_1 * r_1(k) * (Libest - p_i(k)) + c_2 * r_2(k) * (Gbest - p_i(k)) \quad (15)$$

$$p_i(k+1) = p_i(k) + v_i(k) \quad (16)$$

Donde p_i es la posición de la partícula i , $k+1$ representa la siguiente iteración, v_i es la velocidad de

la partícula. c_1 y c_2 son las aceleraciones social y cognitiva para las mejores posiciones local y global, respectivamente, $r_1(k)$ y $r_2(k)$ son números aleatorios en el intervalo $[0; 1]$, y w es la constante del momento inercial o peso.

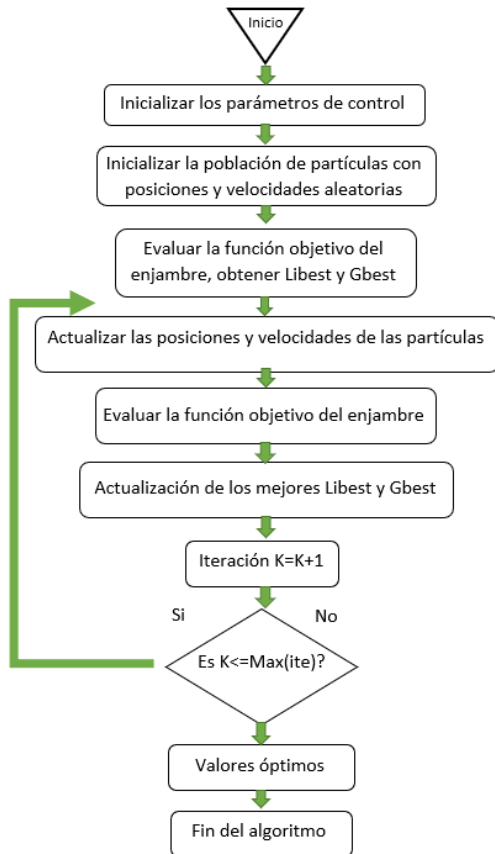


Figura 4. Diagrama de flujo del algoritmo PSO.

En este trabajo se propone una función objetivo para estabilizar el sistema de péndulo triple invertido. Para lograr la sintonía de las ganancias se utiliza la ecuación (17) que utiliza únicamente los errores de las posiciones en los estados, utilizando el esquema mostrado en la figura 3. Donde existe una señal de referencia dada como cero y una posición inicial en el tercer eslabon de 0,349 rad.

$$F_1 = \int [e_c^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2] \quad (17)$$

El índice de error de cada estado viene dado por $e_i = (y_{ref_i} - y_{obt_i})$, donde y_{ref_i} es la posición de referencia de nuestro sistema, en este caso es cero para todos los estados. Y y_{obt_i} es la posición obtenida en cada estado.

3. Análisis y Resultados

En esta sección se presentan las ganancias obtenidas empleando ambos casos para estabilizar el sistema, en donde fueron desarrollados e implementados en el

entorno Matlab/Simulink. Los parámetros utilizados para la optimización PSO se muestran en la tabla 2.

El modelo Simulink mostrado en la figura 5 permite comparar los resultados obtenidos, aplicando una señal escalón como perturbación sobre el sistema que está en equilibrio en estado inicial.

Tabla 2. Parámetros algoritmo PSO

$size = 100$	Tamaño del enjambre
$max(iter) = 1000$	Numero maximo de interacciones
$dim = 8$	Dimensión del problema
$c_2 = 2.4$	Aceleración cognitiva
$c_1 = 2.4$	Aceleración social
$w = 0.8$	Peso inercial

Fuente: elaboración propia.

Los resultados obtenidos en matlab para la matriz de ganancia de realimentación óptima LQR y las ganancias obtenidas minimizando los errores en los estados mediante el algoritmo PSO se presentan en la tabla 3.

Tabla 3. Ganancias generadas por LQR y PSO

		Resultados	
		LQR	PSO
Ganancia	Resultado	Ganancia	Resultado
K	3.1623	k_1	6.6845
	-7.4107	k_2	1.7739
	-4.5701	k_3	-0.6779
	2.3414	k_4	3.3407
	5.2449	k_5	6.6972
	-0.6742	k_6	-0.9444
	-1.8765	k_7	-2.0023
	-0.7389	k_8	-0.1778

Fuente: elaboración propia

El desarrollo y la ejecución del controlador LQR y del algoritmo PSO se implementaron en Matlab en una CPU Intel(R) Core(TM) i7-10750H a 2,60 GHz. El tiempo de simulación del algoritmo PSO fue de 1857,23 segundos.

La figura 6 muestra la señal de la posición del carro generada por las dos acciones de control en un intervalo de 10 segundos, en donde el sistema en estado inicial se encuentra en equilibrio. Al aplicar una perturbación, la acción de control LQR es capaz de estabilizar la posición del carro después de 9 segundos a una distancia de 0,31 metros. Sin embargo, las ganancias obtenidas por el algoritmo PSO estabilizan la posición del carro a los 3,5 segundos a una distancia de 0,15 metros.

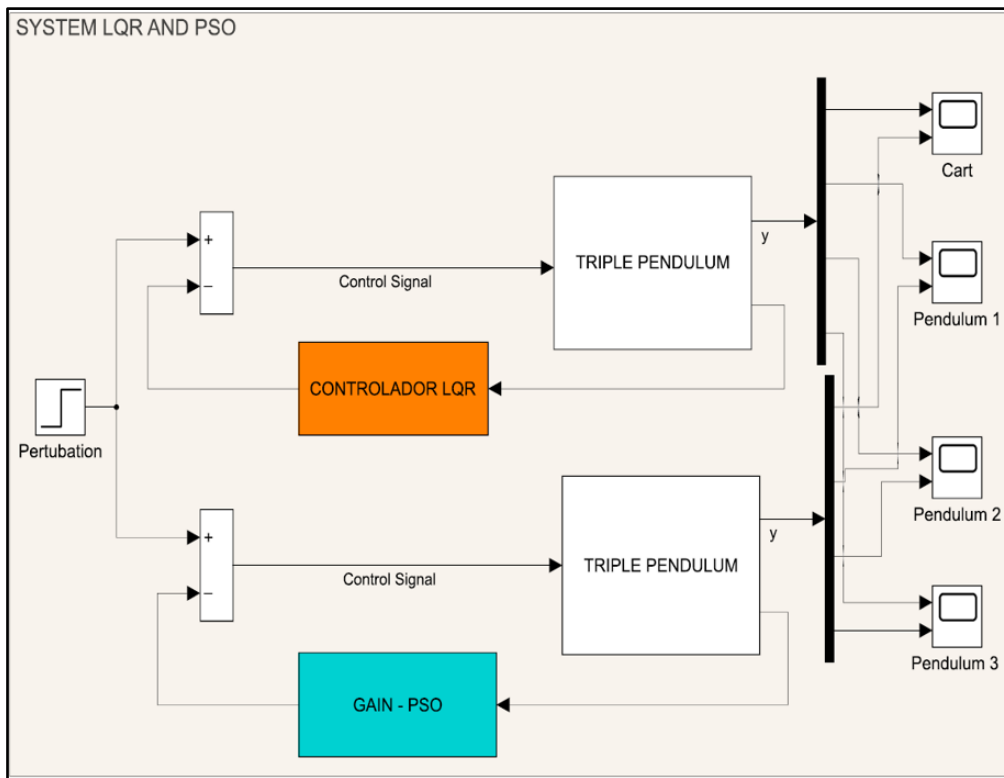


Figura 5. Diagrama de bloques del sistema LQR y PSO.

La figura 7 muestra la fuerza que genera la acción de control sobre el carro para estabilizar el sistema. Donde la fuerza máxima que entra en el actuador generada por el controlador LQR es de $-0,2\text{N}$, mientras que la fuerza máxima generada por el algoritmo PSO es de $-0,55\text{N}$, teniendo un sobreimpulso mayor pero una mejor estabilización en el sistema.

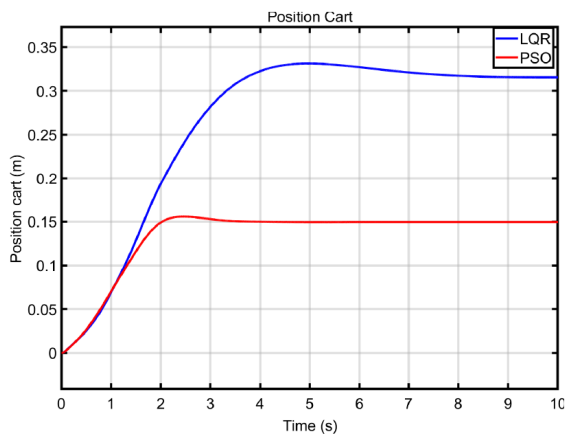


Figura 6. Posición del carro

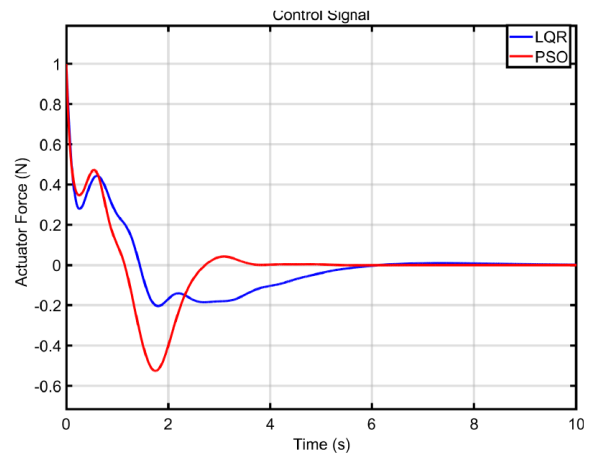
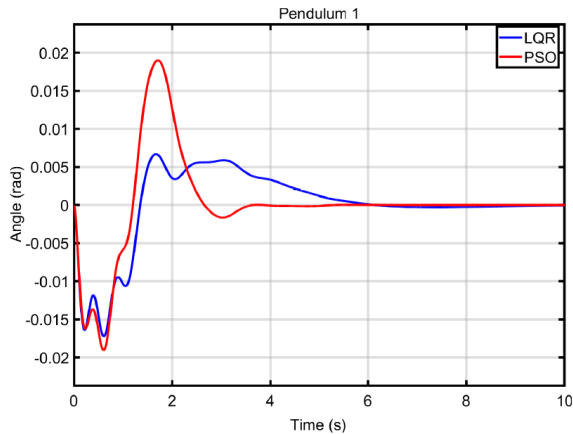
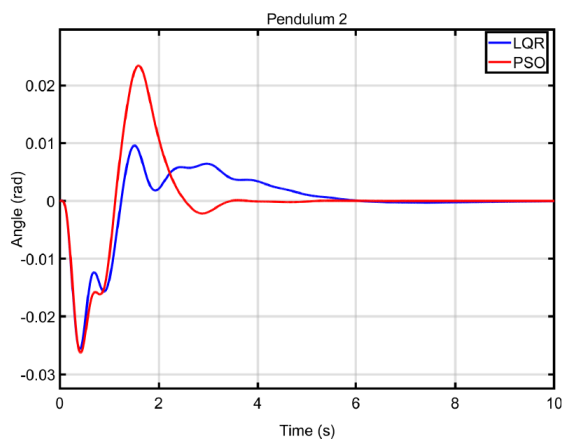


Figura 7. Fuerza generada por la acción de control para estabilizar el sistema

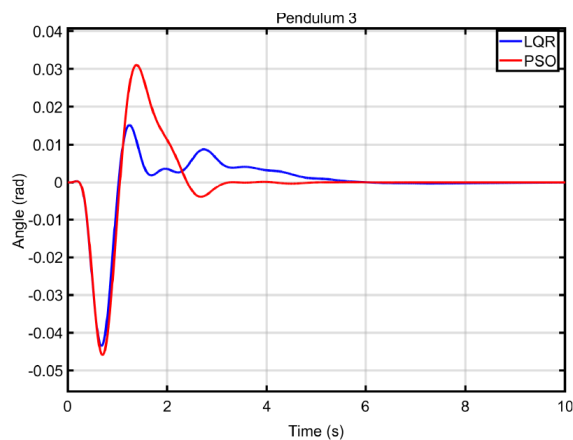
La variación angular de los péndulos obtenida en respuesta a la señal de perturbación se muestra en la figura 8. Para los tres péndulos, se obtiene un mayor sobreimpulso utilizando el algoritmo PSO, sin embargo, la estabilización del sistema se logra rápidamente a los 3,5 segundos.



(a)



(b)



(c)

Figura 8. Estabilización del péndulo triple bajo la acción de control: (a) Péndulo 1; (b) Péndulo 2; (c) Péndulo 3

4. Conclusiones

En el trabajo presentado se realizó un análisis comparativo de la estabilidad del sistema triple péndulo invertido aplicando el uso de un controlador LQR y un ajuste de ganancia mediante el algoritmo PSO. El sistema TIP fue linealizado y representado en espacio de estados en Simulink para ser implementado por ambos controladores. El controlador LQR en lazo cerrado fue desarrollado en Matlab con el sistema en equilibrio en estado inicial, perturbado por una señal tipo escalón unitaria.

El algoritmo PSO fue desarrollado en Matlab para obtener las ganancias que permiten estabilizar el péndulo triple invertido con una señal de referencia de cero y una posición inicial del sistema de 0,349 radianes en el tercer eslabón. El tiempo de ejecución del algoritmo PSO fue de 1857,23 segundos.

Para la comparación de ambos controladores, se utilizó una señal escalón como perturbación en el sistema TIP, que inicialmente estaba en equilibrio, con el fin de observar el tiempo de estabilización alcanzado empleando las diferentes ganancias obtenidas por cada estrategia de control utilizada en este trabajo. El tiempo de estabilización utilizando el controlador LQR fue de 9 segundos. Mientras que el tiempo de estabilización utilizando las ganancias encontradas por PSO fue de 3,5 segundos, sin embargo el gasto de energía resultó ser mayor reflejado en el sobreimpulso generado en la fuerza de la acción de control. Por lo tanto, el ajuste de las ganancias generado por el algoritmo PSO resulta ser mucho más eficiente si lo que se busca es reducir el tiempo de estabilización de un sistema en comparación al controlador LQR.

5. Agradecimientos.

Este trabajo fue apoyado por la Facultad de Ingeniería Mecánica y Ciencias de la Producción de la Escuela Superior Politécnica Del Litoral, ESPOL.

6. Referencias

- [1] M. El-Hawwary, A. Elshafei, H. Emara, and H. Fattah, "Adaptive fuzzy control of the inverted pendulum problem," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 14, no. 6, pp. 1135–1144, 2006..
- [2] T. Gluck, A. Eder, and A. Kugi, "Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation," *Automatica*, vol. 49, no. 3, pp. 801–808, 2013..
- [3] L. B. Prasad, B. Tyagi, and H. O. Gupta, "Optimal control of nonlinear inverted pendulum system using (pid) controller and (lqr): Performance analysis without and withn

- disturbance input,” *International Journal of Automation and Computing*, vol. 11, no. 6, 2014.
- [4] L. Chang, S. Piao, X. Leng, Z. He, and Z. Zhu, “Inverted pendulum model for turn-planning for biped robot,” *Physical Communication*, vol. 42, p. 101168, 2020.
- [5] I. Krzysztofik and Z. Koruba, “Adaptive control of anti-aircraft missile launcher mounted on a mobile base,” *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, vol. 2, no. 4, p. 043008, 2012.
- [6] Z. S. Kizir, Bingul, and C. Oysu, “Fuzzy control of a real time inverted pendulum system,” *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, vol. 21, pp. 121–133, 2010.
- [7] K. Yoshida, “Swing-up control of an inverted pendulum by energybased methods,” in *Proceedings of the American Control Conference*, San Diego, California, 1999, pp. 4045–4047.
- [8] K. Graichen, M. Treuer, and M. Zeitz, “Swing-up of the double pendulum on a cart by feedforward and feedback control with experimental validation,” *Automatica*, vol. 43, no. 1, pp. 63–71, 2007.
- [9] G. A. Medrano-Cerda, “Robust stabilization of a triple inverted pendulum-cart,” *International Journal of Control*, vol. 68, no. 4, pp. 849–865, 1997.
- [10] K. G. Eltohamy and C.-Y. Kuo, “Nonlinear optimal control of a triple link inverted pendulum with single control input,” *International Journal of Control*, vol. 69, no. 2, pp. 239–256, 1998.
- [11] V. Tsachouridis and G. Medrano-Cerda, “Discrete-time h control of a triple inverted pendulum with single control input,” *Control Theory and Applications*, IEE Proceedings -.
- [12] E. T. M. Jibril, M. Tadese, “Comparison of a triple inverted pendulum stabilization using optimal control technique,” *Multidisciplinary Academic Journal Publisher*, 2020.
- [13] M. K. Gupta, K. Bansal, and A. K. Singh, “Stabilization of triple link inverted pendulum system based on lqr control technique,” *Jaipur India*, 2014.
- [14] M. Hamza, H. J. YAP, and I. Choudhury, “Genetic algorithm and particle swarm optimization based cascade interval type 2 fuzzy pd controller for rotary inverted pendulum system,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, 06 2015.
- [15] H. B. T.J. Shima, “Pso-based integral sliding mode controller for optimal swing-up and stabilization of the cart-inverted pendulum system,” *Nigerian Journal of Technological Development*, vol. 18, no. 2, pp. 88–97, 2021.
- [16] U. Onen, A. C. akan, and I. Ilhan, “Particle swarm optimization based lqr control of an inverted pendulum,” *Engineering and Technology Journal*, vol. 2, pp. 168–174, 05 2017.
- [17] A. Abdelbar, S. Abdelshahid, and D. Wunsch, “Fuzzy pso: a generalization of particle swarm optimization,” in *Proceedings. 2005 IEEE International Joint Conference on Neural Networks*, 2005., vol. 2, 2005, pp. 1086–1091 vol. 2.
- [18] D. S. Naidu, *Optimal control Systems*. Idaho State University, 2002.