

UNED

TORTOSA

Cadup
Estudios

Modelo estadístico de distribución espacial de las acequias en una zona regable

Josep Maria Franquet Bernis



MODELO ESTADÍSTICO DE DISTRIBUCIÓN
ESPACIAL DE LAS ACEQUIAS EN UNA ZONA
REGABLE

JOSEP MARIA FRANQUET BERNIS



UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
CENTRO ASOCIADO DE TORTOSA

MODELO ESTADÍSTICO DE DISTRIBUCIÓN ESPACIAL DE LAS ACEQUIAS EN UNA ZONA REGABLE

STATISTICAL MODEL OF SPATIAL DISTRIBUTION
OF IRRIGATION DITCHS IN A REGABLE AREA

JOSEP MARIA FRANQUET BERNIS

2019

Primera edición, agosto de 2019

© Josep Maria Franquet i Bernis
e-mail: jfbernis@iies.es

Fotografía de la cubierta, gentileza de: <http://zepelin.net>

ISBN-13: 978-84-120526-2-6

ISBN-10: 84-120526-2-6

Depósito legal: T-940-2019

Edita: UNED-Tortosa. C/ Cervantes, 17 - 43500 TORTOSA
Tel. 977 44 31 04/08
e-mail: info@tortosa.uned.es

Imprime: **Gràfica Dertosense, S.L.**
C/ Cervantes, 21, - 43500 Tortosa
Tel.: 977 44 00 28
e-mail: graficadertosense@hotmail.com

Impreso en España
Printed in Spain

Reservados todos los derechos de publicación en cualquier idioma. La reproducción total o parcial de esta obra mediante cualquier procedimiento, ya sea mecánico, óptico, reprografía o bien tratamiento informático, así como la distribución de ejemplares por medios de alquiler o préstamo, están rigurosamente prohibidos sin la autorización escrita previa del autor, excepto citas, siempre que se mencione su procedencia, y serán sometidos a las sanciones establecidas por la ley. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Deben dirigirse a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si se necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

La publicación de este libro ha sido posible gracias al patrocinio de las siguientes instituciones:



**Universidad Nacional de Educación
a Distancia**



**Ajuntament
de Tortosa**



Diputació Tarragona



FUNDACIÓ PRIVADA DURAN&MARTÍ

ÍNDICE GENERAL

	<u>Pág.</u>
ÍNDICE GENERAL	7
PRESENTACIÓN Y JUSTIFICACIÓN	9
PRESENTACIÓ I JUSTIFICACIÓ	12
PRESENTATION ET JUSTIFICATION.....	15
PRESENTATION AND JUSTIFICATION.....	18
1. El nuevo concepto de coeficiente de uniformidad hidráulica	21
2. Otras medidas propuestas de la uniformidad hidráulica	27
2.1. Basadas en la desviación media absoluta	27
2.2. Basadas en otras medidas de dispersión y concentración	28
2.2.1. Índice de Gini y curva de Lorenz	28
2.2.2. Índice de Williamson.....	29
2.2.3. Índice de concentración de Lorenz	30
3. Otras características interesantes de la distribución espacial de las variables hidráulicas	33
3.1. Ecuaciones de ligadura entre los coeficientes de uniformidad.....	33
3.2. Agrupamiento en "clases" y otras características de las distribuciones hidráulicas	39
3.2.1. Los intervalos de clase	39
3.2.2. Forma de la distribución de frecuencias.....	41
3.2.3. Otros coeficientes de uniformidad hidráulica	42
4. Conceptualización de una zona regable por acequias a cielo abierto	43
4.1. La zona regable.....	43
4.2. Las acequias de riego.....	45
4.2.1. Concepto	45
4.2.2. Problemática de la red de riego con cauces terrizos.....	45
4.2.3. Utilidad de los revestimientos	48
4.2.4. Las ventajas aportadas por el revestimiento	49
5. Ejemplo práctico. Datos y enfoque del problema.....	51
6. "Normalización" del problema.....	55
7. Características de la distribución espacial.....	61

	<u>Pág.</u>
7.1. Medidas centrales o promedios	61
7.2. Medidas de dispersión o concentración	69
7.3. Otras características relevantes de la distribución espacial	72
7.3.1. Asimetría o sesgo	72
7.3.2. Apuntamiento o "curtosis"	76
7.3.3. Otras	77
7.4. Índice de Gini y curva de Lorenz	78
7.5. Índice de Williamson	81
7.6. Índice de concentración de Lorenz	82
8. Ajuste a una distribución normal	83
8.1. La hipótesis de normalidad y el estadígrafo χ^2	83
8.2. Determinación y fiabilidad del coeficiente de correlación no lineal	89
8.3. Toma de datos e intervalo de confianza de la proporción de acequias de un caudal determinado	90
8.3.1. Tamaño de la muestra	90
8.3.2. Intervalo de confianza	91
9. Distribución exponencial	94
10. Corrección por agrupamiento en "clases"	95
11. Estudio de la función $\lambda = f(R)$	96
11.1. La concepción teórica del problema	96
11.2. Significación del parámetro α	99
11.2.1. En relación al coeficiente de Fanning	99
11.2.2. En relación a la distribución de los valores de R en una zona regable	102
11.3. Función logarítmico-normal o ecuación de Mc Alister ..	108
11.4. Resumen de resultados	110
12. Aplicación de los métodos robustos	112
13. Resumen y conclusiones	116
APÉNDICE	119
ANEXO 1. TABLAS ESTADÍSTICAS	121
ANEXO 2. FOTOGRAFÍAS DEL PROCESO CONSTRUCTIVO	129
SÍMBOLOS, ABREVIATURAS Y SIGLAS	139
BIBLIOGRAFÍA Y FONDOS DOCUMENTALES	143
ÍNDICE DE FIGURAS	145
ÍNDICE DE TABLAS	146



PRESENTACIÓN Y JUSTIFICACIÓN

El presente trabajo se refiere al estudio estadístico de la distribución espacial de las variables hidráulicas. La uniformidad en la distribución del agua es una magnitud que caracteriza a cualquier sistema de riego y que además interviene en su diseño, tanto en el agronómico, puesto que afecta al cálculo de las necesidades totales de agua de los cultivos, como en el hidráulico, pues en función de ella se definen los límites entre los que se permite que varíen los caudales de los elementos de transporte e implementación del agua. La uniformidad es, pues, uno de los objetivos básicos que persigue el diseño y que sirve de puente o nexo de unión entre la agronomía y la hidráulica, puesto que si la uniformidad no es alta, habrá diferencias apreciables entre las cantidades de agua (y abonos disueltos, en el caso de la fertirrigación) que se suministran a unas plantas y otras, y, como consecuencia de ello, el cultivo no será homogéneo y el rendimiento disminuirá.

La “Hidráulica” es la parte de la Mecánica de los fluidos que estudia el equilibrio (“Hidrostática”) y el movimiento o flujo (“Hidrodinámica”) de los líquidos. Como “fluido” entendemos aquella modalidad de la materia que, en estado de reposo, se caracteriza por la condición de ser normales a la superficie de un elemento, por pequeño que éste sea, las fuerzas exteriores que sobre él puedan actuar; precisamente, la imposibilidad de que existan fuerzas o tensiones exteriores transversales o de cortadura es lo que diferencia los fluidos de los cuerpos sólidos. Mediante la Hidrodinámica, pues, se estudian principalmente los flujos de agua dirigidos y limitados por paredes resistentes, es decir, corrientes en conducciones libres o abiertas y cerradas o a presión, cuya distribución espacial por una zona regable, en base a consideraciones fundamentalmente estadísticas, constituye el objeto principal de nuestro trabajo. También se ensaya una aplicación de algunos Métodos Estadísticos clásicos y otros

novedosos propuestos por el autor para la evaluación de la uniformidad y de la forma de la distribución de probabilidad de las variables hidráulicas que intervienen; en este caso, se trata del caudal de las diferentes acequias de riego en un sistema de distribución por gravedad.

Las distribuciones teóricas de probabilidades cubren el concepto de funciones de densidad y de distribución, momentos factoriales y cuantiles, distribuciones empíricas, posiciones de ploteo, series parciales, incluyendo la distribución de Gauss o normal, log-normal, Pearson tipo III, log-Pearson III y Gumbel. El análisis de correlación y regresión mínimo-cuadrática aporta un conjunto de consideraciones teóricas que resultan útiles para indicar la existencia de la correlación existente entre las variables hidráulicas en estudio: el problema estriba entonces en determinar el tipo y grado de correlación existente entre ellas.

La investigación que ahora presentamos constituye una continuación de nuestros libros titulados “Cinco temas de Hidrología e Hidráulica” y “Cálculo hidráulico de las conducciones libres y forzadas”, publicados respectivamente en marzo del 2003 y noviembre de 2005 bajo los auspicios de la Universidad Internacional de Cataluña y de la Asociación de Ingenieros Agrónomos de Cataluña, y que han gozado de gran aceptación entre el público especializado. Pues bien, contemplamos nuestra aportación con el deseo de su utilidad práctica, tanto para los alumnos y profesores de las Escuelas de Ingenieros y Arquitectos como para los técnicos de grado medio y superior en el ejercicio de su profesión. Los estudiantes hallarán en ella el modo de resolver sus dificultades relacionadas con algunos temas concretos y los profesionales el recordatorio de los conocimientos adquiridos y la apertura de nuevas perspectivas para profundizar en otros.

Desde la reflexión y el estudio de muchos años, pero también desde el ejercicio libre de mi profesión de Ingeniero y desde la docencia que tuve el honor de impartir de las asignaturas “Hidráulica y Riegos” y “Proyectos” del Plan de Estudios de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola de la Universidad Internacional de Cataluña (UIC), quisiera también aportar mi granito de arena (o mejor aún, mi gotita de agua) a diversas cuestiones relacionadas con la materia, partiendo del tratamiento clásico pero desde una perspectiva novedosa y buscando nuevos planteamientos y soluciones. Y es que renovarse

es vivir, y cada generación tiene el hermoso deber de mejorar el esfuerzo acumulado de las precedentes; los viejos nombres que el tiempo inexorable sepulta en el olvido sólo reviven en el germinar primaveral de nuevas semillas y éste es el mejor -y acaso el único-homenaje que ilusionadamente pueden aguardar.

También en el marco limitado de estas reflexiones, quiero rendir tributo sincero de admiración y agradecimiento a los excelentes libros de texto, investigaciones y artículos técnicos, citados en la bibliografía, sobre diversos temas relacionados con la Hidráulica y la Estadística, habiendo sido influido notablemente, en mis estudios, por el brillante trabajo de sus autores.

Ofrecemos, en fin, nuestro trabajo a todos los profesionales y personas estudiosas de los temas hidráulicos y, muy especialmente, de su tratamiento estadístico y matemático, deseando que pueda reportar un extenso campo de utilidades a todos aquellos que -seducidos por una loable inquietud científica y técnica- nos dispensen el inmenso honor de consultarlo.

Tortosa, junio de 2019.

EL AUTOR

PRESENTACIÓ I JUSTIFICACIÓ

El present treball es refereix a l'estudi estadístic de la distribució espacial de les variables hidràuliques. La uniformitat en la distribució de l'aigua és una magnitud que caracteritza a qualsevol sistema de reg i que a més intervé en el seu disseny, tant en l'agronòmic, ja que afecta al càlcul de les necessitats totals d'aigua dels cultius, com en l'hidràulic, perquè en funció d'aquella es defineixen els límits entre els quals es permet que variïn els cabals dels elements de transport i implementació de l'aigua. La uniformitat és, doncs, un dels objectius bàsics que persegueix el disseny i que serveix de pont o nexa d'unió entre l'agronomia i la hidràulica, ja que si la uniformitat no és alta, hi haurà diferències apreciables entre les quantitats d'aigua (i adobs dissolts, en el cas de la fertirrigació) que se subministren a unes plantes i unes altres, i, com a conseqüència d'això, el cultiu no serà homogeni i el rendiment disminuirà.

La "Hidràulica" és la part de la Mecànica dels fluids que estudia l'equilibri ("Hidrostatica") i el moviment o flux ("Hidrodinàmica") dels líquids. Com a "fluid" entenem aquella modalitat de la matèria que, en estat de repòs, es caracteritza per la condició d'ésser normals a la superfície d'un element, per petit que aquest sigui, les forces exteriors que sobre ell puguin actuar; precisament, la impossibilitat que existeixin forces o tensions exteriors transversals o de tallament és el que diferencia els fluids dels cossos sòlids. Mitjançant la Hidrodinàmica, doncs, s'estudien principalment els fluxos d'aigua dirigits i limitats per parets resistents, és a dir, corrents en conduccions lliures o obertes i tancades o a pressió, la distribució espacial de la qual per una zona regable, sobre la base de consideracions fonamentalment estadístiques, constitueix l'objecte principal del nostre treball. També s'assaja una aplicació d'alguns Mètodes Estadístics clàssics i altres nous proposats per l'autor per a l'avaluació de la uniformitat i de la forma de la distribució de probabilitat de les variables hidràuliques que intervenen; en aquest cas, es tracta del cabal de les diferents sèquies de reg en un sistema de distribució per gravetat.

Les distribucions teòriques de probabilitats cobreixen el concepte de funcions de densitat i de distribució, moments factorials i quantils, distribucions empíriques, posicions de plotejo, sèries

parcials, incloent la distribució de Gauss o normal, log-normal, Pearson tipus III, log-Pearson III i Gumbel. L'anàlisi de correlació i regressió mínim-quadràtica aporta un ampli conjunt de consideracions teòriques que resulten útils per a indicar l'existència de la correlació existent entre les variables hidràuliques en estudi: el problema estriba llavors a determinar el tipus i grau de correlació existent entre elles.

La recerca que ara presentem constitueix una continuació dels nostres llibres titulats "Cinc temes d'Hidrologia i Hidràulica" i "Càlcul hidràulic de les conduccions lliures i forçades", publicats respectivament al març del 2003 i novembre de 2005 sota els auspicis de la Universitat Internacional de Catalunya i de l'Associació d'Enginyers Agrònoms de Catalunya, i que han gaudit de gran acceptació entre el públic especialitzat. Doncs bé, contemplem la nostra aportació amb el desig de la seva utilitat pràctica, tant per als alumnes i professors de les Escoles d'Enginyers i Arquitectes com per als tècnics de grau mitjà i superior en l'exercici de la seva professió. Els estudiants trobaran en ella la manera de resoldre les seves dificultats relacionades amb alguns temes concrets i els professionals el recordatori dels coneixements adquirits i l'obertura de noves perspectives per tal d'aprofundir en uns altres.

Des de la reflexió i l'estudi de molts anys, però també des de l'exercici lliure de la meva professió d'Enginyer i des de la docència que vaig tenir l'honor d'impartir de les assignatures "Hidràulica i Regs" i "Projectes" del Pla d'Estudis de l'Escola Universitària d'Enginyeria Tècnica Agrícola de la Universitat Internacional de Catalunya (UIC), he volgut també aportar el meu granet de sorra (o millor encara, la meva goteta d'aigua) a diverses qüestions relacionades amb la matèria, partint del tractament clàssic però des d'una perspectiva nova i cercant nous plantejaments i solucions. I és que renovar-se és viure, i cada generació té el bell haver de millorar l'esforç acumulat de les precedents; els vells noms que el temps inexorable soterra en l'oblit només reviu en el germinar primaveral de noves llavors i aquest és el millor -i per ventura l'únic-homenatge que poden esperar.

També en el marc limitat d'aquestes reflexions, vull rendir tribut sincer d'admiració i agraïment als excel·lents llibres de text, recerques i articles tècnics, citats en la bibliografia, sobre diversos temes relacionats amb la Hidràulica i l'Estadística, havent estat

influït notablement, en els meus estudis, pel brillant treball dels seus autors.

Oferim, en fi, el nostre treball a tots els professionals i persones estudioses dels temes hidràulics i, molt especialment, del seu tractament estadístic i matemàtic, desitjant que pugui reportar un extens camp d'utilitats a tots aquells que -seduïts per una lloable inquietud científica i tècnica- ens dispensin l'immens honor de consultar-lo.

Tortosa, juny de 2019.

L'AUTOR

PRESENTATION ET JUSTIFICATION

Le présent travail se réfère à l'étude statistique de la distribution spatiale des variables hydrauliques. L'uniformité dans la distribution de l'eau est une magnitude qui caractérise tout système d'irrigation et intervient également dans sa conception, à la fois dans l'agronomie, car il affecte le calcul des besoins en eau des cultures, telles que l'hydraulique, et en fonction de celui-ci, les limites sont définies entre la possibilité de faire varier le débit du transport de l'eau et les éléments de mise en œuvre. L'uniformité est donc l'un des objectifs fondamentaux de la conception et qui sert de pont ou de lien entre l'agronomie et l'hydraulique, mais que si l'uniformité n'est pas élevée, il y aura des différences significatives entre les quantités d'eau (et engrais dissous, dans le cas de la fertirrigation) qui sont fournis à certaines plantes et d'autres, et en conséquence de quoi, la culture ne sera pas homogène et le rendement diminuera.

La « Hydraulique » est la partie de la mécanique des fluides qui étudie l'équilibre (« hydrostatique ») et le mouvement ou le flux (« hydrodynamique ») des fluides. En tant que "fluide", nous entendons cette modalité de la matière qui, en état de repos, est caractérisée par la condition d'être normal à la surface d'un élément, aussi petit soit-il, les forces extérieures pouvant agir sur lui ; c'est précisément, l'impossibilité qu'ils existent des forces transversales ou de cisaillement ou des contraintes externes qui différencie les fluides des corps solides. L'hydrodynamique étudie donc principalement les écoulements d'eau dirigés et limités par des murs résistants, c'est-à-dire des courants dans des conduites libres ou ouvertes et fermées ou à pression, dont la distribution spatiale par zone réglable, basée sur des considérations fondamentalement statistiques, constitue l'objet principal de notre travail. Une application de certaines méthodes statistiques classiques et d'autres méthodes nouvelles proposées par l'auteur pour évaluer l'uniformité et la forme de la distribution de probabilité des variables hydrauliques impliquées est également testée; dans ce cas, il s'agit de l'écoulement par gravité des différents fossés d'irrigation d'un système de distribution.

Les distributions de probabilité théoriques couvrent le concept de fonctions de densité et de distribution, moments factoriels et

quantiques, distributions empiriques, positions de tracé, séries partielles, et compris la distribution de Gauss ou normale, log-normale, Pearson de type III, log-Pearson III et Gumbel. L'analyse de la corrélation et de la régression minimum-quadratique fournit un large ensemble de considérations théoriques utiles pour indiquer l'existence d'une corrélation entre les variables hydrauliques étudiées: le problème réside alors dans la détermination du type et du degré de corrélation existante parmi eux.

La recherche que nous présentons est une continuation de nos livres intitulés « Cinq sujets d'hydrologie et d'hydraulique » et « Calcul hydraulique des conductions libres et forcées », publiés respectivement en mars 2003 et novembre 2005 sous les auspices de l'Université internationale de Catalogne et l'association des agronomes de Catalogne, et qui ont été très bien accueillies par le public spécialisé. Aussi, nous envisageons notre contribution avec le désir de son utilité pratique, tant pour les étudiants et les professeurs des écoles d'ingénieurs et d'architectes que pour les techniciens de degré moyen et supérieur dans l'exercice de leur profession. Les étudiants y trouveront le moyen de résoudre leurs difficultés liées à des sujets concrets et les professionnels le rappel des connaissances acquises et l'ouverture de nouvelles perspectives à approfondir.

De la réflexion et de l'étude de nombreuses années, mais aussi du libre exercice de ma profession d'ingénieur et de l'enseignement que j'ai eu l'honneur d'enseigner des matières « Hydraulique et irrigation » et « Projets » du plan d'études de l'école Universitaire d'ingénierie technique agricole de l'Université internationale de Catalogne (UIC), je voudrais également apporter ma contribution (ou mieux, ma gouttelette d'eau) à diverses questions liées au sujet, à partir du traitement classique mais aussi depuis une nouvelle perspective à la recherche de nouvelles approches et solutions. Et c'est que se renouveler, c'est vivre, et chaque génération a le beau devoir d'améliorer l'effort accumulé des précédentes ; les anciens noms que le temps inexorable enterre dans l'oubli ne renaissent que par la germination de nouvelles graines et c'est le meilleur –et peut-être le seul– hommage qu'ils peuvent, espérons-le, attendre.

Toujours dans le cadre limité de ces réflexions, je voudrais rendre hommage à une admiration sincère et grâce aux excellents manuels, articles de recherche et articles techniques cités dans la

bibliographie sur divers sujets liés à l'hydraulique et aux statistiques, ayant été considérablement influencés, dans mes études, pour le brillant travail de leurs auteurs.

En bref, nous offrons notre travail à tous les professionnels et spécialistes des matières hydrauliques et, en particulier, de leur traitement statistique et mathématique, souhaitant pouvoir signaler un vaste domaine de services publics à tous ceux qui, par souci scientifique louable et technique, ont l'immense honneur de le consulter.

Tortosa, juin 2019.

L'AUTEUR

PRESENTATION AND JUSTIFICATION

The present work refers to the statistical study of the spatial distribution of hydraulic variables. The uniformity in the distribution of water is a magnitude that characterises any irrigation system and that also intervenes in its design, both in the agronomic, since it affects the calculation of the total water needs of the crops, as in the hydraulic, since depending on this, the limits are defined between allowing the flow of water transport and implementation elements to vary. Uniformity is then one of the basic objectives pursued by the design and it serves as a bridge or link between agronomy and hydraulics, since if the uniformity is not high, there will be appreciable differences between the amounts of water (and dissolved fertilizers, in the case of fertirrigation) that are supplied to some plants and others, and, as a consequence, the crop will not be homogeneous and the yield will decrease.

"Hydraulics" is the part of Fluid Mechanics that studies the balance ("Hydrostatics") and the movement or flow ("Hydrodynamics") of fluids. As "fluid" we understand that modality of matter that, in state of rest, is characterised by the condition of being normal to the surface of an element, however small it may be, the external forces acting on it; precisely, the impossibility of existing transverse external tensions or shear forces is what differentiates fluids from solid bodies. Therefore, hydrodynamics mainly studies the flows of water directed and limited by resistant walls, that is, currents in free or open and closed conduits or pressure, whose spatial distribution by a irrigable area, based on fundamentally statistical considerations, constitutes the main purpose of our work. An application of some classical statistical methods and other novel methods proposed by the author for the evaluation of the uniformity and the form of the probability distribution of the hydraulic variables involved are also tested; in this case, it is the flow of the different irrigation ditches in a distribution system by gravity.

Theoretical probability distributions cover the concept of density and distribution functions, factorial moments and quantiles, empirical distributions, plotting positions, partial series, including the Gaussian distribution or normal, log-normal, Pearson type III, log-Pearson III and Gumbel. The analysis of correlation and minimum-quadratic regression provides a set of theoretical considerations that

are useful to indicate the existence of the existing correlation between the hydraulic variables under investigation: the problem then lies in determining the type and degree of correlation between them.

The research that we are now presenting is a continuation of our books entitled "Five topics of Hydrology and Hydraulics" and "Hydraulic calculation of free and forced conductions", published respectively in March 2003 and November 2005 under the auspices of the International University of Catalonia and the Association of Agronomists of Catalonia, and that have been very successful among the specialised public. Well, we contemplate our contribution with the desire of its practical usefulness, both for the students and professors of the Schools of Engineers and Architects and for the technicians of medium and higher degree in the exercise of their profession. The students will find in it the way to solve their difficulties related to some concrete topics and the professionals the reminder of the acquired knowledge and the opening of new perspectives to deepen in others.

From the reflection and the study of many years, but also from the free exercise of my profession as an Engineer and from the teaching that I had the honor to teach of the subjects "Hydraulics and Irrigation" and "Projects" of the study program of the University of Agricultural Technical Engineering of the International University of Catalonia (UIC), I would also like to contribute my bit (or better yet, my droplet of water) to various issues related to the subject, starting from the classical treatment but from a new perspective and looking for new approaches and solutions. And it is that to renew oneself is to live, and each generation has the beautiful duty of improving the accumulated effort of the preceding ones; the old names that inexorable time buries in oblivion only revive in the sprouting of new seeds and this is the best - and perhaps the only - homage that they can hopefully await.

In the limited framework of these reflections, I would also like to pay tribute sincere admiration and gratitude to the excellent textbooks, studies and technical articles cited in the bibliography on various subjects related to Hydraulics and Statistics, having significantly influenced in my studies due to the brilliant work of their authors.

We offer, in fact, our work to all professionals and scholars of hydraulic subjects and, especially, the statistical and mathematical treatment, wishing that it can report an extensive field of utilities to all those who, seduced by a laudable scientific and technical concern grant us the immense honor of consulting it.

Tortosa, June 2019.

THE AUTHOR

1. EL NUEVO CONCEPTO DE COEFICIENTE DE UNIFORMIDAD HIDRÁULICA

La uniformidad es una magnitud que caracteriza a cualquier sistema de riego y que además interviene en su diseño, tanto en el agronómico, puesto que afecta al cálculo de las necesidades totales de agua de los cultivos, como en el hidráulico, pues en función de ella se definen los límites entre los que se permite que varíen los caudales de los emisores en los sistemas de riego a presión (aspersión y localizados de alta frecuencia: microaspersión, exudación, goteo) o de las acequias en los sistemas por gravedad. La uniformidad es, pues, uno de los objetivos básicos que persigue el diseño y que sirve de puente o nexo de unión entre la agronomía y la hidráulica, puesto que si la uniformidad no es alta, habrá diferencias apreciables entre las cantidades de agua (y abonos disueltos, en el caso de la fertirrigación) que se suministran a unas plantas y otras, y, como consecuencia de ello, el cultivo no será homogéneo y el rendimiento disminuirá. Si para solucionar este problema optamos por aumentar las dosis de riego, de tal forma que la planta que esté en peores condiciones (caso más desfavorable por razones taquimétricas y/o estadimétricas) reciba el agua que precisa, existirán muchas otras plantas que reciban volúmenes superiores a sus necesidades y, por lo tanto, habrá un despilfarro de agua y/o nutrientes. Pero es que además, esta solución puede disminuir también los rendimientos por exceso de agua en algunos casos (asfixia radicular), y siempre exigirá, o bien mayores caudales aportados (con el consiguiente dimensionado excesivo de la red) y/o bien mayores necesidades de energía y fertilizantes, al aumentar el número de horas de funcionamiento del riego.

Se comprende, pues, que al proyectar un regadío debe tenerse en cuenta la consecución de una uniformidad alta, buscando como objetivo final sacar el máximo partido posible a un sistema de riego normalmente caro y a un recurso escaso para obtener una gran "eficiencia" del mismo, entendiendo como tal la proporción del agua total que se aplica al terreno que es realmente utilizada por el cultivo, medida por el producto entre el coeficiente de uniformidad y la relación de transpiración del cultivo (cociente entre el agua transpirada y el agua aplicada a la planta).

Posiblemente, la medida más conocida de la uniformidad del riego es el coeficiente de uniformidad (CU) de Christiansen (1942),

propuesto por su autor el año 1942 y ampliamente utilizado en el riego por aspersión en sus diferentes modalidades. Sin embargo, pronto se vio que la aplicación de esta fórmula presentaba algunos inconvenientes, puesto que medía las desviaciones con respecto a la media aritmética, por lo que otorgaba idéntica importancia a las variaciones por encima de la media que a las que se producían por debajo de ella, lo que no se compagina suficientemente bien con los efectos agronómicos respectivos. Esta última circunstancia puede resultar particularmente grave en el caso de los riegos localizados de alta frecuencia (RLAF), pues mientras las variaciones por encima de la media señalan un despilfarro del recurso que, en general, no afectará al cultivo, aunque sí a la eficiencia (la eficacia al menor coste) del riego, las variaciones por debajo de la misma indican que la planta recibe menos agua y fertilizantes de los que necesita, por lo que su producción disminuirá, pudiendo incluso llegar a desaparecer.

Existen otros coeficientes, como el usado por los técnicos de la prestigiosa empresa Wright, o como el adoptado por el *Soil Conservation Service* (USA) así como por la *American Society of Agricultural Engineers*; también es digno de resaltar el propuesto por Keller y Karmeli, así como el de Bralts y Kesner (1983). En Francia, en fin, tiende a usarse el coeficiente de uniformidad propuesto por el *Centre de la Recherche et de l'Expérimentation du Génie Rural* (C.R.E.G.R.). **No obstante, hemos creído conveniente ampliar el concepto de “uniformidad hidráulica” al estudio del comportamiento de ciertas variables hidráulicas, como la sección de la conducción, la velocidad media, el caudal, la presión, la pérdida de carga, la pendiente motriz, etc., referidas a un conjunto más o menos importante de parcelas en regadío (zona regable), y con el ánimo de lograr una distribución más homogénea o “equilibrada” de sus valores desde el punto de vista espacial.** También los nuevos coeficientes de uniformidad aquí propuestos se podrán utilizar, indistintamente, para la *evaluación* de instalaciones que ya se hallen en funcionamiento o bien para el *diseño* de nuevas instalaciones, en lugar de los anteriormente mencionados.

Por lo que se refiere a los antecedentes, veamos que en el libro de este mismo autor titulado *Análisis territorial (División, organización y gestión del territorio)*, citado en la bibliografía, y concretamente en su capítulo 12 (“Uniformidad y equilibrio del territorio”), se propone y define el concepto de “coeficiente de

uniformidad territorial” como medida de la uniformidad de la distribución de una variable socioeconómica por un cierto territorio, precisamente de sentido contrario a su grado de variabilidad. Pues bien, creemos que una extensión de dicho concepto a la evaluación de la distribución de las variables hidráulicas como las mencionadas por una zona regable resulta perfectamente posible y provechosa.

El proceso de cálculo que aquí se propone comienza con la determinación del coeficiente de variación (CV) de Pearson (que, como es sabido, trátase de una medida abstracta de dispersión relativa de los valores de la variable aleatoria estadística, profusamente utilizada) de los caudales (o de los radios medios hidráulicos, presiones de servicio, pérdidas unitarias o totales de carga, longitudes, pendientes motrices, diámetros, etc.) de todas las conducciones abiertas o forzadas para cada subzona regable; de hecho, el mismo procedimiento puede utilizarse tanto si se trata de un riego a presión o por gravedad, o bien de una red de desagües para avenamiento o saneamiento agrícola. Es obvio que, desde los respectivos puntos de vista, la zona regable en cuestión se hallará tanto más equilibrada desde la óptica, por ejemplo, de la distribución de los radios hidráulicos de sus diferentes conducciones, cuanto menores sean los valores de su CV (“coeficiente de variación” de Pearson) referido a la variable R o a cualquier otra, que toma valores para cada una de las partes en que se considera espacialmente dividido dicho territorio. Destaca, del coeficiente elegido CV como medida de la variabilidad, su adimensionalidad, es decir, su independencia de las unidades de medida, permitiendo la comparación entre grupos diferentes de datos, lo que no resulta posible establecer mediante el exclusivo empleo de la varianza o de su raíz cuadrada: la desviación típica o “standard” de la correspondiente distribución de frecuencias.

Al respecto, y como medida de la uniformidad en la distribución de los radios hidráulicos o cualquier otra variable hidráulica por una zona regable, pueden utilizarse los diversos coeficientes que propondremos a continuación (expresados en %), de sentido contrario a la variabilidad antedicha.

El primero de ellos podría ser el siguiente:

$CU_1 = 100(1 - CV)$, de gran sencillez y aplicabilidad, siendo:

$$CV = \sigma/\bar{X},$$

en que \bar{X} es la media aritmética de los valores de la variable analizada R y σ es su desviación típica o "standard" (desviación cuadrática media).

El significado físico del CV se deduce claramente si aceptamos que todos los valores de la variable R, o cualquier otra significativa elegida en la zona regable en estudio, se distribuyen de acuerdo con la curva campaniforme de una distribución normal y, por lo tanto, se tendrá lo siguiente:

a) Prácticamente, todos los valores observados se hallarán comprendidos en el entorno: $(1 \pm 3 \cdot CV) \bar{X}$.

b) Aproximadamente, el 95% de las observaciones se encuentran comprendidas en el entorno: $(1 \pm 2 \cdot CV) \bar{X}$.

c) Si se toman las $(n/4)$ observaciones de valores más bajos del total de los **n** valores medidos de la variable en cuestión (cuyo valor superior será el primer cuartil Q_1 de la distribución de frecuencias), su media aritmética será igual a: $q_{25} = (1 - 1.27 \cdot CV) \bar{X}$.

d) El 68.27% de las observaciones realizadas estarán comprendidas en el intervalo: $(1 \pm CV) \bar{X}$.

Por tanto ello, y según los valores que adopte dicho coeficiente CV (o el CU_1), podríamos establecer una clasificación de las subzonas que constituyen el área objeto de puesta en riego según su grado o índice de uniformidad en relación a la correspondiente característica R o a cualquier otra variable hidráulica digna de evaluación, como el caudal Q de las acequias.

Otros coeficientes de uniformidad hidráulica podrían definirse a partir de las siguientes expresiones:

$CU_2 = (Q_1 / \bar{X}) \times 100$ (de menor aplicabilidad) y **$CU_3 = (q_{25} / \bar{X}) \times 100$** , siendo q_{25} , como ya se ha visto, el valor medio del cuarto inferior de los valores de la variable hidráulica analizada.

En relación a la uniformidad hidráulica a la que nos venimos refiriendo en el presente apartado, veamos que la propiedad más interesante de la distribución normal de los valores de la variable hidráulica analizada es que si se toma el 25% de los valores más

bajos, su valor medio, es decir, lo que hemos denominado q_{25} , valdrá, según se deduce del estudio de la distribución normal:

$$q_{25} = (1 - 1.27 \cdot CV) \cdot \bar{X} ,$$

con lo que el coeficiente de uniformidad CU_3 anteriormente definido, tomará el valor:

$$CU_3 = 100 (1 - 1.27 \cdot CV) < CU_1$$

Si suponemos, v.gr., una zona regable en que analizando la distribución de sus radios medios hidráulicos obtenemos un coeficiente de variación: $CV = 0.32$, veamos que:

$$CU_1 = 100 (1 - 0.32) = 68.00\%$$

$$CU_3 = 100 (1 - 1.27 \times 0.32) = 59.36\% ,$$

aunque dependería de las circunstancias el escoger uno u otro índice para la medida de la uniformidad hidráulica que se pretende, lo que constituye una responsabilidad del ingeniero proyectista o de la reglamentación que pudiera elaborarse al respecto. De hecho, el CU_3 siempre ofrecerá, expresado en %, por su propia configuración analítica, valores absolutos más bajos que el correspondiente CU_1 , tanto si se trata de valores positivos como negativos (véase, al respecto, el gráfico de la figura 1).

Por otra parte, consideremos, ahora, una zona regable cualquiera estructurada en subzonas (por grandes ramales de riego, polígonos catastrales, unidades de actuación, etc.) para las que conocemos los valores de las diferentes variables hidráulicas analizadas (radio medio, diámetro, presión de servicio, caudal, longitud, etc.). Llamando "e" al número de subzonas que integran una zona determinada, resultará que cuanto mayor sea "e" menor será la probabilidad de que todos las subzonas de esa zona regable pertenezcan al 25% más bajo del territorio global cuya puesta o transformación en regadío se pretende. En este caso, la expresión del coeficiente de uniformidad propuesto se transformaría en:

$$CU_3 = (1 - 1.27 \cdot CV / \sqrt{e})$$

Por otra parte, según se deduce del estudio de la distribución teórica normal, se cumplirá que: $Q_1 = (1 - 0.68 \cdot CV) \cdot \bar{X}$, que será el

intervalo correspondiente al 50% de los casos o "rango intercuartílico" ($Q_3 - Q_1$) de la distribución de probabilidad, con lo que también se cumplirá:

$$CU_2 = 100 (1 - 0.68 \times CV),$$

que, lógicamente, será el mayor de los cuatro coeficientes de uniformidad hidráulica aquí definidos (ver Fig. 1).

Así pues, y en base a dichos coeficientes, resultará un \overline{CU} (medio) de: $Z = -0.9375$ (media aritmética), o bien $Z = -0.9117$ (media geométrica), por lo que podríamos considerar, como medida "standard" de la uniformidad de una zona regable cualquiera, un $\overline{CU} = 100 (1 - 0.92 \cdot CV)$, cuyo intervalo, bajo la hipótesis de normalidad en la distribución espacial de los valores de la variable hidráulica analizada, abarcaría un: $0.3212 \times 2 = 0.6424 \equiv 64.24\%$ de los casos, según puede comprobarse mediante las tablas más completas de áreas y ordenadas bajo la función normal, que adjuntamos en el Anexo nº: 1 del Apéndice.

En el ejemplo anteriormente propuesto, se tendrá:

$$\begin{cases} CU_2 = 100 (1 - 0.68 \times 0.32) = 78.24\% \\ \overline{CU} = 100 (1 - 0.92 \times 0.32) = 70.56\% \end{cases}$$

pudiendo, en la práctica, escoger cualquiera de ellos como medida de la uniformidad hidráulica que deseamos realizar.

Habida cuenta de su interés para la realización de este tipo de cálculos, nos remitimos a la consulta de una tabla que ofrece las áreas existentes bajo la curva normal tipificada, limitadas por la ordenada $z = 0$ y cualquier valor positivo de z . A partir de esta misma tabla, se pueden encontrar las áreas comprendidas entre dos ordenadas cualesquiera, utilizando la simetría de la curva de Gauss en relación al eje de ordenadas $z = 0$. Por último, se incluye también una tabla con los valores de las ordenadas (y) de la curva normal tipificada para los diferentes valores de z .

Dichas tablas estadísticas, se hallan en el Anexo 1 del Apéndice de la presente monografía (tablas A1, A2 y A3), por lo que nos referiremos a ellas para el logro de mayores especificaciones y detalles.

2. OTRAS MEDIDAS PROPUESTAS DE LA UNIFORMIDAD HIDRÁULICA

2.1. BASADAS EN LA DESVIACIÓN MEDIA ABSOLUTA

La "desviación media" es la media aritmética de las desviaciones absolutas de los n valores de la variable hidráulica analizada respecto a un promedio cualquiera. Si tomamos, como dicho promedio, la media aritmética o esperanza matemática $\bar{X} = \alpha$, su expresión será, en el caso de una distribución de frecuencias unitarias:

$$DM = \frac{|x_1 - \bar{X}| + |x_2 - \bar{X}| + \dots + |x_n - \bar{X}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{X}|}{n},$$

(este valor resultaría mínimo si en vez de considerar la \bar{X} hubiéramos tomado la mediana $M_e = Q_2$ o valor central de la correspondiente distribución de frecuencias; se le suele denominar, entonces, "desviación mediana").

Por otra parte, en el caso de operar con frecuencias agrupadas o conjuntas, lo que sucederá cuando se opte por agrupar los valores de la variable hidráulica analizada por intervalos de clase (como en el ejemplo posterior de las acequias), se tendrá que:

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + \dots + n_h &= \sum_{i=1}^h n_i = n \\ DM &= \frac{|x_1 - \bar{X}| \cdot n_1 + |x_2 - \bar{X}| \cdot n_2 + \dots + |x_h - \bar{X}| \cdot n_h}{n} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^h |x_i - \bar{X}| \cdot n_i}{n} = \sum_{i=1}^h |x_i - \bar{X}| \cdot f_i. \end{aligned}$$

Pues bien, en base a ella, podríamos definir el siguiente nuevo coeficiente de uniformidad:

$$CU_4 = 100 (1 - DM / \bar{X}),$$

que, en realidad, resulta similar al CU_1 , habiendo substituido la desviación típica o "standard" por la desviación media absoluta, como medida absoluta de dispersión espacial, por la zona regable,

de los valores de la variable aleatoria estadística analizada (radio medio, caudal, pendiente, longitud, presión, ...). Normalmente, para una misma zona regable, se cumplirá que:

$$CU_3 < CU_1 < \overline{CU} < CU_4 < CU_2 < CU_5,$$

estando los valores de todos estos coeficientes de uniformidad limitados o acotados superiormente en el 100%, según podrá comprobarse, de modo gráfico, en las figuras 1 y 2.

2.2. BASADAS EN OTRAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN Y CONCENTRACIÓN

2.2.1. Índice de Gini y curva de Lorenz

Teóricamente, y a igualdad de requerimientos y condicionantes, la distribución perfecta de la variable hidráulica tendrá lugar cuando, por ejemplo, en un riego por gravedad, todas las acequias de riego tengan el mismo caudal (o radio hidráulico, longitud, pendiente motriz, etc.), lo que constituye un *desideratum* ideal pero, en cualquier caso, presenta una medida de la uniformidad en el diseño de las mismas. En este caso, al representar los porcentajes acumulados del caudal frente a los porcentajes acumulados de las conducciones, se obtendrá la recta de ecuación: $q_i = p_i$, coincidente con la bisectriz del primer cuadrante, y el índice de GINI (G) valdrá 0. Obviamente, este índice se encuentra más próximo a 1 cuanto peor está distribuida, por la zona regable, la variable hidráulica que estamos evaluando.

En los libros relacionados de A. Pulido San Román¹ y de A. Alcaide Inchausti², podemos encontrar presentaciones diferentes de la medida que hemos empleado para parametrizar la concentración de los caudales en el ejemplo práctico desarrollado al final del presente capítulo: el índice de GINI. Para interpretar correctamente su significado, resulta suficiente con observar que G varía entre los valores extremos 0 y 1, tomando el valor mínimo o nulo cuando cada p_i es igual a su correspondiente q_i , lo que provoca la anulación del numerador de su expresión definitoria; es decir, cuando cualquier porcentaje de acequias de riego transporta un

¹ *Estadística y Técnicas de Investigación Social*. Ed. ANAYA. Madrid, 1971, pág. 111.

² *Estadística Económica*. Ed. SAETA. Madrid, 1973, pág. 294.

porcentaje igual de caudal sobre el global. O bien dicho de otra manera, $G = 1$ tendría lugar en el supuesto teórico o hipotético de que todas las q_i fuesen nulas, excepto la última o k -ésima (correspondiente al último intervalo de clase considerado) que concentraría todo el caudal circulante por la zona regable que nos ocupa, lo que señalaría la menor uniformidad u homogeneidad en la distribución posible.

Todos estos conceptos pueden precisarse mucho mejor representando en un diagrama la función: $p_i = f(q_i)$, o bien su inversa: $q_i = \varphi(p_i)$, que permite obtener una línea poligonal construida por encima (o por debajo) de la diagonal de un cuadrado que tiene un extremo en el centro u origen de coordenadas cartesianas rectangulares y el otro extremo en el punto de coordenadas (100, 100). Esta figura, denominada CURVA DE LORENZ, frecuentemente usada en el Análisis estructural económico, pondrá de manifiesto una distribución de los caudales de las acequias de riego más equitativa en la medida que la línea poligonal resultante (que tenderá a convertirse en una curva al aumentar el número de puntos en estudio) se sitúe más próxima a la citada diagonal (o bien G más próximo a 0) y también recíprocamente³.

2.2.2. Índice de Williamson

Por otra parte, en el mismo orden de ideas, juzgamos recomendable la utilización, a los efectos de medir el grado de concentración/dispersión de la variable hidráulica en estudio, del denominado "índice de Williamson" (Franquet, 2003), que nos ofrecerá una buena información en cuanto al nivel de agrupación de los valores de la variable aleatoria estadística (q_i) en relación al valor central o media de la correspondiente distribución de frecuencias.

En nuestro caso, la variable hidráulica estudiada es el caudal global máximo Q_i que pueden transportar las acequias de riego de cada uno de los 8 intervalos de clase en que hemos considerado particionado el conjunto de las mismas (ver el ejemplo práctico que hemos propuesto a partir del punto 5 de la presente monografía).

³ Así pues, cuanto más pequeña sea el área comprendida entre la curva de Lorenz y la diagonal del primer cuadrante del círculo, mejor será también la distribución de la variable hidráulica que es objeto de nuestro estudio.

Por esta razón, la fórmula pertinente, en relación al número de estas conducciones libres, vendrá dada por la expresión:

$$W_{Q,n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 \left(\frac{Q_i}{n_i} - \frac{Q}{n} \right)^2 \times \frac{n_i}{n}}{\frac{Q}{n}}}, \forall i \in (1, 2, \dots, 8), \text{ donde :}$$

Q_i = caudal global máximo de cada intervalo de clase (l/s)
 n_i = número de acequias de riego de cada intervalo de clase.
 Q = caudal global máximo del conjunto de la zona regable (l/s)
 n = número total de acequias de riego de la zona regable estudiada (1000 en nuestro caso).

De hecho, los valores de la variable hidráulica Q_i vienen dados, en las tablas auxiliares correspondientes de cálculo, como:

$$Q_i = x_i \cdot n_i .$$

2.2.3. Índice de concentración de Lorenz

Las medidas de concentración, en general, nos informan de la concentración de la distribución estadística, entendida en un sentido distinto al de la antinomia "dispersión/ concentración" y miden el mayor o menor "grado de igualdad en el reparto de la totalidad de los valores de la variable estadística en estudio".

De esta manera, si una pequeña parte de la población (unas pocas acequias) tiene una gran parte del total de la variable hidráulica analizada (caudal), la variable estará muy concentrada en pocas acequias. Sin embargo, si se guardan las proporciones entre las acequias y la parte del total caudal que se reparten, la distribución será igualitaria, homogénea y poco o nada concentrada.

A mayor abundamiento, desarrollaremos el cálculo de este nuevo índice desde el mismo diagrama o curva que hemos propuesto anteriormente. Tal como se ha venido considerando, se obtendrán siempre curvas cóncavas hacia las y positivas, y que se hallan situadas por debajo de la diagonal del cuadrado que pasa por el origen de coordenadas y por el punto (100,100).

Así pues, tendremos:

$$L = \frac{(a - q_1) + (2a - q_2) + \dots + [(n-1)a - q_{n-1}]}{a + 2a + \dots + (n-1)a} \quad (1)$$

donde **a** es la media aritmética de los porcentajes de los caudales de las diferentes acequias de riego correspondientes a cada intervalo de clase, o sea:

$$X_i = \frac{x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i} \times 100 \quad ; \quad a = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{q_n}{n} \quad ;$$

(en nuestro caso, como se verá posteriormente, se tiene: $n = 8$).

De esta manera, se cumplirá también que:

$$\begin{aligned} q_1 &= X_1 \\ q_2 &= X_1 + X_2 \\ q_3 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ &\dots\dots\dots \\ q_n &= X_1 + X_2 + \dots + X_n \end{aligned}$$

o sea, en definitiva: $q_i = \sum_{j=1}^i X_j$, que es justamente el criterio que hemos seguido para la elaboración de la tabla correspondiente. **Debe tenerse bien presente que, en este caso, la ordenación de los valores de las X_j es preciso realizarla de menor a mayor.**

Desarrollando la expresión anterior (1), obtendremos:

$$\begin{aligned} L &= \frac{a + 2a + \dots + (n-1)a - (q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1})}{a + 2a + \dots + (n-1)a} = \\ &= 1 - \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1}}{a + 2a + \dots + (n-1)a} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{\frac{n(n-1)}{2}a} = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{q_n}, \end{aligned}$$

ya que: $1 + 2 + \dots + (n-1) = n \cdot (n-1)/2$, puesto que se trata de la adición de los $(n-1)$ primeros términos consecutivos de una progresión aritmética de razón igual a la unidad (demostrable por inducción completa), y además: $n \cdot a = q_n$, por la propia definición que hemos considerado de la media aritmética o esperanza matemática **a**.

Veamos, entonces, los valores que adopta este nuevo índice en los casos extremos posibles. Efectivamente, **si la concentración del caudal es máxima**, tendremos que:

$$X_1 = X_2 = \dots = X_{n-1} = 0, \text{ y también: } q_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

$$L = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{q_n} = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{0}{q_n} = 1, \text{ dado que: } \sum_{i=1}^{n-1} q_i = 0.$$

Sin embargo, **si la concentración del caudal es mínima**, o sea, la distribución de la misma variable hidráulica es teóricamente perfecta desde el punto de vista estadístico (no necesariamente de las necesidades de agua de los cultivos, que pueden ser diferentes según la edad y la especie, y que se deben establecer según las diversas subzonas regables), se tendrá lo siguiente:

$$X_1 = X_2 = \dots = X_n = a, \quad \sum_{i=1}^{n-1} q_i = \frac{n(n-1)}{2} a,$$

en cuyo caso, el índice de concentración de Lorenz (Franquet, 2003) será:

$$L = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{q_n} = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{n \cdot (n-1) \cdot a}{2 \cdot n \cdot a} = 1 - 1 = 0.$$

De hecho, estos valores extremos del índice analizado se corresponden con similares valores del índice de Gini (Franquet, 2003) anteriormente estudiado. Podemos ver que, cuando sucede que: $L = 0$ ($X_1 = X_2 = \dots = X_n = a$), sucede justamente que: $q_n = n \cdot a$, razón por la cual la curva pertinente es el segmento recto coincidente con la diagonal del cuadrado al que nos hemos referido.

En la concentración máxima: $L = 1$ ($X_1 = X_2 = \dots = X_{n-1} = 0$), y la curva poligonal de Lorenz, que constituye un triángulo rectángulo

isósceles, viene dada por los dos lados normales o perpendiculares del cuadrado construido al objeto de trazar el diagrama en cuestión. Obviamente, cuanto más se aproxime la curva a la diagonal relacionada, más perfecta será -al menos desde el punto de vista estadístico- la distribución de la variable hidráulica en estudio. Incluso podemos dar una interpretación geométrica del índice de Lorenz de esta manera: el numerador de la fórmula anterior (1) se puede considerar como la adición de las áreas de un número $(n-1)$ de rectángulos de base igual a la unidad y altura: $(h \cdot a - q_h)$, siendo $\forall h \in [1, 2, \dots, (n-1)]$. El denominador de la fórmula, en este caso, es la suma de las áreas de los $(n-1)$ rectángulos de base unidad y altura: $h \cdot a$, $\forall h \in [1, 2, \dots, (n-1)]$. Si observamos lo que representa la suma de estos rectángulos, deduciremos que el numerador de la expresión (1) es el área comprendida entre la curva poligonal de Lorenz y la diagonal del cuadrado, mientras que el denominador es precisamente el área de la mitad de dicho cuadrado⁴.

Este índice es equivalente al anteriormente estudiado de Gini y obliga a la realización del cálculo de la superficie de la figura comprendida entre la diagonal y la correspondiente curva o poligonal de Lorenz. Un valor aproximado es el que se obtiene mediante la aplicación de la fórmula basada en los porcentajes acumulados, que resulta muy empleada en los trabajos prácticos. En nuestro caso, como se verá posteriormente, la fórmula (1) tomará la configuración simplificada (con $n = 8$ y $q_n = 100$):

$$L = 1 - \frac{2}{7} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{100} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^7 q_i}{350}.$$

3. OTRAS CARACTERÍSTICAS INTERESANTES DE LA DISTRIBUCIÓN ESPACIAL DE LAS VARIABLES HIDRÁULICAS

3.1. ECUACIONES DE LIGADURA ENTRE LOS COEFICIENTES DE UNIFORMIDAD

Evidentemente, existen en la metodología estadística otras medidas del grado de concentración y/o dispersión de las variables hidráulicas que pueden emplearse eficazmente en la medida de la

⁴ Así pues, también el índice de concentración de Lorenz será tanto más pequeño cuanto menor sea el valor del área limitada por la diagonal del primer cuadrante y la misma curva poligonal.

uniformidad o del equilibrio hidráulico de una zona sometida a un proceso de transformación a regadío o avenamiento (como, por ejemplo, el recorrido "semi-intercuartílico", el "coeficiente de apertura", el "recorrido relativo", etc.), debiéndose tener en cuenta que, para distribuciones moderadamente asimétricas, se pueden aplicar, con buena aproximación, las fórmulas empíricas siguientes (donde Q_1 y Q_3 son, respectivamente, el primer y tercer cuartil de la correspondiente distribución de frecuencias):

$$DM \approx (4/5) \cdot \sigma \quad ; \quad (Q_3 - Q_1)/2 \approx (2/3) \cdot \sigma ,$$

que no son más que consecuencias directas del hecho de que, para distribuciones normales, se tiene que la desviación media absoluta DM y el "rango semiintercuartílico" son, respectiva y aproximadamente, iguales a 0.7979 y 0.6745 veces del valor de la desviación típica o "standard" σ .

Desde esta perspectiva, y para distribuciones aproximadamente normales⁵ con suficiente número de valores de la variable hidráulica en estudio ($n \geq 30$), los coeficientes de uniformidad anteriormente definidos pueden representarse, geoméricamente, por rectas o funciones lineales cuya variable independiente o explicativa sea el coeficiente de variación de Pearson CV. Hay que tener en cuenta que para dichos valores grandes de n , la distribución muestral de medias se aproxima a una distribución normal o casi normal, así como las distribuciones muestrales de las diferencias de medias o proporciones (Spiegel, 1981).

En concreto, se tendrá que:

$$CU_4 = 100 (1 - 0.7979 \cdot s/\bar{X}) \approx 100 \cdot (1 - 0.80 \cdot CV) .$$

La representación gráfica resultante será la siguiente:

⁵ Las distribuciones *aproximadamente* normales aparecen por doquier, como queda explicado por el teorema central del límite. Cuando en un fenómeno se sospecha la presencia de un gran número de pequeñas causas *actuando de forma aditiva e independiente* es razonable pensar que las observaciones serán "normales". Hay métodos estadísticos para probar empíricamente esta asunción, por ejemplo, el *test* de D'Agostino-Pearson. El test de Kolmogorov-Smirnov, antes ampliamente usado, últimamente parece estar desaconsejado. Hay causas que pueden actuar de forma *multiplicativa* (más que aditiva). En este caso, la asunción de normalidad no está justificada y es el logaritmo de la variable en cuestión el que estaría normalmente distribuido. La distribución de las variables directamente observadas en este caso se denomina "log-normal".

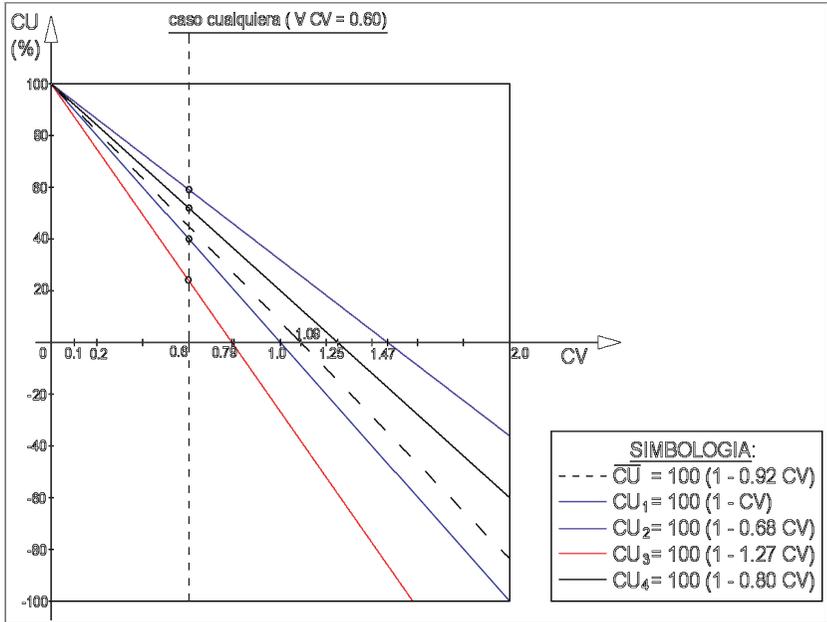


Fig. 1. Coeficientes de uniformidad en función del coeficiente de variación de Pearson.

A su vez, las relaciones que ligan entre sí los diferentes coeficientes de uniformidad hidráulica aquí definidos, pueden deducirse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} CU_1 &= 100 (1 - CV) = 100 - 100 \cdot CV \\ CU_2 &= 100 (1 - 0.68 \cdot CV) = 100 - 68 \cdot CV \\ CU_3 &= 100 (1 - 1.27 \cdot CV) = 100 - 127 \cdot CV \\ CU_4 &= 100 (1 - 0.80 \cdot CV) = 100 - 80 \cdot CV \\ \overline{CU} &= 100 (1 - 0.92 \cdot CV) = 100 - 92 \cdot CV \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} CU_1 - CU_3 &= 100 - 100 \cdot CV - 100 + 127 \cdot CV = 27 \cdot CV \\ CU_3 - CU_4 &= 100 - 127 \cdot CV - 100 + 80 \cdot CV = -47 \cdot CV \\ \hline CU_1 - CU_4 &= \dots\dots\dots(27 \cdot CV - 47 \cdot CV) \dots\dots\dots = -20 \cdot CV \end{aligned}$$

Se tendría que:

$$\begin{aligned} CU_1 / CU_3 &= (1 - CV) / (1 - 1.27 \cdot CV) && ; \\ CU_1 - 1.27 \cdot CV \cdot CU_1 &= CU_3 - CV \cdot CU_3 && ; \\ CU_1 - CU_3 &= 27 \cdot CV = 1.27 \cdot CV \cdot CU_1 - CV \cdot CU_3 && ; \\ 27 &= 1.27 \cdot CU_1 - CU_3 && ; \quad CU_3 + 27 = 1.27 \cdot CU_1 && ; \text{ con lo que:} \end{aligned}$$

$$\mathbf{CU_1 = (CU_3 + 27) / 1.27}$$

Así mismo:

$$\begin{aligned} CU_1 / CU_4 &= (1 - CV) / (1 - 0.8 \cdot CV) && ; \\ CU_1 - 0.8 \cdot CV \cdot CU_1 &= CU_4 - CV \cdot CU_4 && ; \\ CU_1 - CU_4 &= -20 \cdot CV = 0.8 \cdot CV \cdot CU_1 - CV \cdot CU_4 && ; \\ -20 &= 0.8 \cdot CU_1 - CU_4 && ; \quad CU_4 - 20 = 0.8 \cdot CU_1 && ; \text{ y entonces:} \end{aligned}$$

$$\mathbf{CU_1 = (CU_4 - 20) / 0.8.}$$

Si observamos la representación gráfica adjunta de la Fig. 2, la convergencia de ambas rectas tendrá lugar para los valores:

$$(CU_3 + 27) / 1.27 = (CU_4 - 20) / 0.8 \quad \text{y} \quad CU_3 = CU_4 ,$$

lo que implica que, en dicho punto, tendrá lugar la máxima uniformidad hidráulica posible, con:

$$\mathbf{CU_1 = CU_3 = CU_4 = 100\% = CU_2 = \overline{CU}}$$

También se cumplirá que:

$$\begin{aligned} CU_3 / CU_4 &= (1 - 1.27 \cdot CV) / (1 - 0.8 \cdot CV) && ; \\ CU_3 - 0.8 \cdot CV \cdot CU_3 &= CU_4 - 1.27 \cdot CV \cdot CU_4 && ; \\ CU_3 - CU_4 &= -47 \cdot CV = 0.8 \cdot CV \cdot CU_3 - 1.27 \cdot CV \cdot CU_4 && ; \\ 1.27 \cdot CU_4 - 47 &= 0.8 \cdot CU_3 && ; \text{ y entonces se cumple:} \end{aligned}$$

$$\mathbf{CU_3 = (1.27 \cdot CU_4 - 47) / 0.8}$$

Las relaciones existentes entre los diferentes coeficientes de uniformidad hidráulica anteriormente definidos, y que ya han sido expresadas analíticamente, pueden verse gráficamente representadas a continuación:

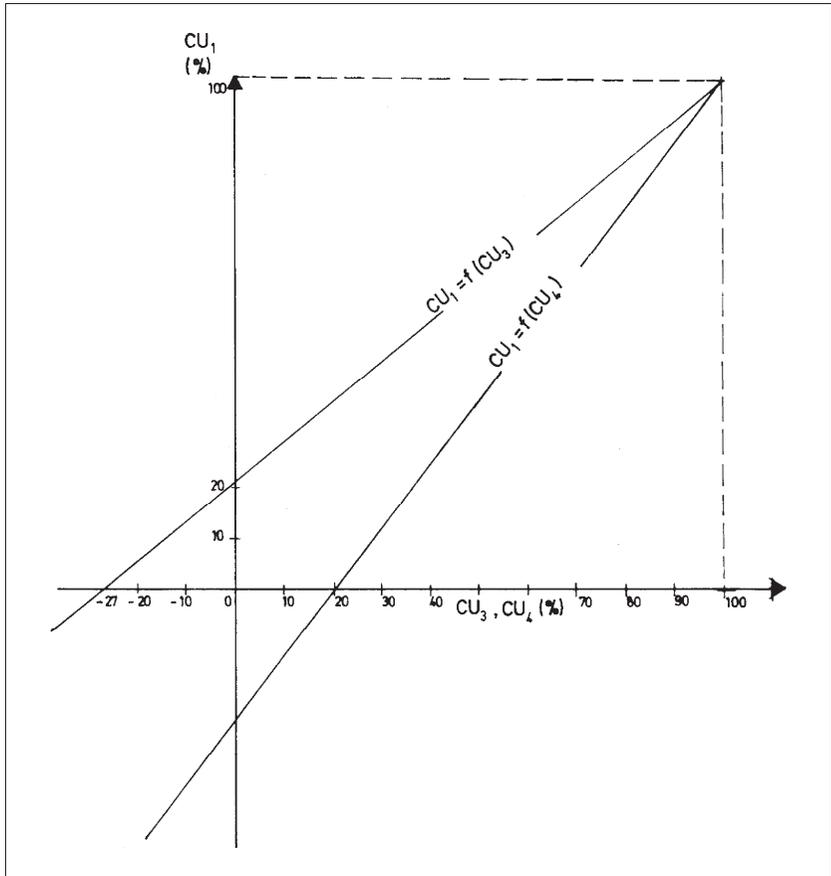


Fig. 2. Relaciones existentes entre los diferentes coeficientes de uniformidad, para distribuciones hidráulicas aproximadamente normales (I).

Idénticas consideraciones podríamos realizar respecto a CU_2 y a \overline{CU} en relación con los tres restantes coeficientes de uniformidad hidráulica, y cuya materialización no ofrece mayor dificultad.

El gráfico anterior puede complementarse, por su elevado interés práctico, con el siguiente, que relaciona el coeficiente de uniformidad CU_3 con el CU_4 del siguiente modo:

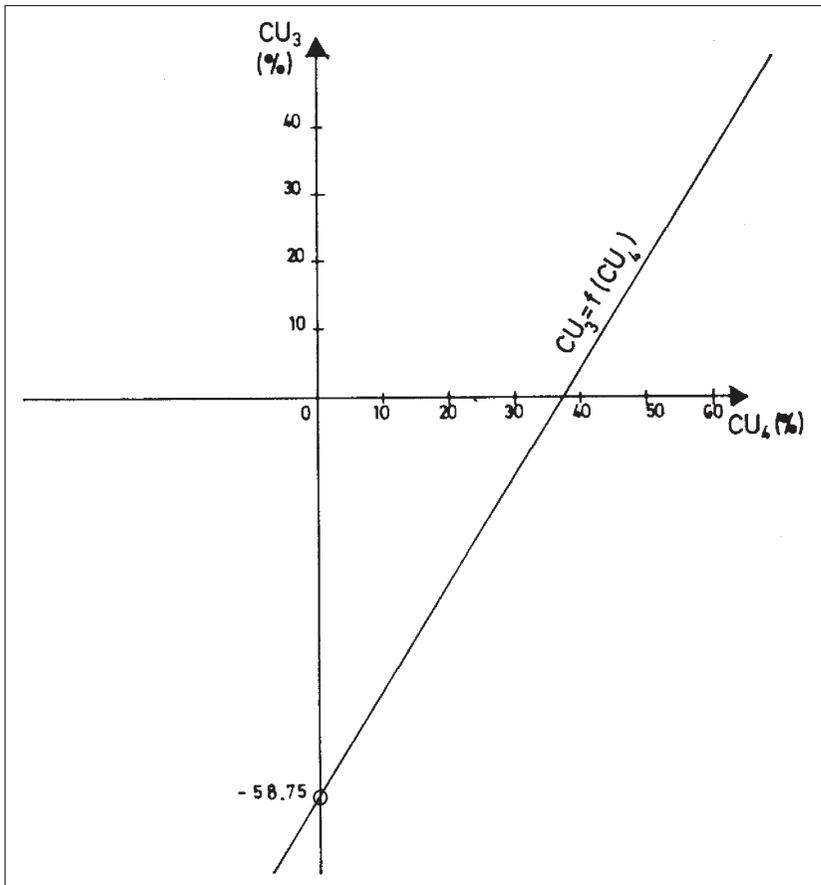


Fig. 3. Relaciones existentes entre los diferentes coeficientes de uniformidad, para distribuciones hidráulicas aproximadamente normales (II).

De las expresiones anteriores, se deducen inmediatamente las tres siguientes, hasta completar las seis relaciones posibles existentes entre los índices hidráulicos de tal suerte definidos, esto es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{CU_3} &= \mathbf{1.27 \cdot CU_1 - 27} \\
 \mathbf{CU_4} &= \mathbf{0.8 \cdot CU_1 + 20} \\
 \mathbf{CU_3} &= \mathbf{(0.8 \cdot CU_3 + 47) / 1.27}
 \end{aligned}$$

3.2. AGRUPAMIENTO EN "CLASES" Y OTRAS CARACTERÍSTICAS DE LAS DISTRIBUCIONES HIDRÁULICAS

3.2.1. Los intervalos de clase

Así mismo, cuando el número n de los valores de la variable hidráulica analizada sea grande, lo que tendrá lugar en aquellas zonas de actuación infraestructural compuestas por un número elevado de subunidades territoriales menores, resultarán poco manejables las tablas estadísticas que recojan todos los valores con sus correspondientes frecuencias. En tales casos, se agruparán los valores de la variable en "clases", que podrán ser de la misma o diferente amplitud; una norma práctica genérica pudiera ser el establecer una misma amplitud equivalente al 10% de la observación mayor, con lo que el número de clases oscilará alrededor de la decena. Cuando esto acontezca, el cálculo de la desviación típica necesaria para el hallazgo de los CV y de los pertinentes coeficientes de uniformidad registrará algo de error, debido, precisamente, al "error de agrupamiento" en clases. Para ajustarnos mejor a la realidad, se utilizará entonces la varianza corregida (*vide* también apartado 10), ofrecida por la denominada "corrección Sheppard", a saber: $\sigma_c^2 = \sigma^2 - c^2/12$, siendo c la amplitud del intervalo de clase escogido y σ^2 la varianza de los datos agrupados, y ello tendrá lugar en distribuciones continuas donde las "colas" van gradualmente convergiendo a 0 en ambas direcciones.

En líneas generales, veamos que un número excesivo de "clases" reduce las ventajas de la agrupación, pero también resulta cierto que un número escaso de ellas puede llegar a anular la significación de los datos. Respecto a la amplitud de las "clases" establecidas, conviene observar que, en general, es conveniente que sea la misma para todas; sin embargo, esto dependerá mucho de los propios datos y del objetivo final de la distribución territorial de la variable en estudio. En principio, si la distribución es más o menos uniforme, todas las "clases" serán de igual amplitud, y si, por el contrario, presenta grandes oscilaciones, puede ser interesante considerar intervalos de amplitud diferente.

De hecho, la construcción de una distribución numérica -como la mayoría de las que elaboraremos aquí- consta de tres etapas fundamentales, esto es: 1) determinar las "clases" con sus

intervalos más procedentes, tal como ya hemos expresado antes, en las que se han de agrupar los datos de la variable hidráulica en estudio, 2) clasificar (o distribuir) los datos en las clases apropiadas, y 3) contar el número de casos de cada clase. Como sea que las dos últimas etapas son puramente mecánicas, así como el establecimiento de la correspondiente “marca de clase” (obtenida normalmente, a falta de más datos, como la semisuma de los valores extremos del intervalo de clase), nos fijaremos sólo en la primera. Por esto, hace falta determinar el número de clases así como la amplitud del intervalo de los valores de la variable aleatoria estadística con la que trabajamos (radio hidráulico, longitud, caudal, presión, velocidad, pendiente, ...). Así pues, en términos generales, se pueden observar, al efecto, las siguientes normas:

- a) Pocas veces emplearemos menos de 6 ó más de 15 clases; el número exacto de las mismas dependerá de la naturaleza, cuantía e intervalo que cubren los datos.
- b) Siempre escogeremos las clases de manera que todos los datos queden comprendidos.
- c) Se procurará, siempre que sea posible, que todos los intervalos de clase tengan la misma amplitud, lo que obviará la determinación de las “densidades de frecuencia” -que determinan la altura de los rectángulos yuxtapuestos del histograma- para el cálculo de algunas medidas centrales de la correspondiente distribución de frecuencias (como la “moda”) o la representación gráfica de los histogramas.

Veamos, por último, que mediante el razonamiento que sirve para definir la “desviación típica o standard” como una medida de dispersión absoluta de los valores de la variable hidráulica, se puede afirmar que si este estadístico resulta pequeño, los valores se encuentran concentrados en el entorno de la media aritmética y, además, si la desviación típica es grande, los valores están mucho más esparcidos o dispersos en relación a los centrales. Para comprender este razonamiento sobre una base algo menos intuitiva, nos referiremos brevemente al importante *Teorema de Tchebyshev*, que expresa que **para cualquier clase de datos (ya se trate de poblaciones o muestras), al menos el 75% de los datos se encuentran sobre el intervalo que se extiende a cada lado de la media aritmética en dos veces el valor de la**

desviación típica ($\pm 2\sigma$). Según este teorema, también se puede afirmar que por lo menos el 88.8% de los datos se encuentran dentro del intervalo de tres veces ($\pm 3\sigma$) la desviación típica (a ambos lados de la media aritmética) y que al menos el 96% de los mismos se hallan comprendidos dentro del intervalo de amplitud de cinco veces la desviación típica ($\pm 5\sigma$).

Precisamente, una característica importante del teorema de Tchebyshev⁶ es que resulta válido para cualquier tipo de datos, incluidos los hidráulicos. No obstante, si se dispone de alguna información adicional en relación a la forma global de la distribución que estamos trabajando, también se pueden realizar afirmaciones mucho más estrictas. Por ejemplo, si una distribución es *campaniforme* o gaussiana, se puede esperar que aproximadamente el 95% de los datos (en lugar de al menos el 75%) se encuentren dentro del intervalo $\pm 2\sigma$ y el 99% de los datos (en lugar de al menos el 88.8%) se encuentran dentro del intervalo $\pm 3\sigma$. Estos porcentajes, en definitiva, corresponden a la llamada *distribución normal*, que es objeto de tratamiento en diversas partes de nuestro libro.

3.2.2. Forma de la distribución de frecuencias

También existen otras características de menor interés práctico, que tratan de precisar la *forma de la distribución* de la variable que se estudia en relación con una distribución normal. Así, la curva de Gauss sabemos que es simétrica respecto de la ordenada $x = \alpha$ (el parámetro α es la media aritmética o esperanza matemática de una distribución normal de frecuencias) y la distribución observada puede ser *asimétrica* o sesgada respecto a la ordenada correspondiente e, incluso, dicha asimetría puede representar una mayor área bajo la curva, a la derecha o a la izquierda de dicha ordenada; por otra parte, a la distribución observada puede corresponderle un área bajo la curva más achatada o más apuntada que la correspondiente área de una distribución normal; a tal característica la denominaremos *curtosis* o *medida de apuntamiento*.

Todas estas características, bien conocidas por otra parte, de una distribución de frecuencias, originan medidas exactas si están

⁶ Otra consecuencia derivada del teorema es que para cada distribución de media μ y desviación típica finita σ , al menos la mitad de sus valores se concentrarán en el intervalo $(\mu - \sqrt{2}\sigma, \mu + \sqrt{2}\sigma)$.

utilizando todos los posibles valores de la variable hidráulica, es decir, si corresponden a la población o universo de datos; pero un objetivo esencial de la Inferencia Estadística es el de estimar dichas características poblacionales a partir de una muestra o subconjunto poblacional suficientemente representativo, lo que en la planificación hidráulica sucederá sólo en casos muy concretos de zonas regables para las que se manejen grandes cantidades de datos de la variable en estudio (por ejemplo, el caudal de los emisores de un sistema de riego localizado de alta frecuencia, por goteo o por microaspersión).

En los casos mencionados, las características de la *distribución muestral* suelen ser, en general, los mejores *estimadores* de las características de la distribución de la población, pero las *estimaciones* que originan han de presentarse, como sabemos, acompañadas de los errores de muestreo y de otras medidas de naturaleza probabilística, que permitan apreciar el grado de confianza o fiabilidad de la correspondiente estimación de la característica poblacional, y que no procede analizar aquí con mayor profundidad por comprensibles razones de espacio.

3.2.3. Otros coeficientes de uniformidad hidráulica

Veamos, por último, que en base a los mismos o parecidos conceptos, sería posible la definición de otros coeficientes de uniformidad hidráulica. Y así, valga como ejemplo el que tendría en cuenta el valor del 1er y 3er cuartil de la distribución de frecuencias de la variable contemplada, a saber:

$$CU_5 = 100 \times \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}},$$

que, en el caso de una distribución moderadamente asimétrica (aproximadamente normal), ofrecerá un valor en función de Q_3 y de σ equivalente a:

$$Q_3 - Q_1 \approx 4\sigma/3 \quad ; \quad \text{esto es: } (Q_3 - Q_1)/Q_3 \approx 4\sigma/3Q_3 \approx 1 - Q_1/Q_3 \quad ; \quad \text{donde:}$$

$$\sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}} = \sqrt{1 - \frac{4\sigma}{3Q_3}}, \quad \text{con lo que también:}$$

$$CU_5 = 100 \cdot \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}} = \sqrt{10.000} \cdot \sqrt{1 - \frac{4\sigma}{3Q_3}} = \sqrt{10.000 - \frac{40.000 \cdot \sigma}{3Q_3}}$$

4. CONCEPTUALIZACIÓN DE UNA ZONA REGABLE POR ACEQUIAS A CIELO ABIERTO

4.1. LA ZONA REGABLE

En primer lugar, al objeto de clarificar algunos conceptos que puedan hacer más entendible el caso práctico que se desarrolla a continuación, conviene tener presente algunas definiciones de interés. A saber:

- “Zona regable”: Superficie que tiene derecho al uso de las aguas otorgadas por una concesión para riego.
- “Espacio hidráulico”: Tierras agrícolas con una fisiografía y pendientes adecuadas para ser dominadas, bien por gravedad o bien por técnicas de elevación, desde sistemas de riego con los que se articula. El “distrito de riego” sería la zona regable administrada por una comunidad de usuarios regantes.

Las inquietudes sociales con respecto al uso del agua como recurso cada vez más caro y escaso, y soporte de los ecosistemas, adquieren más relevancia cada día frente a los peligros que aventura el cambio climático. La evaluación de las zonas regables, en especial en todo lo referente al recurso hídrico, presenta, pues, un interés excepcional. Primeramente hay que llevar a cabo una evaluación integral de la zona regable; para ello se estudian diversos aspectos esenciales tales como el clima, suelo, agua, cultivos, infraestructuras existentes y la calidad del riego. Se introduce un estudio de indicadores medioambientales e impacto visual-paisajístico, así como un estudio socioeconómico. Complementariamente, la finalidad de dichos trabajos puede ser doble: por un lado estudiar la evolución de los niveles piezométricos del acuífero desde el que se abastece la zona regable (si éste es el caso) o, alternativamente, de la tensión hídrica inducida en los grandes sistemas de distribución superficial a causa de la detracción del agua, y por otro, la caracterización de dicha zona, a partir de las evaluaciones de riego en parcela y del sistema empleado de distribución del agua.

Por lo que se refiere a los aspectos estrictamente legales vigentes en España, veamos que en virtud de lo dispuesto en el art. 15 bis del Real Decreto 849/1986, de 11 de abril, por el que se aprueba el Reglamento del Dominio Público Hidráulico que desarrolla los títulos preliminar, I, IV, V, VI, VII y VIII del texto refundido de la Ley 29/1985, de 2 de agosto, de Aguas (publicada en el BOE nº: 189, de 8 de agosto), aprobado por el Real Decreto Legislativo 1/2001, de 20 de julio, se tiene lo siguiente:

“w) *Superficie con derecho a riego*: cantidad máxima de superficie que puede regarse anualmente en virtud del título habilitante; esta cantidad será siempre menor o igual a la superficie regable.

x) *Superficie regable*: extensión de terreno constituido por una o varias parcelas en las que se puede ejercer el derecho a riego establecido en la concesión y que incluye las superficies que, alternativa o sucesivamente, se pueden regar o el perímetro máximo de superficie dentro del cual el concesionario podrá regar unas superficies u otras.”

En un proceso normal, la Comunidad de Usuarios tiene que tramitar el correspondiente procedimiento de licitación y adjudicación de las obras e instalaciones contempladas en el proyecto de modernización de la zona regable, así como garantizar la plena disposición de los terrenos a la empresa adjudicataria de las obras antes del inicio de su ejecución. Además, debe cumplir con las consignaciones presupuestarias establecidas y las condiciones exigibles para el pago de las subvenciones procedentes.

La ampliación de la superficie regable autorizada está considerada como una infracción por el Real Decreto Legislativo 1/2001, de 20 de julio, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Aguas (BOE nº: 176, de 24/07/2001). En este sentido, dispone el artículo 116, que son acciones constitutivas de infracción, “c) El incumplimiento de las condiciones impuestas en las concesiones y autorizaciones administrativas a que se refiere esta Ley, sin perjuicio de su caducidad, revocación o suspensión.” A su vez, con fecha 6 de junio de 2003 se publicó el Real Decreto 606/2003, de 23 de mayo, por el que se modificó el citado R.D. 849/1986 mediante el cambio del contrato de cesión de derechos al uso privativo de las aguas públicas y regulando, así mismo, la forma de tramitar e inscribir las correspondientes concesiones administrativas.

4.2. LAS ACEQUIAS DE RIEGO

4.2.1. Concepto

Una acequia (del árabe hispano “assáqya”, y éste del árabe clásico «alsāqiyah», *irrigadora*) es una zanja o canal a cielo abierto construido para el regadío, abastecimiento urbano, industrial o similares fines. Frecuentemente, se revisten de hormigón *in situ* o bien a base de piezas prefabricadas. Con especial desarrollo en la cultura árabe, estas construcciones tienen afinidades de uso con los acueductos romanos, si bien su empleo principal es el riego de huertos, plantaciones o explotaciones agrarias, aprovechando la orografía del terreno de las zonas regables, preferentemente planas, para la distribución y conducción del agua, formando una vasta red de ramales secundarios y terciarios a partir de la acequia principal o canal. En función de la orografía del terreno pueden ir excavadas en el suelo o sobreelevadas, protegidas en este último caso por sendas paredes de contención o "cajeros" que encauzan el agua e impiden su dispersión.

4.2.2. Problemática de la red de riego con cauces terrizos

Con el fin de adentrarnos más eficazmente en la problemática que plantea una red de acequias térreas, analizaremos, en principio, las deficiencias principales de dicha red de riego existente, que pueden concretarse en las tres siguientes:

1^a. *Secciones insuficientes e inadecuadas de las acequias de riego.*

Debe tenerse presente, al enfocar el problema en cuestión, que las acequias fueron proyectadas en su día para el riego de determinadas extensiones de tierra. Posteriormente, al aumentar la superficie regada, como consecuencia (por ejemplo) de la puesta en cultivo de terrenos yermos o pantanosos, las secciones de algunos cauces resultan después insuficientes.

2^a. *Paredes y fondo de tierra.*

Sus consecuencias más importantes se exponen a continuación:

a) Pérdidas de agua:

Considerando que una buena parte de los terrenos atravesados por las acequias de riego pueden ser de textura arenosa y, consecuentemente, de elevada permeabilidad y escasa compactación, el agua de las mismas se pierde por percolación hacia las capas profundas del subsuelo. La localización y cuantificación de las pérdidas de la red de riego, por ejemplo, pueden ser objeto de un estudio por diversas empresas u organismos como el prestigioso Centro de Estudios Hidrográficos del CEDEX⁷, mediante la utilización de trazadores radioactivos. Los resultados de este tipo de estudios muestran, en fin, que las pérdidas por filtración, en las distintas acequias térreas de algunas zonas regables, pueden oscilar entre el 0 y el 90%, valores que hacen insostenible, con frecuencia, la explotación.

⁷ El Centro de Estudios Hidrográficos es uno de los órganos en los que se estructura el Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas (CEDEX), integrado actualmente en el Ministerio para la Transición Ecológica. De acuerdo con el Estatuto del CEDEX, el Centro de Estudios Hidrográficos tiene las siguientes funciones, en el ámbito de las aguas continentales y sus infraestructuras naturales o artificiales:

- Realizar actividades de obtención, investigación, experimentación y gestión de datos relativos a recursos y fenómenos de la naturaleza.
- Definir, diseñar, mejorar y, en su caso, evaluar y certificar las características de los materiales, elementos, técnicas, métodos y sistemas, así como fomentar su normalización.
- Proponer, estudiar y elaborar, directamente o en colaboración, reglamentaciones, normas y, en general, cualquier clase de especificaciones técnicas.
- Desarrollar proyectos de investigación, desarrollo tecnológico e innovación, teniendo en cuenta las directrices contenidas en los planes europeos y nacionales y en los programas a los que se refiere el apartado anterior o a iniciativa propia.
- Prestar asistencia técnica especializada tanto al sector público como al privado, con atención prioritaria a los departamentos ministeriales de los que depende funcionalmente.
- Difundir y transferir la tecnología española en los ámbitos nacional e internacional, realizando publicaciones, talleres, jornadas, seminarios, simposios y cursos, así como mediante la creación y el mantenimiento de portales temáticos de información a través de redes de comunicación.
- Colaborar y fomentar la colaboración con otros órganos de las administraciones públicas y con instituciones nacionales e internacionales en actividades de asistencia técnica, experimentación, investigación, desarrollo tecnológico e innovación y transferencia de tecnología.
- Dictar laudos arbitrales en casos litigiosos, cuando oficialmente sea requerido para ello.

b) Elevado coste de mantenimiento:

En las acequias se producen aterramientos cuya limpieza es preciso efectuar anualmente, así como el desbroce o eliminación de las numerosas plantas acuáticas que proliferan en los cauces terrizos. Estas limpiezas, cuya realización manual y/o mecánica impide el uso de dichos cauces mientras duran las labores pertinentes, representan una parte considerable del canon anual de riego de la correspondiente Comunidad de Usuarios.

c) Roturas en los cauces:

Consisten, principalmente, en desprendimientos de taludes por descalce de los mismos. Sus reparaciones son, así mismo, costosas y de difícil ejecución, pues deben ser realizadas en el breve período de parada de riego. Por si fuera poco, este problema puede agravarse extraordinariamente en algunos casos, ya que al prescindir del riego continuo día y noche, y al establecerse turnos de riego, el caudal de las acequias tendrá un régimen irregular, y las oscilaciones del nivel de la lámina de agua facilitarán, obviamente, el desprendimiento de los taludes.

3^a. *Otras deficiencias.*

Algunas zonas regables, establecidas en zonas marismáticas o pantanosas, riegan con aguas procedentes de los desagües, ya sea mediante elevaciones electromecánicas o bien previa la colocación, en aquellos desagües, de unas ciertas retenciones o “reparos” que elevan el nivel del agua, aguas arriba de los mismos, con el fin de poder captar por gravedad el agua para riego. Este sistema, que ya actualmente dificulta el buen funcionamiento del desagüe, resultará inadmisibile en aquellas zonas que sean de humedales, puesto que los desagües llevarán aguas freáticas cargadas de sales procedentes de la red de drenaje que resultan decididamente perniciosas para los cultivos.

Por otra parte, esta interposición de obstáculos a la libre circulación del agua, con el fin de elevar su nivel y permitir su accesibilidad a todos los puntos de las parcelas a regar, también se viene realizando, actualmente, en muchas zonas regables a base de acequias terrizas, con todos los graves perjuicios que ello comporta para los regantes y los propios servicios de mantenimiento de la Comunidad de Usuarios.

4.2.3. Utilidad de los revestimientos

La transformación ocurrida durante las últimas décadas en el sector agrícola español y latinoamericano no habría sido posible sin la adecuada modernización de sus regadíos. En este contexto, los elementos prefabricados de hormigón, especialmente las acequias y sus accesorios (losas de paso, arquetas, compuertas, ...) han sido las piezas clave de esta mejora continua. Desde el punto de vista de las propiedades hidráulicas de una conducción a cielo abierto como las que aquí hemos ejemplificado, la sección más conveniente es aquella que con un área, pendiente y rugosidad de las paredes dadas, posee una capacidad de transporte máxima (sección de máximo rendimiento o radio hidráulico). De entre todas las figuras geométricas, el círculo es el que tiene menor perímetro o contorno mojado para un área dada, por lo que una acequia semicircular conducirá más agua que cualquier otra forma de sección, a igualdad de los otros 3 factores antedichos, aunque en la práctica las secciones transversales empleadas también pueden ser rectangulares, trapeciales, parabólicas u otras.

Se trata de elementos prefabricados imprescindibles en la canalización de agua para los riegos por gravedad. Con frecuencia, su traza en planta se corresponde con la ya existente de la primigenia acequia térrea, por lo que su instalación no supone la necesidad de efectuar nuevas afectaciones al entorno o a la propiedad. En la mayoría de los regadíos modernos, su diseño de piezas machihembradas permite un rápido y sencillo montaje en su lugar de uso, consiguiendo un perfecto ensamblaje que resulta preciso para el logro de su estanqueidad y alineación (ver Anexo 2). Estas piezas se pueden cubrir, en caso necesario, tanto con reja de fundición dúctil como con losa de hormigón armado.

La imposibilidad material de ensanchar el cauce terrizo en diversos sectores de las acequias estudiadas, o de aumentar su calado y pendientes de solera, plantea a la Comunidad de Usuarios, previo el estudio de todas las soluciones posibles (nuevos bombeos, derivaciones de otras acequias o desagües, etc.) la necesidad ineludible de su revestimiento, con el fin de permitir el paso de un mayor caudal de agua, mediante el empleo de las pendientes más adecuadas y la disminución de las pérdidas de carga y filtraciones.

Ahora bien, debe tenerse presente que la efectividad de estos revestimientos (o alternativamente el establecimiento de nuevas

acequias prefabricadas elevadas sobre muretes o pilares) está en función directa -aparte de la mejora implícita e inmediata que ello ya supone- del mantenimiento de cotas taquimétricas concretas de agua en las acequias principales, de manera constante y regular, a lo largo de toda la campaña de riego.

4.2.4. Las ventajas aportadas por el revestimiento

Puede afirmarse que de los tres grandes grupos de deficiencias citados en el expositivo anterior, es el segundo de ellos (“Paredes y fondo de tierra”) el que resulta básicamente soslayado por el establecimiento de las acequias prefabricadas.

En efecto, amén de reducirse o anularse en la práctica las pérdidas de agua en las acequias que nos ocupan, de facilitar la natural circulación del agua mediante la supresión de los obstáculos que actualmente se oponen a ella (acueductos, puentes antiguos...), de disminuir notoriamente el coste de mantenimiento y conservación de sus cauces y salvar las numerosas dificultades, de todo tipo, que plantea la rotura de los mismos, el revestimiento de las acequias a cielo abierto proporcionará, a plazos diversos, las siguientes ventajas de orden técnico:

A) *Elevación de la rasante de la solera del cauce*, lo que implica, por una parte, una mayor accesibilidad del agua de riego desde cualquier punto de las parcelas, y por otra, una mayor facilidad para los cambios futuros de cultivo que exijan modificar la pendiente de los terrenos agrícolas.

B) *Consecución de un mayor caudal para el riego de los terrenos*, puesto que la sección revestida permite el paso de un mayor caudal (volumen de agua por unidad de tiempo), al reducir notablemente las pérdidas de carga por rozamiento. Con todo ello, los terrenos en cuestión podrán ser atendidos con un menor número de horas, y con un módulo de riego muy superior al actual.

C) *Las nuevas secciones serán menores que las actuales*, a igualdad de requerimientos superficiales a servir y de tipos de cultivo, con lo que el aprovechamiento de los predios y caminos mejorará. Por otra parte, los malecones existentes entre acequia de riego y desagüe podrán ser cómodamente ampliados y reforzados, con las ventajas que ello reporta para los gastos de la Comunidad de Usuarios en su gravoso capítulo de conservación de desagües.

D) *El riego podrá realizarse por sectores*, especialmente en las zonas de huerta y árboles frutales, dado que las acequias revestidas permiten, mediante compuertas y cierres transversales de obra previstos, el suministro de agua a aquellas parcelas o subzonas que así lo exijan, sin necesidad de prolongar el riego más allá de la parcela en cuestión. Simultáneamente, y en dichas subzonas, el revestimiento atenderá las necesidades de riego de cultivos especialmente necesitados por su estacionalidad, como son los hortofrutícolas, de modo que experimenten mínimamente los efectos oscilatorios del caudal, así como las pérdidas de agua por filtraciones en el terreno.

E) *No se produce elevación en la cota ni reducción en la carga hidráulica de la toma de las acequias principales*, con lo que la efectividad del riego por el cauce revestido tiene lugar independientemente de la posible elevación o disminución de la solera de los grandes cauces que puedan modificarse en un futuro.

F) *Las tomas o compuertas de derivación del agua a las parcelas resultarán perfeccionadas con el revestimiento*, puesto que gozarán de unidad y estanqueidad con los paramentos proyectados, cosa que no sucede, actualmente, con los cauces terrizos, en los que las pérdidas por filtraciones son importantes, llegando a constituir, en algunos casos, y por añadidura, serios problemas de consolidación en los caminos colindantes.

G) *Permite, de cara al futuro, efectuar el estudio y comprobación empírica de los nuevos sistemas constructivos*, análisis de las pendientes y secciones más adecuadas, verificación de la resistencia, calidad y adaptación de los materiales y mecanismos empleados, etc.

H) *Permite la implantación de un sistema computerizado para el control de la red hidráulica*, consistente en una estructura que aplica el concepto de “inteligencia distribuida”, utilizando terminales remotos microprogramados comunicados mediante una línea compartida o “wifi” con un Centro de Control dotado del adecuado sistema informático. Tal estructura está concebida para el control de redes hidráulicas de abastecimiento y regadíos en las que la dispersión geográfica de los diferentes órganos de la red es importante respecto de la localización del expresado Centro de Control, que puede ubicarse en las propias oficinas centrales de la Comunidad de Usuarios.

5. EJEMPLO PRÁCTICO. DATOS Y ENFOQUE DEL PROBLEMA

Sea una gran zona regable geográficamente determinada, constituida por 1000 acequias de riego prefabricadas de hormigón armado a cielo abierto y secciones semicirculares y parabólicas, de las que conocemos el correspondiente caudal, expresado en litros/segundo (l/s), siendo precisamente esta variable hidráulica la que será analizada desde el punto de vista de su uniformidad espacial. El riego se realiza por turnos, organizado a través de la correspondiente Comunidad de Regantes. Los valores de esta variable hidráulica se hallan agrupadas en ocho "clases" de la misma amplitud, concretamente: 5 l/s, constituyéndose la primera y última clases de la tabla en "intervalos abiertos", ya que no se han fijado el extremo inferior de la primera y el extremo superior de la última, que corresponderían, respectivamente, a los caudales más bajo y más alto de las acequias de la zona regable en cuestión. Se desea establecer un modelo estadístico de distribución espacial de dichas conducciones, averiguando los diferentes coeficientes de uniformidad hidráulica, "normalizando" la distribución, obteniendo las medidas centrales y de dispersión así como las restantes características estadísticas de interés.

La tabla resultante del muestreo realizado (ver el posterior epígrafe 8.3.1), con un tamaño exigible de la muestra de 220 acequias, se presenta a continuación, habiendo considerado un número de intervalos de clase según el criterio de Sturges (1926), a saber:

$$K = 1 + 3.322 \cdot \log n' = 1 + 3.322 \times \log 220 = 1 + 7.78 = 8.78 \sim 9 \text{ intervalos,}$$

aunque por razones de simplicidad se han adoptado, finalmente, los 8 que figuran en la tabla 1. Entonces, la amplitud de cada intervalo vendrá dada por el cociente entre el recorrido o rango entre las marcas de clase extremas de la distribución de frecuencias (calculado en el posterior epígrafe 7.2) y dicho número de intervalos de clase, redondeando, en su caso, al número entero superior más cercano, con lo que:

$$c = R/K = 35/8 = 4.375 \rightarrow 5 \text{ l/s.}$$

Tabla 1. Frecuencias de la distribución de caudales.

CAUDALES (Q)							
Q (litros / segundo)	f. simple n_i	f. acumul. ascen. $N_i\uparrow$	f. acumul. descen. $N_i\downarrow$	f. simple f_i	f. acumul. ascen. $F_i\uparrow$	f. acumul. descen. $F_i\downarrow$	
Menos de 150	3	3	997	0.003	0.003	0.997	
De 150 a 155	15	18	982	0.015	0.018	0.982	
De 155 a 160	50	68	932	0.050	0.068	0.932	
De 160 a 165	240	308	692	0.240	0.308	0.692	
De 165 a 170	312	620	380	0.312	0.620	0.380	
De 170 a 175	235	855	145	0.235	0.855	0.145	
De 175 a 180	108	963	37	0.108	0.963	0.037	
De 180 y más	37	1000	0	0.037	1.000	0.000	
TOTAL	1000	1000	1000	1.000	1.000	1.000	

Fuente: elaboración propia.

Para interpretar correctamente dicha tabla, deben formularse las siguientes observaciones:

a) La columna de las frecuencias simples, encabezada por n_i , $\forall i \in (1, 2, \dots, 8)$, recoge la *frecuencia absoluta* de cada uno de los ocho *intervalos de clase*; así, 240 es el número de acequias cuyo caudal está comprendido entre 160 (inclusive) y 165 l/s. La *frecuencia total* toma el valor $n = 1000$ acequias.

b) Las *frecuencias acumuladas ascendentes* las hemos designado por la notación $N_i\uparrow$ ($\forall i = 1, 2, \dots, 8$) y a cada una de ellas corresponde el número de acequias de caudal o gasto inferior al extremo superior de la clase; de este modo, $N_4\uparrow = 308$, significa que se han hallado (o proyectado) 308 acequias con un caudal inferior a 165 l/s.

c) Las *frecuencias relativas ordinarias y acumuladas encabezadas*, respectivamente, por f_i , $F_i\uparrow$ y $F_i\downarrow$ vienen determinadas por el cociente de dividir la correspondiente frecuencia absoluta o acumulada (ascendente o descendente) por la frecuencia total. Así, en el 4º intervalo de clase:

$$f_4 = 240/1000 = 0.240, F_4\uparrow = 308/1000 = 0.308, \text{ y} \\ F_4\downarrow = 692/1000 = 0.692 .$$

La suma de las frecuencias relativas ordinarias así como la última frecuencia relativa acumulada ascendente han de ser siempre iguales a la unidad, puesto que representan la probabilidad total.

d) La representación gráfica de una tabla de frecuencias ordinarias (absolutas o relativas), cuando la variable es continua (como es el caso de las variables hidráulicas, que pueden tomar valores entre dos consecutivos) está distribuida en clases -como las de la tabla 1-, debe realizarse mediante un *histograma de rectángulos yuxtapuestos* (ver fig. 4), que se construye tomando como abscisas los extremos de los intervalos de clase y levantando sobre cada intervalo, tomado como base, un rectángulo cuya área sea directamente proporcional a la correspondiente frecuencia (absoluta o relativa).

e) Si los intervalos son de la misma amplitud c (caso de la tabla núm. 1, que van de 5 en 5 l/s según hemos establecido), la altura de cada rectángulo es proporcional a la correspondiente frecuencia. En nuestra figura se ha supuesto que el extremo inferior de la variable es 145 y el superior 185 l/s, aunque, de hecho, los extremos inferior y superior, respectivamente, del campo de existencia de la misma son de 120 y 208 l/s, correspondientes a las acequias de caudal mínimo y máximo de todas ellas.

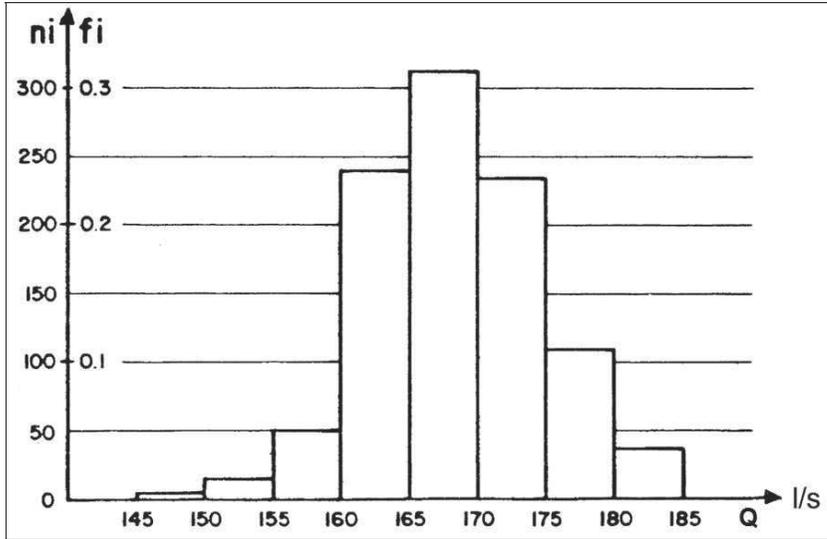


Fig. 4. Histograma de rectángulos yuxtapuestos.

f) La representación gráfica de una tabla de frecuencias acumuladas, cuando la variable continua se ha distribuido en intervalos de clase (figura 5), se obtiene mediante un **polígono de frecuencias, ojiva o diagrama acumulativo ascendente**, que consiste en unir mediante una línea poligonal los puntos cuyas abscisas son los extremos superiores de cada intervalo de clase (150, 155, 160, etc., en nuestro ejemplo) y cuyas ordenadas son las correspondientes frecuencias acumuladas.

En la figura siguiente 5, para un valor cualquiera de la variable hidráulica en estudio Q , la ordenada correspondiente representa el número (absoluto o relativo) de conducciones que tienen su caudal inferior o dicho valor de Q . El diagrama suele partir de un punto de ordenada cero cuya abscisa es el extremo inferior de la tabla en cuestión (en nuestro ejemplo, hemos tomado para dicho extremo la abscisa $Q = 145 > 120$); a partir del extremo superior de la tabla ($185 < 208$ l/s, en nuestro caso) la línea es una recta paralela al eje de abscisas, cuya altura constante es igual a la frecuencia total (o sea, $n = 1000$ acequias de riego, en el problema cuya resolución afrontamos).

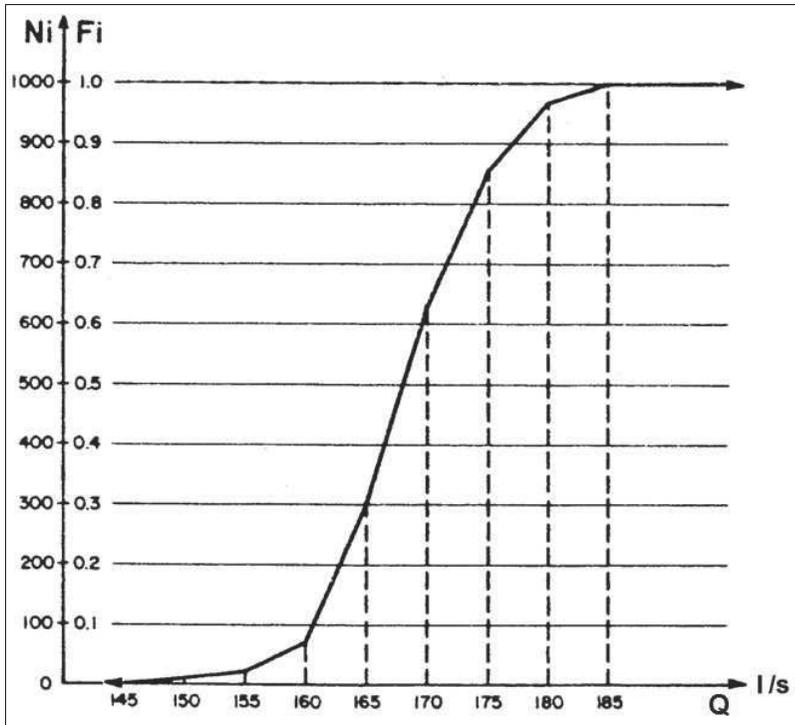


Fig. 5. Diagrama acumulativo ascendente de los caudales.

La composición de las figuras anteriores 4 y 5 constituye el denominado "diagrama de Pareto".

6. "NORMALIZACIÓN" DEL PROBLEMA

Una variable aleatoria que se distribuya con la función de densidad que ya hemos relacionado en otras partes de esta misma obra, recibe el nombre de *normal* debido a que la distribución binomial, considerada en su caso límite, es la que corresponde corrientemente o habitualmente a la mayor parte de las variables empíricas, entre ellas las hidráulicas.

Desde luego, entre las muchas distribuciones continuas que se utilizan en Estadística y que pueden tener provechosas aplicaciones en el estudio de las variables hidráulicas, tal como vemos en este mismo capítulo de nuestra investigación, la *curva normal* o *distribución normal* es, con mucho, la más importante de

ellas. Su estudio data de algunas investigaciones sobre la naturaleza de los errores experimentales, llevadas a cabo en el siglo XVIII. Se observaba entonces que las discrepancias existentes entre las medidas repetidas de la misma cantidad física mostraban un sorprendente grado de regularidad; sus aspectos (distribución), según se encontró, podían aproximarse muy bien mediante un cierto tipo de curva de distribución continua, denominada “curva normal de errores” y atribuida a las leyes del azar. Las propiedades matemáticas de este tipo de curva de distribución continua y su base teórica fueron investigadas, por primera vez, por Abraham de Moivre (1667-1745), Pierre Laplace (1749-1827) y Karl Gauss (1777-1855). Este último fue un gran matemático alemán que, con sus brillantes aportaciones sobre las geometrías no euclidianas, hizo posible la aparición de las ciencias formales.

La importancia de la distribución normal radica, en primer lugar, en que son muy numerosas las variables aleatorias que la siguen, resultando adecuada para describir la distribución de muchos conjuntos de datos⁸. En efecto, numerosas medidas físicas (como las hidráulicas), datos meteorológicos, características biológicas, variables económicas y sociales, etc., siguen la ley normal, así como también aparece en muchas investigaciones teóricas. En segundo lugar, como consecuencia del teorema del límite central, que establece que la suma de un número elevado de variables aleatorias converge a una distribución normal, sea cual sea la distribución de estas variables. Además, en ciertas condiciones, las distribuciones discretas pueden ser substituidas por distribuciones normales, lo que simplifica notablemente los cálculos correspondientes. Hay que tener mucho cuidado, en fin, al suponer que un determinado conjunto de observaciones se puede aproximar por una distribución normal, pues será necesario realizar una comprobación previa.

Como se sabe, la curva normal tiene forma de campana extendida indefinidamente en ambas direcciones, positiva y negativa, siendo asintótica en relación al eje de abscisas. Rara vez

⁸ La importancia de esta distribución estriba en que permite modelar numerosos fenómenos naturales, sociales e ingenieriles. Mientras que los mecanismos que subyacen a gran parte de este tipo de fenómenos son desconocidos, por la enorme cantidad de variables incontrolables que en ellos intervienen, el uso del modelo normal puede justificarse asumiendo que cada observación se obtiene como la suma de unas pocas causas independientes. De hecho, la estadística descriptiva sólo permite describir un fenómeno, sin explicación alguna. Para la explicación causal es preciso el *diseño experimental*, de ahí que al uso de la estadística, en algunos casos, sea conocido como *método correlacional*.

es necesario extender las colas de la curva normal muy lejos de la media, porque el área comprendida bajo la curva y el eje horizontal que queda a más de cuatro o cinco desviaciones típicas de la media aritmética o esperanza matemática resulta insignificante para la mayoría de los fines prácticos y, entre ellos, los propios de la Hidráulica o la Hidrología. Debe tenerse en cuenta que no todas las distribuciones acampanadas simétricas en relación al eje de ordenadas son distribuciones normales, y las palabras *distribución normal* refiérense al hecho de que el área bajo la curva se distribuye de una manera determinada.

Una importante propiedad de la curva normal es que está completamente determinada por su media y su desviación típica. Es decir, la ecuación matemática de dicha curva es tal que se puede determinar el área existente bajo la curva entre dos puntos cualesquiera del eje horizontal si se conoce el valor que adoptan ambos parámetros, aunque en la práctica dichas áreas se obtienen valiéndose de tablas especiales elaboradas al efecto, como las que se adjuntan en el Anexo 1 de nuestro trabajo. Por otra parte, la probabilidad o frecuencia relativa con que una variable hidráulica tomará valores entre dos puntos es el área existente bajo la curva comprendida entre los dos puntos del eje horizontal.

Si se representa gráficamente esta función (Fig. 6), encontraremos que está definida para todos los valores de $x = Q$ (desde $-\infty$ hasta $+\infty$) y con las siguientes propiedades:

- a) Solamente existe la curva para valores positivos de las ordenadas.
- b) El eje de abscisas OX es una asíntota horizontal de la curva.
- c) Existe un máximo para el punto $x = \alpha$. En la curva teórica, dicha abscisa se corresponde con los valores de la media aritmética o esperanza matemática, la moda y la mediana.
- d) Es creciente hasta el máximo y después es decreciente.
- e) Existen dos puntos de inflexión: para los valores $x = \alpha - \sigma$ y para $x = \alpha + \sigma$.
- f) Es cóncava hacia la región positiva del eje OY , para los intervalos $-\infty < x < \alpha - \sigma$ y para $\alpha + \sigma < x < +\infty$ y cóncava hacia la región negativa del eje de ordenadas en el intervalo: $\alpha - \sigma < x < \alpha + \sigma$.

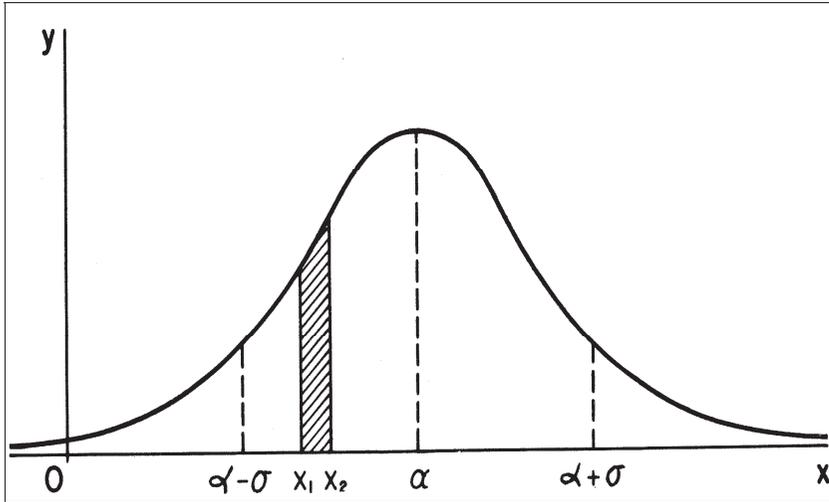


Fig. 6. Área bajo la curva normal entre los puntos x_1 y x_2 .

Dentro de la ley normal los valores más próximos a α son más frecuentes que los más alejados de α . La utilización e interpretación de esta función para Gauss puede verse a través de un ejemplo como el siguiente: supongamos que se efectúan 1000 mediciones del caudal de una misma acequia, cuyo caudal verdadero es de 168 l/s; en el caso que nos ocupa se dice que $\alpha = 168$ l/s. Las medidas efectuadas se acumularán en mayor proporción alrededor de α cuanto más próximas estén a dicho valor y serán menos frecuentes cuanto más alejadas se encuentren de α .

El parámetro σ está relacionado con la precisión de las mediciones realizadas al medir el parámetro α . Si se hace igual a la unidad el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas y se supone que los caudales medidos que han estado comprendidos entre los valores x_1 y x_2 representan el diez por ciento de las 1000 mediciones realizadas, el área rayada en trapezoid mixtilíneo de la fig. 6 debe ser igual a 0.10. También sabemos, hoy en día, que el área comprendida entre la curva, el eje de abscisas y las ordenadas $x = \alpha - \sigma$ y $x = \alpha + \sigma$ corresponde, aproximadamente, al 64 por ciento del área total. Por lo tanto, ya tenemos un significado del hasta ahora desconocido parámetro σ : cuanto menor sea el valor de σ (que se denomina *desviación típica* o *standard* en la terminología estadística) serán de menor cuantía los errores que se cometen al medir el caudal α ; es decir, si el aparato de medir caudales (por

ejemplo, un rotámetro o un molinete Woltmann, o bien su reformado como molinete de Ertel) es más perfecto o si es más hábil la persona encargada de medirlos, σ será un número menor que en el caso contrario.

La función de densidad normal o la función de distribución normal son dos modelos matemáticos inspirados por la conocida “ley de los errores” o ley de Gauss. Pues bien, la Estadística ha incorporado a su metodología –como un modelo probabilístico esencial– esta ley de Gauss con el nombre de *función de densidad normal*. Si $y = f(x)$ es dicha función de densidad, se puede definir a partir de ella la denominada *función de distribución normal* $F(x)$, tal

que: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) \cdot dx$, y dicha integral impropia de primera especie

significa que a cada valor de x corresponde un número $F(x)$ determinado por la probabilidad de que la variable (“caudal”, en nuestro ejemplo) tome un valor menor o igual a $x = Q$. Las áreas comprendidas bajo la curva normal y el eje de abscisas representan probabilidades. En estas condiciones, la probabilidad de que la variable x (en nuestro caso se trata del caudal de la acequia Q) tome un valor comprendido entre x_1 y x_2 , vendría dada de la siguiente forma, aplicando la propiedad de la aditividad del intervalo de integración⁹:

$$\begin{aligned} P_r(x_1 < x \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x) \cdot dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x) \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} \times dx = \frac{1}{6.36 \times \sqrt{2\pi}} \times \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-168.325)^2}{2 \times 6.36^2}} \times dx = \\ &= 0.063 \times \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-168.325)^2}{80.9}} \times dx = [-0.5021811 \operatorname{erfi}(18.7143 - 0.11118x)]_{x_1}^{x_2}, \end{aligned}$$

es decir, como la última integral expresada permite conocer el área rayada de la fig. 6, dicha área representa la probabilidad de que la variable $x = Q$ (que en el Cálculo de Probabilidades es una *variable aleatoria* o *estocástica*, en lugar de una *variable estadística*) tome un valor comprendido entre $x_1 = Q_1$ y $x_2 = Q_2$.

⁹ La función error “erfi” (también conocida como *función error de Gauss*) es una función especial (no elemental) que se utiliza en el campo de la probabilidad, la estadística y las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. El nombre y la abreviación de la función error (y la función error complementaria) fueron desarrolladas por el matemático inglés J. W. L. Glaisher en el año 1871 debido a que ésta guardaba gran conexión con la teoría de las probabilidades y, sobre todo, con la teoría de los errores.

En el caso de que la tabla anterior correspondiera a 1000 mediciones distintas de un mismo caudal (en lugar de corresponder a los caudales medidos en 1000 acequias distintas), la distribución de frecuencias determinada por las columnas encabezadas por "litros/segundo" y por "f_i" presentaría una *imagen empírica* de una función de densidad normal. Si los resultados se hubieran obtenido a partir del modelo matemático, en lugar de constituir una observación de la realidad, para: $x_1 = 165$ y $x_2 = 170$, se tendría que:

$$\int_{165}^{170} f(x) \cdot dx = 0.312 .$$

Conocidas la media y la desviación típica, se pueden tabular las áreas comprendidas bajo la curva normal. En realidad, para el valor $\alpha = 168.325$ l/s (media aritmética o esperanza matemática de aquella distribución de frecuencias) y para $\sigma = 6.36$ l/s (desviación típica) se tiene que:

$$\int_{165}^{170} f(x) \cdot dx = 0.303 ,$$

cuya diferencia: $0.312 - 0.303 = 0.009$ es una medida de la discrepancia absoluta (relativa < 3%) existente entre la realidad y el modelo teórico que ha sido considerado y para la clase particular "caudal de 165 a 170 l/s".

Las áreas comprendidas entre menos infinito y Q son los valores de la función de distribución para cada valor de la variable hidráulica Q . De la misma manera, la distribución de frecuencias determinada por la primera columna de la tabla 1 y la encabezada por $F_i \hat{=}$, constituyen una *imagen empírica de la función de distribución normal* que venimos considerando. En este caso, los resultados empírico y teórico, para $Q = 170$ l/s, serían, respectivamente:

$$F_5 \hat{=} = 0.620 , \text{ y también: } \int_{-\infty}^{170} f(x) \cdot dx = 0.622 ,$$

que implicarían una discrepancia absoluta de 0.002 y relativa del 0.32% entre el valor teórico y el correspondiente valor observado, que resulta ser francamente baja.

7. CARACTERÍSTICAS DE LA DISTRIBUCIÓN ESPACIAL

7.1. MEDIDAS CENTRALES O PROMEDIOS

Es necesario, con frecuencia, representar un conjunto de datos hidráulicos mediante un solo número que, de tal suerte, se vuelve descriptivo del conjunto entero; el tipo de número escogido dependerá de la característica particular del conjunto que se desee describir. En este apartado de nuestro estudio, se tratará de las denominadas *medidas de situación central*. Por lo que se refiere a la caracterización del valor central de la distribución de las variables hidráulicas, veamos que G. Udny Yule¹⁰ (Alcaide, 1973), estadístico inglés, en su "Introducción a la Teoría de la Estadística", ha precisado las condiciones que debe cumplir también una buena caracterización del valor central de una serie de medidas hidráulicas.

En resumen, son las siguientes:

a) *La característica del valor central debe ser definida objetivamente a partir de los datos de la serie, sin que haya lugar a intervenir ninguna apreciación subjetiva del estadístico.*

b) *Debe depender de todas las observaciones de la serie, a ser posible.* Señalemos que, no obstante, hay veces que se plantea el problema de decidir si debe tenerse en cuenta una observación ("outlier") que es notablemente distinta de todas las demás de su conjunto o bien si puede ser rechazada por considerarse que tal observación tiene carácter excepcional debido a algún factor extraño a la serie como, por ejemplo, un error de observación o de medida. En este sentido, recomendamos la aplicación de los denominados "métodos robustos", tal como se propugna en otros apartados de la presente obra.

¹⁰ George Udny Yule, inglés con estudios de ingeniería y física, fue un colaborador de Pearson, que hizo algunos aportes a la obra de este último. Trabajó en correlación, y también en curvas asimétricas, como su predecesor. Colaboró en la publicación de Pearson, proporcionando un ejemplo de la aplicación de ajuste de una curva asimétrica a datos sobre distribución de la pobreza en Inglaterra y Gales. Pero luego se movió en direcciones independientes. Relacionó la regresión con el método de los mínimos cuadrados, proporcionando un gran conjunto de algoritmos que habían desarrollado los astrónomos, para la solución de las ecuaciones normales, asociadas al cálculo de la regresión. Los trabajos publicados por Yule cubren hasta la primera década del siglo XX.

c) *Debe tener, en la medida de lo posible, una significación concreta, sencilla y fácil de comprender.* Si se tiene en cuenta que muchos de los valores centrales de las series han de ser utilizados por personas poco familiarizadas con la Estadística, se comprende la preferencia que en la realidad se ha dado a la media aritmética como característica del valor central de que goza esta propiedad, de una interpretación sencilla.

d) *Debe ser de cálculo fácil y rápido,* aunque las modernas herramientas de cálculo que proporciona la Informática, aún con un número elevado de datos a procesar, hacen bastante más innecesaria esta condición.

e) *Debe ser poco sensible a las fluctuaciones del muestreo.* Frecuentemente las observaciones se efectúan, no sobre el conjunto completo o “universo” de elementos a estudiar, sino sobre una parte de éstos que recibe el nombre de “muestra”, que debe ser suficientemente representativa de dicho “universo” o “población” y tener el tamaño adecuado. La presente consideración resulta particularmente interesante en el caso del estudio de un número determinado de caudales de acequias referido al conjunto de la zona regable. Las observaciones hechas sobre los elementos componentes de la muestra constituyen la serie estadística de la cual se determina el valor central. Es evidente que “a priori” no puede asegurarse que el valor central correspondiente a la muestra adoptada coincida con el valor central que se obtendría si se hiciese una serie estadística que abarcase todo el conjunto completo de elementos a estudiar, ni que coincidan siquiera con los correspondientes a distintas muestras que se eligiesen al azar. Ahora bien, dado que en la práctica se procede casi siempre por muestreo, conviene que la característica elegida del valor central sea de tal naturaleza que dicho valor central sea sensiblemente el mismo para las distintas muestras. Conviene hacer notar, al respecto, que esta elección del valor central sólo será posible cuando se conozca la ley de distribución del fenómeno en estudio; la variación del valor central y de otros estadísticos en las distintas muestras entra de lleno en la parte de la Teoría Estadística conocida por la denominación de “Teoría de las Muestras”.

f) *Debe ser adecuada a los cálculos algebraicos posteriores.* Se comprende fácilmente la importancia de tal condición con sólo pensar en el caso muy frecuente de tratar de determinar el valor

central que corresponde a una serie global resultado de reunir varias series estadísticas parciales.

De entre las cuatro medias clásicas que se podrían emplear en este tipo de trabajos hidráulicos o hidrológicos (aritmética, geométrica, cuadrática y armónica) se ve inmediatamente que la aritmética es la que mejor reúne las anteriores condiciones de Yule, si bien ni ella ni las otras tres proporcionan indicación alguna acerca de la repartición de los datos de la serie o de sus posiciones respectivas ni sobre las desviaciones de unos respecto a otros. Se limitarán a condensar todos los datos de la serie en uno solo, *la media*, como síntesis de todos ellos.

En particular, debe tenerse en cuenta que las medias aritmética ($A = \bar{X}$) y cuadrática ($Q = C$) dan mucho relieve a los elementos grandes de la serie y, desde luego, la segunda todavía más que la primera. Por el contrario, las medias geométrica y armónica destacan la influencia de los valores pequeños y reducen la influencia de los valores grandes, lo que habrá que tener bien presente en los trabajos de este tipo.

A continuación, se presenta un gráfico representativo, en la Fig. 7, con la construcción geométrica para hallar las medias aritmética ($A = \bar{X}$), cuadrática ($Q = C$), geométrica (G) y armónica (H) de dos números cualesquiera a y b .

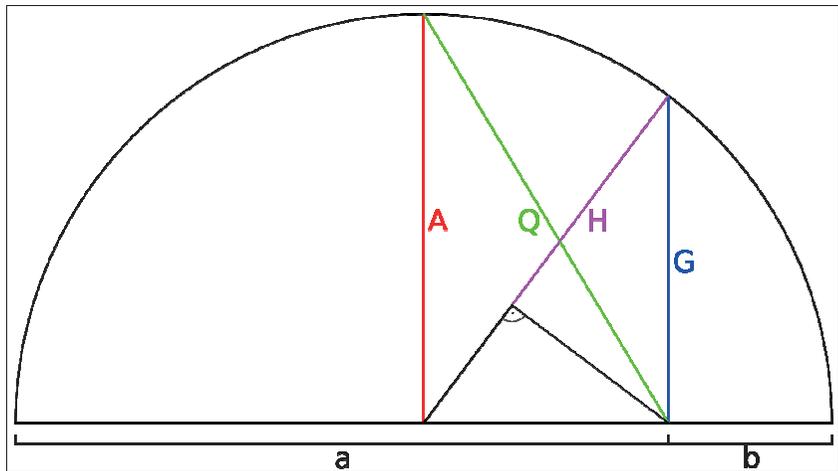


Fig. 7. Construcción geométrica de las cuatro medias empleadas.

Alternativamente, en vez de omitir los datos aislados a los que hemos hecho referencia y calcular una especie de “media modificada” para tratar de evitar la dificultad mencionada, se podría llevar a cabo el estudio mediante otra medida de situación o valor central llamada *mediana*. Por definición, en una distribución unitaria de frecuencias, la mediana de un conjunto de datos es el valor del elemento central (si el número de acequias de riego es impar) o bien la semisuma de los dos elementos centrales (si el número de conducciones es par) cuando dichos datos están ordenados, es decir, dispuestos en orden de magnitud creciente o decreciente.

En el caso de una distribución de frecuencias estructurada por intervalos de clase, el cálculo de la mediana viene dado por la fórmula correspondiente cuyo origen no procede especificar aquí. A diferencia de la media, pues, la mediana no se afecta fácilmente con los valores extremos (Freund & Williams, 1964-1972), razón por la cual se la considera como un estimador robusto de localización.

La mediana, como la media, siempre existe y es única para cada conjunto de datos. En su contra posee la tediosidad de lo que representa ordenar manualmente grandes conjuntos de datos (aunque el ordenador puede suplir la expresada carencia) y, lo que es peor desde el punto de vista de la inferencia estadística: una mediana de una muestra de cotas del terreno o de caudales no es, en general, una estimación *tan fiable* de una media del conjunto como lo es la media aritmética o esperanza matemática de los mismos datos. De hecho, las medianas de muchas muestras tomadas de la misma población o universo suelen variar más ampliamente que las correspondientes medias de las muestras.

Recordemos, por último, que los promedios o valores centrales de la distribución de probabilidad deben calcularse a partir de datos homogéneos y numerosos, condiciones ambas inherentes a toda buena estadística en materia de tratamiento de las variables hidráulicas.

Comenzaremos, como es habitual en estos casos, por el cálculo de los diferentes promedios o valores de la distribución de la variable “caudal” de las acequias existentes en la zona regable que nos ocupa.

Para ello, y a partir de la tabla inicial 1, elaboraremos la siguiente tabla 2:

Tabla 2. Cálculos auxiliares de la distribución de caudales (l).

$n_i \cdot \log x_i$	$\log x_i$	Q_i (l/s)	x_i (l/s)	n_i	$x_i \cdot n_i$ (l/s)	$N_i \uparrow$	$x_i^2 \cdot n_i$	n_i/x_i
6.506	2.1687920	Menos de 150	147.5	3	442.5	3	65268.75	0.020
32.749	2.1832698	De 150 a 155	152.5	15	2287.5	18	348843.75	0.098
109.864	2.1972806	De 155 a 160	157.5	50	7875.0	68	1240312.50	0.318
530.605	2.2108534	De 160 a 165	162.5	240	39000.0	308	6337500.00	1.477
693.893	2.2240148	De 165 a 170	167.5	312	52260.0	620	8753550.00	1.863
525.645	2.2367891	De 170 a 175	172.5	235	40537.5	855	6992718.75	1.362
242.913	2.2491984	De 175 a 180	177.5	108	19170.0	963	3402675.00	0.608
83.667	2.2612629	De 180 y más	182.5	37	6752.5	1000	1232331.25	0.203
2225.842	///////	TOTAL	///	1000	168325.0	///	28373200.00	5.949

Fuente: elaboración propia.

Veamos, a continuación, los diferentes promedios o valores centrales analizados:

* **Media Aritmética:** a partir de los correspondientes resultados se tiene que, tratándose de una distribución conjunta de frecuencias:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^h x_i \cdot n_i / n = \alpha = 168325 / 1000 = 168.325 \text{ l/s} ,$$

que constituye la media aritmética o esperanza matemática de la distribución de frecuencias de la variable hidráulica analizada.

Por otra parte, y por lo que se refiere a la determinación de otros promedios o medidas centrales de esta distribución de frecuencias, veamos que, a partir de la tercera columna y de la encabezada por $N_i \uparrow$ (tabla 2) se obtienen los siguientes resultados promedios (como $N_i \uparrow = 500$ está en el intervalo del 165 a 170, en él se encuentra la mediana o segundo cuartil):

* **Mediana:** $M_e = Q_2 = 165 + [(500 - 308)/312] \times 5 = 168.08 \cong 168 \text{ l/s}$, que se halla situada en el punto de corte de los diagramas acumulativos ascendente y descendente, por definición.

* **1.º tercil:** $T_1 = 165 + [(333 - 308)/312] \times 5 = 165.4 \text{ l/s}$,

* **2.º tercil:** $T_2 = 170 + [(667 - 620)/235] \times 5 = 171.0 \text{ l/s}$,

* **Mediana de Gastwirth (1966):** Dentro de la Estadística robusta, cabe considerar aquí también este promedio que ofrece más información muestral que la mediana y es más resistente que la trimedia (que veremos posteriormente) a la influencia de *outliers*, por lo que constituye una alternativa válida a ellas como parámetro de posición. Viene dada por la expresión:

$$M_{eg} = \frac{4M_e + 3T_1 + 3T_2}{10} = \frac{4 \cdot 168.1 + 3 \cdot 165.4 + 3 \cdot 171.0}{10} = 168.16 \text{ l/s}.$$

* **1.º cuartil:** $Q_1 = 160 + [(250 - 68)/240] \times 5 = 163.79 \cong 164 \text{ l/s}$.

* **3.º cuartil:** $Q_3 = 170 + [(750 - 620)/235] \times 5 = 172.77 \cong 173 \text{ l/s}$.

Es decir, entre las acequias integrantes de la zona regable en estudio, la mitad tienen un caudal inferior a 168 l/s, la cuarta parte, un caudal inferior a 164 l/s, otra cuarta parte, más de 173 l/s y entre los caudales 164 l/s y 173 l/s se encuentra el 50% de aquellas conducciones libres.

Otros promedios interesantes de uso generalizado, también para nuestro estudio, serían los siguientes:

* **Moda:** $M_0 = 165 + [235/(240+235)] \times 5 = 167.47 \text{ l/s.}$

* **Media cuadrática:**

$$C = \sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2 \cdot n_i / n} = \sqrt{28373200 / 1000} = 168.44 \text{ l/s.}$$

* **Media geométrica:**

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^8 x_i^{n_i}} = \text{antilog.} \sum_{i=1}^8 n_i \cdot \log x_i / n = \\ = \text{antilog } 2225.842 / 1000 = 168.2062 \text{ l/s.}$$

* **Media armónica:**

$$H = n / \sum_{i=1}^8 n_i / x_i = 1000 / 5.949 = 168.0955 \text{ l/s.}$$

***Trimedia:**

Como ya se ha dicho, las medidas robustas de tendencia central son estadísticos que tratan de paliar los problemas de estimación asociados a distribuciones anómalas. Cabe señalar, entre ellas, las denominadas medias “k-recortadas” o “k-winsorizadas” así como la “trimedia” que, en nuestro caso, vendrá dada por la expresión:

$$T = \frac{Q_1 + 2Q_2 + Q_3}{4} = \frac{163.79 + 2 \times 168.08 + 172.77}{4} = 168.18 \text{ l/s.}$$

Desde luego, las cuatro primeras medias aquí estudiadas, que constituyen estimadores clásicos de situación, como no podría ser

de otra manera desde el punto de vista teórico, quedan ordenadas monótonicamente, con arreglo a su magnitud, del modo siguiente:

armónica < geométrica < aritmética < cuadrática

$$(H = 168.0955) < (G = 168.2062) < (\bar{X} = 168.3250) < (C = 168.4435) ,$$

y puede observarse que dichos valores se compadecen en su magnitud con la construcción geométrica anteriormente relacionada en la Fig. 7.

En efecto, consideremos ahora el caso más sencillo de una distribución con dos valores de la variable hidráulica con frecuencias unitarias y que con estos valores pueden calcularse los cuatro promedios clásicos antes mencionados, esto es:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2}{\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}} = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}$$

$$G = \sqrt{x_1 x_2}; \quad \bar{X} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad C = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

Vamos a demostrar, en primer lugar, que $H \leq G$, o sea:

$$\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \leq \sqrt{x_1 x_2}$$

Elevando al cuadrado los miembros de la anterior desigualdad y operando adecuadamente, se obtiene:

$$4x_1^2 x_2^2 \leq x_1 x_2 (x_1 + x_2)^2 \quad ; \quad 4x_1 x_2 \leq (x_1 + x_2)^2$$

$$4x_1 x_2 \leq x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 \quad ; \quad 0 \leq x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2$$

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2$$

Con esto queda demostrado que $H \leq G$. De otra parte $G \leq \bar{X}$, ya que:

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad 4x_1 x_2 \leq (x_1 + x_2)^2$$

Entonces se tendrá que: $0 \leq (x_1 - x_2)^2$, por tanto, queda demostrado que $H \leq G \leq \bar{X}$. Por último, teniendo en cuenta la relación que liga la media cuadrática con la aritmética y la variancia, esto es: $C^2 = \bar{X}^2 + \sigma^2$, se deduce también que: $\bar{X} \leq C$, como se quería demostrar.

Esta demostración, además, puede generalizarse para cualquier número de valores de la variable hidráulica en estudio. En cualquier caso, la demostración de la última desigualdad también puede realizarse analíticamente a partir de la definición de las dos medias, esto es:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2}{2} ; C = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} . \text{ Entonces:}$$

$$\bar{X}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2}{4} ; C^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} ;$$

$$\bar{X}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} + \frac{x_1x_2}{2} ; C^2 - \bar{X}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} - \frac{x_1x_2}{2} = \frac{(x_1 - x_2)^2}{4} = \sigma^2$$

Se ha de observar que esta diferencia de fracciones ha de ser necesariamente positiva o nula. En efecto, se trata de comparar las expresiones: $\frac{x_1^2 + x_2^2}{4}$ y $\frac{2x_1x_2}{4}$, o más concretamente sus numeradores, o sea: $x_1^2 + x_2^2$ y $2x_1x_2$. Como se tiene que el cuadrado de una diferencia ofrece el valor:

$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2$; también se cumple que: $C^2 \geq \bar{X}^2$, y además: $\bar{X} \leq C$, c.s.q.d.

También debe tenerse en cuenta que:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (x_i - \bar{X})^2 = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 x_i^2 \right) - \bar{X}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 = \dots = \frac{(x_1 - x_2)^2}{4}$$

7.2. MEDIDAS DE DISPERSIÓN O CONCENTRACIÓN

Las medidas de dispersión, también llamadas “medidas de variabilidad”, muestran precisamente la variabilidad de una distribución indicando, por medio de un número, si las diferentes puntuaciones de una variable están muy alejadas de un promedio o

no. Cuanto mayor sea ese valor, mayor será la variabilidad; por el contrario, cuanto menor sea, más homogénea será a la media. Así, se sabe si todos los casos son parecidos o bien varían mucho entre ellos. Para calcular la variabilidad que una distribución tiene respecto de su media, se calcula la media de las desviaciones de las puntuaciones respecto a la media aritmética. Pero la suma de esas desviaciones es siempre cero (por una conocida propiedad de la media aritmética), así que se adoptan dos clases de estrategias para salvar este problema. Una es tomando las desviaciones en valor absoluto (obteniéndose la denominada “desviación media”) y otra es tomando las desviaciones al cuadrado (obteniéndose la “varianza” y su raíz cuadrada la “desviación típica”, “desviación standard” o “desviación cuadrática media”).

Por lo que se refiere a la desviación típica o "standard", como medida de la dispersión absoluta de la distribución por la zona regable de nuestra variable hidráulica Q_i , veamos que su valor vendrá dado por la expresión:

$$\sigma = \sqrt{C^2 - \bar{X}^2} = \sqrt{168.44^2 - 168.32^2} = 6.36 \text{ l/s,}$$

y un coeficiente de variación de Pearson (medida de dispersión relativa) de: $CV = \sigma/\bar{X} = 6.35/168.32 \approx 0.038 = 3.8\%$.

Otras medidas de interés son las siguientes:

- Coeficiente de apertura: $C_{ap} = x_8/x_1 = 182.5/147.5 = 1.237$.

- Recorrido o rango (entre las marcas de clase extremas o bien entre los valores extremos de la variable “caudal”):

$$R = 182.5 - 147.5 = 35 \text{ l/s, o bien: } R = Q_4 - Q_0 = 208 - 120 = 88 \text{ l/s.}$$

- Recorrido relativo:

$$R' = \frac{R}{\bar{X}} = \frac{35}{168.325} = 0.208, \text{ o bien: } R' = \frac{R}{\bar{X}} = \frac{88}{168.325} = 0.523.$$

- Recorrido intercuartílico:

$$R'' = Q_3 - Q_1 = 173 - 164 = 9 \text{ l/s.}$$

- Recorrido semi-intercuartílico:

$$R''' = (Q_3 - Q_1)/(Q_3 + Q_1) = 9/(173 + 164) = 0.02671,$$

es decir, que las medidas de dispersión empleadas vienen a representar sólo un pequeño porcentaje del correspondiente promedio. **Desde luego, ello indicaría que el grado de uniformidad y equilibrio de la zona regable que nos ocupa, en relación a la distribución de los caudales o capacidades portantes de las acequias que la surcan, resulta francamente elevado. En efecto, los coeficientes de uniformidad anteriormente definidos, tomarán, en este caso, los siguientes valores:**

$$\begin{cases} CU_1 = 100 \cdot (1 - CV) = 100 \cdot (1 - 0.038) = 96.2\% \\ CU_3 = 100 \cdot (1 - 1.27 \cdot CV) = 100 \cdot (1 - 1.27 \cdot 0.038) = 95.2\% \\ CU_4 = 100 \cdot (1 - 0.80 \cdot CV) = 100 \cdot (1 - 0.80 \cdot 0.038) = 97.0\% \end{cases}$$

debiendo considerarse también que:

$$CU_2 = (Q_1 / \bar{X}) \cdot 100 = (163.79 / 168.32) \cdot 100 = 97.3\%,$$

si bien otra determinación propuesta del mismo coeficiente de uniformidad hidráulica (véase el epígrafe 3.1) conduciría al valor: $CU_2 = 100 (1 - 0.68 \cdot CV) = 100 (1 - 0.68 \times 0.038) = 97.4\%$, cuya pequeña discrepancia (+0.1%) con el resultado anterior débese al propio ajuste de normalidad, o bien al proceso efectuado de cálculo decimal.

Veamos, por último, que el "coeficiente de uniformidad hidráulica medio", que juzgamos de mejor aplicación, ofrecerá un valor de:

$$\overline{CU} = 100 (1 - 0.92 \cdot CV) = 100 (1 - 0.92 \times 0.038) = 96.5\%,$$

$$\text{mientras que también: } CU_5 = 100 \cdot \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}} = 100 \cdot \sqrt{\frac{163.79}{172.77}} = 97.4\% .$$

La representación gráfica de los valores de los diferentes coeficientes de uniformidad hidráulica hallados, en definitiva, es el siguiente:

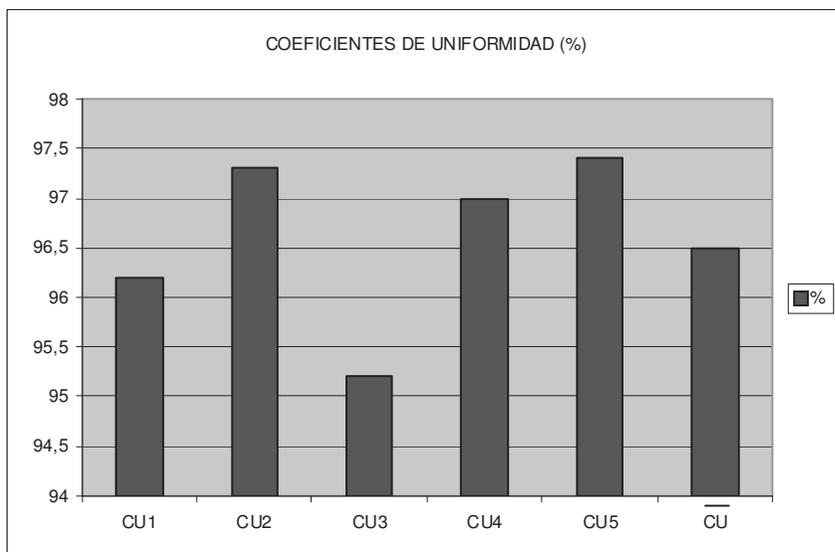


Fig. 8. Valores de los diferentes coeficientes de uniformidad.

7.3. OTRAS CARACTERÍSTICAS RELEVANTES DE LA DISTRIBUCIÓN ESPACIAL

7.3.1. Asimetría o sesgo

Las medidas de *asimetría* o *sesgo* son indicadores que permiten establecer el *grado de simetría* (o asimetría) que presenta la distribución de probabilidad de una variable aleatoria sin tener que hacer su representación gráfica. Como eje de simetría consideramos una recta paralela al eje de ordenadas que pasa por la media aritmética de la distribución. Si una distribución es perfectamente simétrica, existe el mismo número de valores a la derecha que a la izquierda de la media o esperanza matemática, por tanto, el mismo número de desviaciones con signo positivo que con signo negativo.

Decimos que hay asimetría positiva (o a la derecha) si la "cola" a la derecha de la media es más larga que la de la izquierda, es decir, si hay valores más separados de la media a la derecha. Por el contrario, diremos que hay asimetría negativa (o a la izquierda) si la "cola" a la izquierda de la media es más larga que la

de la derecha, es decir, si hay valores más separados de la media a la izquierda.

Se podría pensar que definir la simetría usando la mediana para variables continuas y usando la media aritmética para variables discretas deviene una elección arbitraria. En realidad esto no es así, pues si una variable es continua, coinciden ambos criterios de simetría (con respecto a la media y a la mediana). Es más, se tiene que media y mediana coinciden para las distribuciones continuas perfectamente simétricas. Por otro lado, en el caso de variables discretas, la distribución es simétrica si el lado derecho del diagrama se obtiene por imagen especular desde la media. En este caso coincide la media con la mediana si el número de observaciones es impar. Si la variable es continua simétrica y unimodal, coinciden también la media, la mediana y la moda.

Dentro de los diversos tipos de asimetría posible, vamos a destacar los dos fundamentales:

-Asimetría positiva:

Si las frecuencias más altas se encuentran en el lado izquierdo de la media, mientras que en el derecho hay frecuencias más pequeñas (*cola*).

-Asimetría negativa:

Cuando la cola está situada en el lado izquierdo, al contrario de lo que sucede en el caso anterior.

Cuando realizamos un estudio descriptivo como el que aquí se desarrolla, resulta altamente improbable que la distribución de frecuencias sea *totalmente* simétrica. En la práctica diremos que la distribución de frecuencias es simétrica si lo es sólo de un modo aproximado. Por otro lado, aún observando cuidadosamente la gráfica de la distribución, podemos no ver claro de qué lado están las frecuencias más altas. Conviene definir, entonces, unos estadísticos que ayuden a interpretar la asimetría, a los que llamaremos *índices de asimetría*.

A continuación, emplearemos en el ejemplo que estamos desarrollando en el presente trabajo algunos de los índices de asimetría o sesgo más usuales, como son el índice basado en los

tres cuartiles, el momento de tercer orden¹¹ y la distancia existente entre la moda y la media o la media y la mediana.

Por lo que se refiere a las restantes características de la distribución espacial de la variable hidráulica "caudal", veamos que una de la asimetría o sesgo la constituye el denominado "1r. coeficiente de asimetría de Pearson":

$$P_1 = \frac{\bar{X} - M_0}{\sigma} = \frac{168.32 - 167.47}{6.36} = 0.134 \approx 0,$$

luego se trata de una distribución prácticamente simétrica.

También podríamos calcular el "2º coeficiente de asimetría de Pearson", a saber:

$$P_2 = \frac{3 \cdot (\bar{X} - M_e)}{\sigma} = \frac{3 \cdot (168.32 - 168.08)}{6.36} = 0.113,$$

o bien el "coeficiente de sesgo cuartílico" también conocido como "coeficiente de asimetría de Yule-Bowley", de valor:

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \\ &= \frac{172.77 - 2 \cdot 168.08 + 163.79}{172.77 - 163.79} = 0.045, \end{aligned}$$

que conducen, en todos los casos, a conclusiones similares. Cabe observar, no obstante, una ligera asimetría o sesgo hacia la derecha, puesto que se cumple que: $P_1 > 0$, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$ y también:

$$\bar{X} = 168.32 \text{ l/s} > M_e = 168.08 \text{ l/s} > M_0 = 167.47 \text{ l/s} .$$

¹¹ El conocimiento de la simetría permite precisar, de alguna manera, la forma de una distribución de frecuencias, pero tal conocimiento puede mejorarse notoriamente al disponer de otras características de dicha distribución y, de modo general, mediante los denominados "momentos de la distribución", que pueden ser con respecto al origen (de los que son conocidos la media aritmética y el cuadrado de la media cuadrática C^2) o bien con respecto a la media (como la varianza σ^2).

La verificación de todos estos resultados, que ha resultado satisfactoria, se ha realizado con la aplicación estadística “R commander”¹².

Así mismo, a partir de los resultados obtenidos se elaborará la siguiente tabla:

Tabla 3. Cálculos auxiliares de la distribución de caudales (II).

n_i	$x_i - 168$	$(x_i - 168)^3 \cdot n_i$	$(x_i - 168)^4 \cdot n_i$	$x_i - 168$	$\cdot n_i$
3	-20.5	-25844.4	529810.2		61.5
15	-15.5	-55851.2	865693.6		232.5
50	-10.5	-57881.3	607753.6		525.0
240	-5.5	-39930.0	219615.0		1320.0
312	-0.5	-39.0	19.5		156.0
235	4.5	21414.6	96365.7		1057.5
108	9.5	92596.5	879666.7		1026.0
37	14.5	112800.0	1635600.0		536.5
	////	47265.2	4834524.3		4915.0
$n = \sum_{i=1}^8$					

Fuente: elaboración propia.

¹² Se trata de una interfaz gráfica de usuario para el lenguaje de programación R, liberada bajo licencia GNU GPL y desarrollada y mantenida por el Departamento de Sociología de la Universidad McMaster. Es quizás la alternativa más viable basada en R a los paquetes estadísticos usuales como SPSS. Con cada opción de menú utilizada presenta el código R que se ha ejecutado. También conocida como **Rcmdr**, esta aplicación puede ser instalada desde R como un paquete más de este lenguaje. Ha sido utilizada como un entorno de aprendizaje en numerosos cursos y libros de estadística para estudiantes, tecnólogos y científicos.

De los resultados que se deducen de la tabla anterior, se infiere inmediatamente que el momento central (respecto a la media aritmética) de tercer orden es:

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^3 \cdot n_i}{n} = \frac{47265.2}{1000} = 47.2652,$$

por lo que se tendrá un "coeficiente directo de asimetría" o "coeficiente de sesgo" de Fisher (Alcaide, 1973) de:

$$g_1 = m_3/\sigma^3 = 47.2652/6.36^3 = 0.18,$$

que confirma la existencia de una distribución aceptablemente simétrica (véase que en curvas simétricas como la normal, se cumple que: $g_1 = g_1^2 = 0$).

7.3.2. Apuntamiento o "curtosis"

En teoría de la probabilidad y estadística, la *curtosis* (o "kurtosis") es una medida de la forma o apuntamiento de las distribuciones. Así, las medidas de curtosis (también llamadas de apuntamiento o de concentración central) tratan de estudiar la mayor o menor concentración de frecuencias alrededor de la media aritmética y en la zona central de la distribución. De este modo, los índices de curtosis miden la mayor o menor concentración de los datos justamente alrededor de la media aritmética, partiendo como referencia de la distribución normal o curva de Gauss.

Por otra parte, $m_4 = 4834.5243$ (momento central o respecto al origen de 4.º orden), puesto que:

$$m_4 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 \cdot n_i}{n} = \frac{4834524.3}{1000} = 4834.5243, \text{ y, por lo tanto, se}$$

tendrá un "coeficiente de curtosis" de Fisher de:

$$g_2 = (m_4/\sigma^4) - 3 = (4834.5243/6.36^4) - 3 = 2.95 - 3 = -0.05 \approx 0,$$

lo que permite asegurar que la distribución es *mesocúrtica* y aproximadamente normal (la curva normal, como es sabido, tiene un valor: $g_2 = 0$).

7.3.3. Otras

Veamos, así mismo, que la anterior tabla 3 auxiliar de cálculo, en su última columna, nos permitirá el cálculo de otra medida de dispersión absoluta a la que ya nos hemos referido con anterioridad: la desviación media absoluta¹³ (DM) respecto a la media aritmética (que sería mínima con respecto a la mediana, sin tener en cuenta la moda), que resulta ser la media de las desviaciones de las observaciones con respecto a la media aritmética, donde la desviación debe tomarse en valor absoluto, a saber:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^8 |x_i - \bar{X}| \cdot n_i}{n} = 4915 / 1000 = 4.915 \approx 4\sigma / 5 =$$

$$= 4 \times 6.36 / 5 = 5.088 \text{ l/s.}$$

Este valor de la DM, en la presente distribución agrupada de frecuencias, conducirá a una determinación más ajustada y directa del valor del coeficiente de uniformidad hidráulica CU_4 anteriormente definido a saber:

$$CU_4 = 100 \times (1 - 4.915/168.325) = 97.08 \%,$$

que prácticamente coincide con el anteriormente calculado (97.00%) mediante procedimientos indirectos.

No obstante, un cálculo más preciso de las desviaciones medias en relación a los diferentes promedios o valores centrales de la distribución de frecuencias que nos ocupa (esto es, las \bar{X} , H, G, C, M_e y M_o), ajustando sus valores hasta las centésimas, conduciría a la elaboración de la siguiente tabla:

¹³ Por cierto que la DM puede usarse también para estimar la desviación típica σ , y es fácil de calcular en pequeñas muestras si las desviaciones se calculan con respecto a la mediana M_e . Las eficiencias del recorrido R y de la DM son menores que en estimaciones más sencillas de calcular que la DM. Para muestras de los tamaños comprendidos entre 5 y 10, estas estimaciones utilizan la diferencia existente entre la suma de los dos valores mayores y la suma de los dos valores menores. Para muestras de tamaños más grandes, como los que hallaremos en las redes hidráulicas que nos ocupan, se usan tres o cuatro de los valores mayores y de los más pequeños (Dixon y Massey, 1969).

Tabla 4. Desviaciones medias absolutas según promedio empleado.

Promedio empleado	x_i	n_i	\bar{X}	H	G	C	M_e	M_o
			$\frac{ x_i - 168.32 }{\cdot n_i}$	$\frac{ x_i - 168.10 }{\cdot n_i}$	$\frac{ x_i - 168.21 }{\cdot n_i}$	$\frac{ x_i - 168.44 }{\cdot n_i}$	$\frac{ x_i - 168.08 }{\cdot n_i}$	$\frac{ x_i - 167.47 }{\cdot n_i}$
	147.5	3	62.46	61.80	62.13	62.82	61.74	59.91
	152.5	15	237.30	234.00	235.65	239.10	233.70	224.55
	157.5	50	541.00	530.00	535.50	547.00	529.00	498.50
	162.5	240	1396.80	1344.00	1370.40	1425.60	1339.20	1192.80
	167.5	312	255.84	187.20	221.52	293.28	180.96	9.36
	172.5	235	982.30	1034.00	1008.15	954.10	1038.70	1182.05
	177.5	108	991.44	1015.20	1003.32	978.48	1017.36	1083.24
	182.5	37	524.66	532.80	528.73	520.22	533.54	556.11
	$\sum_{i=1}^8 =$	1000	4991.80	4939.00	4965.40	5020.60	4934.20	4806.52

Fuente: elaboración propia.

De este modo, los valores más ajustados obtenidos de las diversas desviaciones medias absolutas serán los siguientes:

$DM_{\bar{X}}$	DM_H	DM_G	DM_C	DM_{M_e}	DM_{M_o}
4.9918	4.9390	4.9654	5.0206	4.9342	4.8065

y, en este caso, resulta que:

$$CU_4 = 100 \times (1 - 4.9918/168.325) = 97.03 \%$$

7.4. ÍNDICE DE GINI Y CURVA DE LORENZ

El estudio de la distribución espacial de las variables hidráulicas analizables (presión, caudal, velocidad, diámetro interior, radio hidráulico, pérdidas de carga, ...) puede adquirir relevancia en una extensa zona regable como la que nos ocupa o bien en una red de distribución urbana o industrial de agua potable.

En el presente ejemplo consideramos una población o universo de $N = 1000$ acequias de riego y siendo la variable estadística $X = \{x_i, n_i\}$, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, r$, donde x_i es el caudal correspondiente a cada una de las acequias, siendo $N = \sum_{i=1}^r n_i$.

Supongamos además que: $x_1 < x_2 < \dots < x_r$. Llamemos $u_i = \sum_{j=1}^i x_j \cdot n_j$, es decir, el caudal total poseído por las acequias cuyo caudal es menor o igual que x_i . Sea $p_i = \frac{N_i^\uparrow}{N} \cdot 100$, es decir, el porcentaje de acequias de riego poseedoras del caudal u_i (N_i^\uparrow es la frecuencia absoluta acumulada ascendente, es decir, el número de acequias poseedoras del caudal u_i); sea $q_i = \frac{u_i}{u_r} \cdot 100$, es decir, el porcentaje del caudal poseído por las N_i^\uparrow acequias anteriores.

Pues bien, la curva de Lorenz es la línea poligonal quebrada que une los puntos $(0, 0)$, (p_1, q_1) , (p_2, q_2) , (p_3, q_3) , ..., (p_r, q_r) . En el caso planteado, tenemos que $r = 8$ (n° de clases).

Otra forma de observar la curva de Lorenz es estimando el área de la superficie que se encuentra comprendida entre la curva y la diagonal del primer cuadrante (la recta $p = q$). Esa superficie se denomina **área de concentración**. El **índice Gini** constituye un índice de concentración de los valores de la variable aleatoria estadística o hidráulica y equivale justamente al doble del área de concentración. Su valor estará siempre comprendido entre los valores cero y uno ($0 \leq G \leq 1$).

Se considera, en definitiva, que existe equidistribución de los caudales cuando $p_i = q_i$, y en este caso, la expresada curva de Lorenz adopta la configuración gráfica siguiente:

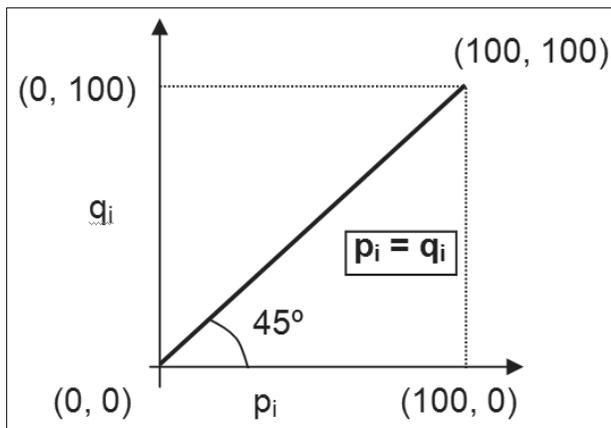


Fig. 9. Coordenadas cartesianas rectangulares de las variables p y q .

o sea, se trata de una recta que descansa teóricamente sobre la bisectriz del primer cuadrante del círculo. Éste resulta ser, prácticamente, el caso del problema que nos ocupa, donde la correspondiente curva poligonal de Lorenz apenas se separa de la diagonal o bisectriz del primer cuadrante, dado el bajísimo valor del índice de Gini obtenido ($G = 0.02$), como se verá a continuación.

También puede resultar de interés, en nuestro caso, la aplicación de la función del econométra italiano Vilfredo Pareto (Franquet, 2003) a la distribución de los caudales de las acequias por toda la zona regable en cuestión¹⁴.

Para la determinación de dichos ítems, frecuentemente empleados en otro tipo de estudios como los sociológicos y/o económicos, es necesaria la elaboración de la siguiente tabla de cálculos auxiliares:

¹⁴ Educado como ingeniero y matemático, Pareto (1848-1923) se dedicó, en una primera etapa, a la aplicación de las matemáticas a la economía. Sucedió a León Walras en la cátedra de economía de la Universidad de Lausanne, en 1892. Utilizando las curvas de indiferencia introducidas por Edgeworth, logró establecer las condiciones matemáticas para que se produjera el Equilibrio General; creó el concepto de "óptimo", llamado luego óptimo paretiano, para referirse a una situación donde se obtiene una máxima utilidad dado un conjunto previo de bienes o servicios. Sus trabajos sirvieron como punto de partida para la llamada "Economía del Bienestar".

Tabla 5. Cálculos auxiliares para la determinación de G.

L_i (l/s)	x_i (l/s)	n_i	$Q_i = x_i \cdot n_i$ (l/s)	$\frac{n_i}{n} \times 100$	$\frac{x_i \cdot n_i}{\sum x_i \cdot n_i} \times 100$	p_i	q_i	$p_i - q_i$
<150	135.0	3	405.0	0.3	0.24	0.3	0.24	0.06
150-155	152.5	15	2287.5	1.5	1.36	1.8	1.60	0.20
155-160	157.5	50	7875.0	5.0	4.67	6.8	6.27	0.53
160-165	162.5	240	39000.0	24.0	23.12	30.8	29.39	1.41
165-170	167.5	312	52260.0	31.2	30.97	62.0	60.36	1.64
170-175	172.5	235	40537.5	23.5	24.03	85.5	84.39	1.11
175-180	177.5	108	19170.0	10.8	11.36	96.3	95.75	0.55
>180	194.0	37	7178.0	3.7	4.25	100	100	0.00
$\sum_{i=1}^8$		$n = 1000$	$Q = 168713.0$	100%	100%	383.5	378.0	5.50

Fuente: elaboración propia.

En este caso, al objeto de precisar mejor los cálculos, los valores de la primera y última marca de clase, a saber: $x_1 = 135.0$ l/s y $x_8 = 194.0$ l/s se han estimado en el centro del intervalo de clase correspondiente, teniendo en cuenta los valores extremos de los caudales de las acequias: $Q_0 = 120.0$ l/s y $Q_4 = 208.0$ l/s.

Así pues, según la fórmula dada por Pulido, el valor del índice

de Gini, en este caso, será de:
$$G = \frac{\sum_{i=1}^{K-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{K-1} p_i} = \frac{5.50}{283.5} = 0.02 = 2\%.$$

Habida cuenta del bajísimo valor del índice obtenido, podemos afirmar que la distribución de los caudales de las acequias de riego por la zona regable es casi perfecta desde el punto de vista estadístico.

La correspondiente curva poligonal de Lorenz apenas se separaría de la diagonal o bisectriz del primer cuadrante en la Fig. 9, dado el bajísimo valor del índice de Gini ya obtenido, por lo que obviaremos su representación gráfica, a efectos prácticos.

7.5. ÍNDICE DE WILLIAMSON

Este índice se acostumbra a emplear con cierto éxito en trabajos económicos, sociológicos y en modelos de desigualdad regional. En nuestro caso, la variable hidráulica en estudio es el

caudal global que puede ser transportado por las acequias de cada intervalo de clase.

Por ello, la fórmula pertinente, en relación al número de acequias de riego, vendrá dada por la expresión:

$$W_{Q,n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 \left(\frac{Q_i}{n_i} - \frac{Q}{n} \right)^2 \times \frac{n_i}{n}}{Q/n}}, \forall i \in (1,2,\dots,8). \text{ Esto es:}$$

$$W = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 \left(x_i - \frac{168713}{1000} \right)^2 \times f_i}{168.713}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(135.0 - 168.713)^2 \times 0.003 + (152.5 - 168.713)^2 \times 0.015 + (157.5 - 168.713)^2 \times 0.05 + (162.5 - 168.713)^2 \times 0.24 + (167.5 - 168.713)^2 \times 0.312 + (172.5 - 168.713)^2 \times 0.235 + (177.5 - 168.713)^2 \times 0.108 + (194.0 - 168.713)^2 \times 0.037}{168.713}} = \sqrt{\frac{58.73}{168.713}} = 0.59,$$

que, como era de esperar, resulta ser muy bajo, al igual que sucede con el índice de Gini anteriormente calculado.

7.6. ÍNDICE DE CONCENTRACIÓN DE LORENZ

En el caso que nos ocupa, veamos que un valor aproximado de este índice es el que se obtiene mediante la aplicación de la fórmula basada en los porcentajes acumulados, que se emplea comúnmente en los trabajos prácticos.

Aquí, la fórmula correspondiente explicada en epígrafes anteriores de este mismo libro (ver 2.2.3), tomará la configuración simplificada (con $n = 8$ y $q_n = 100$):

$$L = 1 - \frac{2}{7} \times \frac{\sum_{i=1}^7 q_i}{100} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^7 q_i}{350} .$$

El resultado que ofrece la aplicación de la fórmula anterior es el siguiente, teniendo en cuenta, como ya se ha dicho, que resulta necesario ordenar los valores de la variable hidráulica en estudio

(caudal de las conducciones) de menor a mayor, para la aplicación correcta de la expresada fórmula, así:

Tabla 6. Ordenación creciente de los porcentajes acumulados de caudales.

X_i	q_i
0.24	0.24
1.36	1.60
4.25	5.85
4.67	10.52
11.36	21.88
23.12	45.00
24.03	69.03
30.97	100.00
$\sum_{i=1}^8$	154.12

Fuente: elaboración propia.

A esta distribución de probabilidad le corresponde, pues, el índice de Lorenz siguiente: $L = 1 - \frac{154.12}{350} = 0.56$.

8. AJUSTE A UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

8.1. LA HIPÓTESIS DE NORMALIDAD Y EL ESTADÍGRAFO χ^2

Cuando se analizan datos medidos por una variable cuantitativa continua (en nuestro caso la variable “caudal” puede considerarse continua en función de la precisión de los instrumentos de medida), las pruebas estadísticas de estimación y contraste frecuentemente empleadas se basan en suponer que se ha obtenido una muestra aleatoria de una distribución de probabilidad de tipo normal o de Gauss. Pero en muchas ocasiones esta suposición no resulta válida, y en otras la sospecha de que no sea adecuada no resulta fácil de comprobar, por tratarse de muestras pequeñas. En estos casos disponemos de dos posibles mecanismos: los datos se pueden **transformar** de tal manera que sigan una distribución normal, o bien se puede acudir a pruebas estadísticas que no se basan en ninguna suposición en cuanto a la distribución de probabilidad a partir de la que fueron obtenidos los

datos, y por ello se denominan **pruebas no paramétricas** (*distribution free*)¹⁵. La distribución que venimos estudiando de la variable hidráulica "caudal", en la zona regable considerada, puede ajustarse a una distribución normal. De este modo, la distribución teórica de los caudales de las acequias vendrá dada, como ya se ha visto, por la función de densidad normal:

$$y = (1/6.36 \cdot \sqrt{2\pi}) \cdot e^{-\frac{(x-168.325)^2}{80.8992}}$$

Mediante los métodos adecuados de la Estadística Matemática, sería posible justificar la bondad de este ajuste contrastando la **hipótesis de normalidad** con el empleo del estadígrafo χ^2 de Pearson, tal como ya se realiza en algún otro apartado de esta misma obra. En la Fig. 10 se ha representado gráficamente la función anterior. En realidad, tal representación significa el **ajuste de una función de densidad normal** a la distribución de los caudales observados (por medición de los mismos) o proyectados en la fase de diseño de la zona regable. Utilizando unas tablas de la distribución normal como las que incluimos en el Anexo 1, podemos obtener las áreas de las superficies que están limitadas por la curva normal, el eje de abscisas y las ordenadas en los extremos o límites de los intervalos de clase. Dado que, como es bien sabido, dicha área total es igual a la unidad, resultará que cada una de ellas expresa la probabilidad p_i de que la variable "caudal" tome un valor perteneciente al correspondiente intervalo de clase.

Para proceder al ajuste es necesario transformar los valores observados de la variable Q (en este caso representados por el límite superior L_i de cada intervalo de clase) en *valores tipificados* o "estandarizados", lo que se consigue restando de cada L_i la media aritmética (168.325 l/s) prescindiendo de los decimales (columna 2^a de la tabla 7) y dividiendo dicha diferencia por la desviación típica de valor 6.36 l/s de la distribución observada (3^a columna de la misma tabla), al objeto de poder emplear las tablas de la distribución normal, obtenidas para una distribución de media $\alpha = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$. Así:

¹⁵ Las pruebas no paramétricas o de distribución libre no están sometidas a ciertos requisitos que sí son comunes a las pruebas paramétricas. Fundamentalmente, dichos requisitos se refieren a la distribución que presenta la variable en la población. Por otra parte, son especialmente útiles ante tamaños muestrales reducidos, o bien en los casos en que la variable que nos interese esté medida en una escala ordinal.

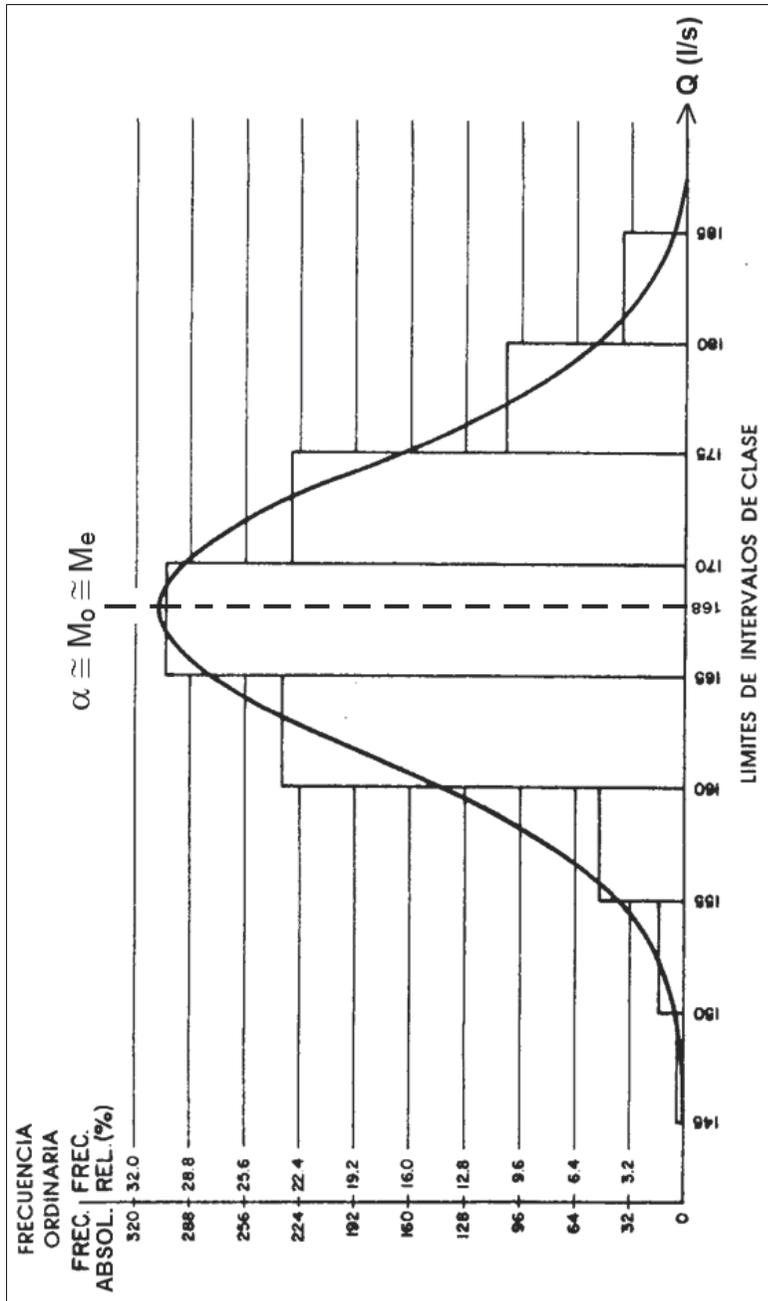


Fig. 10. Distribución campaniforme o gaussiana de Q .

Tabla 7. Ajuste a una distribución normal.

AJUSTE DE UNA DISTRIBUCION NORMAL A LA DE LOS CAUDALES						
L_i	$L_i - 168$	$t = \frac{L_i - 168}{6.36}$	P	P_i	T_i	n_i
150	-18	-2.817	0.002	0.002	2	3
155	-13	-2.034	0.021	0.019	19	15
160	-8	-1.252	0.105	0.084	84	50
165	-3	-0.469	0.319	0.214	214	240
170	2	0.313	0.622	0.303	303	312
175	7	1.095	0.864	0.242	242	235
180	12	1.878	0.971	0.107	107	108
∞	∞	∞	1.000	0.029	29	37
				1.000	1 000	1 000

Fuente: elaboración propia.

Las áreas existentes bajo la curva normal se obtienen como diferencia entre los valores correspondientes de la función de distribución. A partir de estos valores tipificados se puede emplear la tabla correspondiente (ver Anexo 1) de la Distribución Normal, calculando mediante las oportunas interpolaciones, en su caso, los valores de las probabilidades P, tales que:

$$P_1 = \int_{-\infty}^{-2.817} f(t) \cdot dt = 0.002; \quad P_2 = \int_{-\infty}^{-2.034} f(t) \cdot dt = 0.021; \quad \text{etc.}, \text{ siendo:}$$

$$t = Z = (x - \alpha) / \sigma.$$

La diferencia entre dos P_i consecutivas determina las probabilidades p_i de que la variable caudal Q tome un valor comprendido entre L_{i-1} y L_i , de tal manera que:

$$p_1 = P_1 = 0.002; \\ p_2 = P_2 - P_1 = 0.021 - 0.002 = 0.019; \quad \text{etc.}$$

Las frecuencias teóricas son proporcionales a las correspondientes áreas existentes bajo la curva normal. Distribuyendo la frecuencia total, o sea: $n = 1000$ acequias, en nuestro caso, proporcionalmente respecto a las probabilidades p_i , se obtienen las *frecuencias teóricas* T_i , que corresponderían a los caudales observados si la variable Q se ajustara *exactamente* al modelo teórico de la distribución normal. **En nuestro ejemplo, las discrepancias entre los valores observados n_i y los teóricos T_i son lo suficientemente pequeñas como para que pueda aceptarse la hipótesis de que la variable hidráulica Q sigue una distribución normal**, a pesar de la determinación que realizaremos a continuación.

En cualquier caso puede hacerse, como ya se ha apuntado, un contraste de la bondad del ajuste utilizando el estadígrafo χ^2 de Pearson, con $(n-1)$ grados de libertad, a saber:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(n_i - T_i)^2}{T_i},$$

puesto que $\forall T_i > 5$, a excepción del correspondiente al primer intervalo de clase L_1 , ya que $T_1 = 2$. De este modo, se tendrá:

$$\chi^2 = \frac{(3-2)^2}{2} + \frac{(15-19)^2}{19} + \frac{(50-84)^2}{84} + \frac{(240-214)^2}{214} + \frac{(312-303)^2}{303} + \\ + \frac{(235-242)^2}{242} + \frac{(108-107)^2}{107} + \frac{(37-29)^2}{29} = 20.95.$$

El valor de χ^2 con: $8 - 1 = 7$ g.l., para una probabilidad del 5% es de $14.067 < 20.95$, según puede comprobarse en la tablas A5 y A6 del Anexo 1 del Apéndice, *luego se rechaza la hipótesis nula y, en su consecuencia, el ajuste o asimilación a una distribución normal será sólo orientativo, pero no aceptable estrictamente.*

La prueba de normalidad también puede contrastarse mediante diversos procedimientos y para su realización se hallan diferentes coeficientes y se comparan con valores críticos calculados a partir de los datos muestrales, como el contraste basado en el coeficiente de asimetría calculado a partir del momento central de orden 3, o bien mediante el contraste basado en el estimador de escala de doble peso. Pero quizás el más idóneo sería el contraste o prueba de normalidad de Geary (1938) que, en nuestro caso, vendría dado por:

$$G = \frac{\sum_{i=1}^8 |x_i - 168|}{\sqrt{n \times \sum_{i=1}^8 (x_i - 168)^2}} = \frac{\sum_{i=1}^8 |x_i - 168|}{n\sigma} = \frac{81}{1000 \times 6.36} = 0.0127358,$$

debiéndose utilizar el siguiente estadístico de prueba:

$$\mu = G \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0.0127358 \times 1.2533 \cong 0.016 .$$

Debe tenerse en cuenta al respecto que, para una distribución normal, el valor de G es: $\sqrt{2/\pi} = 0.7979$. La anterior prueba de Geary es más reciente que la prueba χ^2 que hemos visto antes o que la de Smirnov, que son las más usadas, aún cuando éstas son aplicables a cualquier distribución. Sin embargo, la prueba de Geary se refiere exclusivamente a la distribución normal y sus características de sencillez, potencia y aplicación la hacen actual e importante en la teoría de la normalidad. Por otra parte, basándose en dicha prueba de normalidad, que en las décadas de los años 30 y 40 del pasado siglo resultaba sencilla de aplicar y con buenas propiedades en cuanto a la potencia, se han ido construyendo nuevas pruebas de normalidad para muestras censuradas que se fundamentan en que en una distribución normal el cociente entre la desviación media absoluta y la desviación típica es una constante.

8.2. DETERMINACIÓN Y FIABILIDAD DEL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN NO LINEAL

Podemos, no obstante, calcular el coeficiente de determinación o crítico del ajuste anterior, a partir de la siguiente fórmula de la varianza residual (varianza de los residuos o errores):

$$S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n} = \frac{2044}{8} = 255.5 \quad ; \quad S_{n_1}^2 = 12617 \quad ;$$

$$R = r^2 = 1 - \frac{S_e^2}{S_{n_1}^2} = 1 - \frac{255.5}{12617} = 0.980 = 98\% ,$$

lo que implica un coeficiente de correlación de:

$$r = \pm \sqrt{0.980} = \pm \mathbf{0.990} = \pm \mathbf{99\%} ,$$

que resulta suficientemente aceptable, razón por la que aceptaremos como válido el presente ajuste normalizado.

Además, la “varianza explicada” mide la variación de la variable que queda explicada por la ecuación de regresión obtenida, de tal modo que:

$$S_{n_1}^2 (\text{varianza explicada}) = S_{n_1}^2 (\text{varianza total}) - S_e^2 (\text{varianza residual}) =$$

$$= 12617 - 255.5 = 12361.5.$$

Por otra parte, y por lo que se refiere a la fiabilidad del coeficiente de correlación hallado r , definimos la variable aleatoria:

$$z = \frac{1}{2} \times \ln \left[\frac{(1+r)}{(1-r)} \right] \quad ; \quad e^{2z} = \left[\frac{(1+r)}{(1-r)} \right] \quad ; \quad \text{con: } \rho = 0.990 \text{ y } n = 8.$$

Se trata de determinar un intervalo de valores entre los que puede razonablemente esperarse (con una probabilidad del 95%) que se encuentre r , con media:

$$\mu_z = \frac{\ln \frac{1+\rho}{1-\rho}}{2} = \frac{\ln \frac{1.99}{0.01}}{2} = 2.647 ,$$

y desviación típica: $\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447$. El intervalo de confianza será:

$$z = \mu_z \pm 2 \cdot \sigma_z = 2.647 \pm 0.894 = 3.541 \text{ y } 1.753,$$

valores éstos que corresponden a: $r_1 = 0.998$ y $r_2 = 0.942$.

Así pues, puede afirmarse que la probabilidad de que se cumpla la desigualdad: $0.942 < r < 0.998$, es del 95%.

8.3. TOMA DE DATOS E INTERVALO DE CONFIANZA DE LA PROPORCIÓN DE ACEQUIAS DE UN CAUDAL DETERMINADO

8.3.1. Tamaño de la muestra

En base al ejemplo aquí desarrollado, sabemos de la contemplación de la tabla 1 que, con una población o universo de tamaño $n = 1000$ acequias de riego, por ejemplo, el 24% de ellas tiene un caudal comprendido en el intervalo de clase $L_4 = 160-165$ l/s. Pues bien, veamos qué sucede si, con el objetivo de simplificar una toma de datos de dichas acequias tomamos una muestra representativa del conjunto de la zona regable, para lo que, en primer lugar, deberemos determinar el tamaño muestral requerido para estimar con la deseada precisión.

Si adoptamos “a priori” un nivel de confianza, v. gr., del 95% (ver Anexo 1, tabla A2), con unas probabilidades de $p = 24\%$ (a favor) y $q = 76\%$ (en contra), y un error muestral de estimación máximo permisible de $\pm 5\%$, se tendrá:

$$\left\{ \begin{array}{l} n' = \text{tamaño de la muestra} \\ z_{\alpha/2} = \text{nivel de confianza del 95\%} \\ n = n^{\circ} \text{ total de acequias (tamaño de la población)} = 1000 \\ e = \text{error máximo de estimación muestral} \end{array} \right.$$

y el tamaño muestral requerido, con estos condicionantes, vendrá dado por:

$$n' \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 \times p \times q \times n}{e^2(n-1) + z_{\alpha/2}^2 \times p \times q} = \frac{1.96^2 \times 0.24 \times 0.76 \times 1000}{0.05^2 \times 999 + 1.96^2 \times 0.24 \times 0.76} = 219.1 \approx 220 \text{ acequias.}$$

Alternativamente, el tamaño de la muestra a obtener puede también determinarse empleando el muestreo aleatorio simple, partiendo de que si se tratara de una población infinita ($n = \infty$), se tendría que:

$$n_{\infty} = \frac{z_{\alpha/2}^2 \times \sigma^2}{e^2} = \frac{1.96^2 \times 6.36^2}{0.05^2} = 62156 \text{ acequias.}$$

Como evidentemente sucede que:

$$[n = 1000] < [n_{\infty}(n_{\infty} - 1) = 62156 \times 62155],$$

procede seguir operando para obtener dicho tamaño del siguiente modo, tratándose de una población finita, con $n = 1000$ acequias, a saber:

$$n' = \frac{n_{\infty}}{1 + \frac{n_{\infty}}{n}} = \frac{62156}{1 + \frac{62156}{1000}} = 984 \text{ acequias,}$$

valor éste que prácticamente implica muestrear la totalidad (el 98.4%) de la población o universo de acequias existente en la zona regable (que supondría un proceso censal y no muestral), lo que constituye un absurdo, por lo que se descarta la aplicación de dicho método y se decide fijar el tamaño de la muestra de $n' = 220$ acequias de riego anteriormente obtenido.

8.3.2. Intervalo de confianza

Una vez realizado el trabajo de campo y efectuado el conteo correspondiente en gabinete, se han encontrado $x = 50$ acequias cuyo caudal se halla comprendido entre 160 y 165 l/s, lo que representa una proporción del:

$$p = \frac{x}{n'} = \frac{50}{220} \times 100 = 22.73\% \text{ de la muestra.}$$

Siendo p la proporción muestral, si es:

$$n' \cdot p = 220 \times 0.2273 \cong 50 > 5, \text{ y además:}$$

$$n' \cdot p \cdot q = 220 \times 0.2273 \times 0.7727 \cong 39 > 5,$$

puede aproximarse la distribución de probabilidad binomial por una distribución normal, pudiendo considerar que p tiene una distribución aproximadamente normal de media o esperanza matemática y varianza de la variable aleatoria (x/n'):

$$\begin{cases} E(x/n') = \frac{n'p}{n'} = p = 0.2273 = 22.73\% \\ \text{VAR}(x/n') = \frac{n'pq}{n'} = pq = 0.2273 \times 0.7727 = 0.1756 \end{cases}$$

De este modo, algunas propiedades de esta distribución de probabilidad son las siguientes:

Tabla 8. Características de la distribución binomial.

ESTADÍSTICO	VALOR
Media	$m = n' \times p = 220 \times 0.2273 = 50$ acequias
Varianza	$s^2 = n' \times p \times q = 220 \times 0.2273 \times 0.7727 = 38.6$
Desviación típica	$s = \sqrt{n' \times p \times q} = \sqrt{38.6} = 6.22 \approx 6$ acequias
Coefficiente de sesgo o asimetría (Fisher)	$g_1 = \frac{q-p}{s} = \frac{0.7727 - 0.2273}{6.22} = 0.088$
Coefficiente de apuntamiento o curtosis (Fisher)	$g_2 = 3 + \frac{1-6pq}{s^2} = 3 + \frac{1-6 \times 0.2273 \times 0.7727}{38.6} = 2.999 \approx 3$

Se confirma, pues, la existencia de una distribución aceptablemente simétrica (en curvas simétricas como la normal, se cumple que: $g_1 = g_1^2 = 0$). También la determinación efectuada permite asegurar que la distribución es *mesocúrtica* y aproximadamente normal (la curva normal, como es sabido, tiene un valor: $g_2 = 3$).

Como la muestra es de tamaño suficientemente grande, podemos afirmar, por el teorema central del límite, que la variable

tipificada: $\frac{\frac{x}{n'} - p}{\sqrt{\frac{p \cdot q}{n'}}}$, tendrá una distribución asintóticamente $N(0,1)$.

Y ello es así porque sabemos por la teoría estadística que si en una población determinada (de acequias de riego, en nuestro caso)

existe una proporción (p) de elementos del tipo A (acequias de caudal comprendido entre 160-165 l/s) y una proporción ($q = 1 - p$) de elementos del tipo B (resto de acequias de la zona regable), el número de elementos (x) del tipo A que aparecen en una muestra de tamaño (n') sigue la distribución binomial $\text{Bin}(n'; p)$, así:

$$P(x) = \binom{n'}{x} p^x \cdot q^{n'-x} = \binom{220}{x} 0.2273^x \times 0.7727^{220-x},$$

en donde podemos considerar el n° combinatorio: $\binom{n'}{x} = \frac{n!}{x!(n'-x)!}$, que representa la probabilidad de encontrar (x) acequias cuyo caudal se halle comprendido en el intervalo de clase L_4 , habiendo analizado una muestra de tamaño $n' = 220$ de dichas conducciones libres de la zona regable en estudio. Como en este caso $x = 50$ acequias, se tendrá que:

$$\begin{aligned} P(50) &= \binom{220}{50} 0.2273^{50} \times 0.7727^{170} = \\ &= \frac{220! \times 0.2273^{50} \times 0.7727^{170}}{50! \times 170!} \approx 0.064 \equiv 6.4\%. \end{aligned}$$

En cualquier caso, la resolución de la expresión anterior puede resultar prolija si no se dispone del *software* adecuado, por lo que suele recurrirse a una aproximación a la distribución normal.

Los límites de confianza o seguridad del 95% aproximados (con un nivel de significación de $\alpha = 0.05$), para la proporción de acequias con este margen de caudal, siendo la correspondiente hipótesis nula $p_0 = 0.24$ que deseamos contrastar frente a la alternativa $p \neq 0.24$, vendrán dados por:

$$P(-z_{\alpha/2} < \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p \cdot q}{n'}}} < z_{\alpha/2}) = P\left(-1.96 < \frac{p - 0.24}{\sqrt{\frac{0.24 \times 0.76}{220}}} < 1.96\right) = 0.95,$$

o bien se tendrá el siguiente intervalo de confianza de la proporción:

$$p_0 - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n'}} < p < p_0 + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n'}}, \text{ esto es:}$$

$$0.24 - 1.96 \sqrt{\frac{0.24 \times 0.76}{220}} < p < 0.24 + 1.96 \sqrt{\frac{0.24 \times 0.76}{220}}, \text{ o sea:}$$

$$(0.184 < p < 0.2964) \equiv (18.40\% < p < 29.64\%),$$

y como sea que el resultado del muestreo ha sido del $p = 22.73\%$, y está comprendido este valor en dicho intervalo de aceptación, debe aceptarse sin mayor problema la hipótesis nula del 24% de acequias de la clase $L_4 = 160\text{-}165$ l/s (marca de clase = 162.5 l/s).

9. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Un caso particular de la distribución de probabilidad gamma $\Gamma(\alpha, a)$ se presenta cuando: $\alpha = 1$, circunstancia que da lugar a la denominada “distribución exponencial”, o bien también conocida como “distribución exponencial negativa”. Mayores especificaciones acerca de la misma pueden hallarse al final del Anexo 1 del Apéndice. O sea, se tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x/\beta}}{\beta}, & \forall x > 0 \\ 0, & \forall x \leq 0 \end{cases}$$

En nuestro caso, asimilamos: $\beta = \bar{X} = 168.713$ l/s (media aritmética de la distribución o esperanza matemática de la misma), con lo que:

$$f(x) = \frac{1}{168.713} \cdot e^{-\frac{x}{168.713}}.$$

Así pues, si se trata, por ejemplo, de saber la probabilidad de encontrar, en esta zona regable, una acequia de riego de caudal máximo inferior a 160 l/s, el problema estriba en calcular la integral definida:

$$F(x < 160 \text{ l/s}) = \int_{135}^{160} \frac{e^{-\frac{x}{168.713}}}{168.713} \cdot dx = \left. \begin{cases} t = x/168.713 \\ dx = 168.713 \cdot dt \end{cases} \right\} =$$

(y haciendo el correspondiente cambio de variable)

$$= \int_{0.80}^{0.95} e^{-t} \cdot dt = [-e^{-t}]_{0.80}^{0.95} = -e^{-0.95} + e^{-0.80} = 0.449 - 0.386 = 0.063 = 6.3\%$$

resultado éste que diverge algo del que se deduce de la tabla 1, donde correspondería el valor $F_3 \hat{=} 6.8\%$, como se puede comprobar. De hecho, la determinación del grado de exactitud del ajuste de la distribución anterior a la distribución teórica exponencial se habría de contrastar mediante un *test* de hipótesis χ^2 con (k-1) grados de libertad, siendo **k** el número de pares de clase comparados. En nuestro caso, tendríamos que:

$$e_i = \frac{e^{-\frac{x_i}{168.713}}}{168.713} \cdot n = \frac{5.93}{e^{x_i/168.713}}; \text{ obviamente, el valor del estadígrafo es:}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^8 \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i},$$

que resulta ser elevado e inapropiado, habida cuenta del carácter descendente de esta distribución teórica de probabilidad, que no se corresponde con la realidad del caso práctico cuya resolución nos ocupa, con lo que, la discrepancia entre los valores teóricos (propios de la distribución exponencial) y los reales es bastante grande, y haría falta buscar una distribución mejor, circunstancia que excede largamente las pretensiones de nuestro problema, ya que $\chi^2_{0.95}$ (5 g.l.) = 11.07, en el caso de escoger una región crítica del 5%, según puede comprobarse en las tablas A5 y A6 del Anexo 1 del Apéndice.

10. CORRECCIÓN POR AGRUPAMIENTO EN "CLASES"

Veamos, por último, que por haberse realizado, en este ejemplo práctico, un agrupamiento en clases o intervalos de amplitud: $c = 5$ l/s de los valores de la variable hidráulica analizada (caudal de las diferentes acequias que suministran agua a la zona regable), procede aplicar la corrección de Sheppard para la determinación de la desviación típica más ajustada de los datos del problema, tal como se ha puesto de manifiesto en el anterior epígrafe 3.2.1. Esto es, se obtiene el valor de la varianza corregida:

$$\sigma_c^2 = \sigma^2 - \frac{c^2}{12} = 168.44^2 - 168.32^2 - \frac{5^2}{12} = 38.33 \text{ l}^2/\text{s}^2,$$

y también: $\sigma_c = \sqrt{38.33} = 6.19 \text{ l/s}$ (desviación típica corregida), que lógicamente, resultan ser de alguna menor cuantía que en la primera determinación efectuada. Ello podría obligar a una ligera revisión de los cálculos anteriores en los que se haya hecho intervenir a la expresada medida de la dispersión espacial por la zona regable de los valores de la variable hidráulica estudiada.

11. ESTUDIO DE LA FUNCIÓN $\lambda = f(R)$

11.1. LA CONCEPCIÓN TEÓRICA DEL PROBLEMA

El “factor de fricción de Fanning” que recibe el nombre del ingeniero americano John Thomas Fanning (1837-1911), es un número adimensional utilizado en los cálculos del flujo de los fluidos.

En el caso de las conducciones forzadas, la tensión de cizallamiento se relaciona con la pérdida de presión multiplicando la tensión de cizallamiento por el área de la pared (para un tubo) y dividiendo por el área de flujo en sección transversal (por un tubo). La fricción de la cabeza puede estar relacionada con la pérdida de presión debido a la fricción dividiendo la pérdida de presión por el producto de la aceleración debida a la gravedad y la densidad del fluido circulante.

Por otra parte, es posible y aconsejable, en nuestro caso de conducciones libres, el estudio de la distribución del coeficiente de Fanning según los diversos radios hidráulicos medios y las diferentes categorías de rugosidad (12). Así, dicha distribución respondería a una función hiperbólica del tipo:

$$\lambda = A/(R-a)^\alpha = f(R) , \text{ donde:}$$

a = valor del radio hidráulico medio R más pequeño (m).
 λ = coeficiente de Fanning correspondiente a un determinado radio hidráulico R.
R = radio hidráulico medio (m), variable independiente.
A y α = parámetros adimensionales que definen la distribución que nos ocupa para cada una de las doce categorías de rugosidad (K).

Es perfectamente lógico que la curva en cuestión sea asintótica (tenga ramas hiperbólicas) para: $R = a$ y $\lambda = 0$, o sea:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{R \rightarrow \infty} = A/(R-a)^\alpha = A/\infty = 0, \text{ (asíntota horizontal, paralela al eje OR,} \\ \text{coincidiendo con el eje de abscisas).} \\ \lim_{R \rightarrow a} = A/(R-a)^\alpha = A/0 = \infty, \text{ (asíntota vertical, paralela al eje O}\lambda\text{).} \end{array} \right.$$

Su representación gráfica simplificada, nos llevaría a la siguiente configuración, donde el valor del radio hidráulico mínimo de un conjunto observado o proyectado de conducciones libres constitutivas de una cierta zona regable actuará de cota inferior, así:

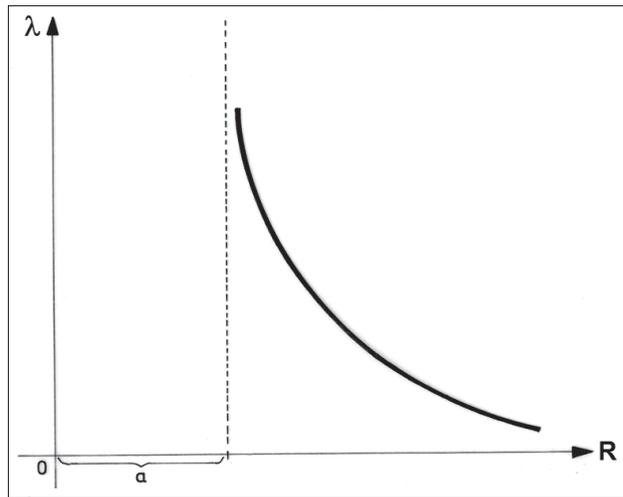


Fig. 11. Representación gráfica simplificada de la función $\lambda = f(R)$.

Si ahora desplazamos el eje de ordenadas hasta el punto que: $R = a$, entonces la función estudiada se convertirá en, simplemente:

$$\lambda = A/R^\alpha = A \cdot R^{-\alpha},$$

en la que hemos considerado que: $a = 0$, o sea, el valor de R más pequeño es nulo o, al menos, inapreciable ($a = 0.01$ m en las tablas consideradas). De esta manera, el sentido de la variabilidad de las dos variables λ y R es contrario para cada categoría de rugosidad K , como puede contemplarse en las tablas correspondientes.

Se tratará, en definitiva, del ajuste de una función potencial por técnicas de regresión no lineal mínimo-cuadrática.

Evidentemente, la expresión anterior se puede escribir (tomando logaritmos naturales o neperianos) así:

$$\ln \lambda = \ln A - \alpha \cdot \ln R.$$

Un valor de la unidad para α ofrece una cónica hipérbola rectangular, o sea que tratase del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su producto de coordenadas ($R \cdot \lambda$) es una constante, A. Así:

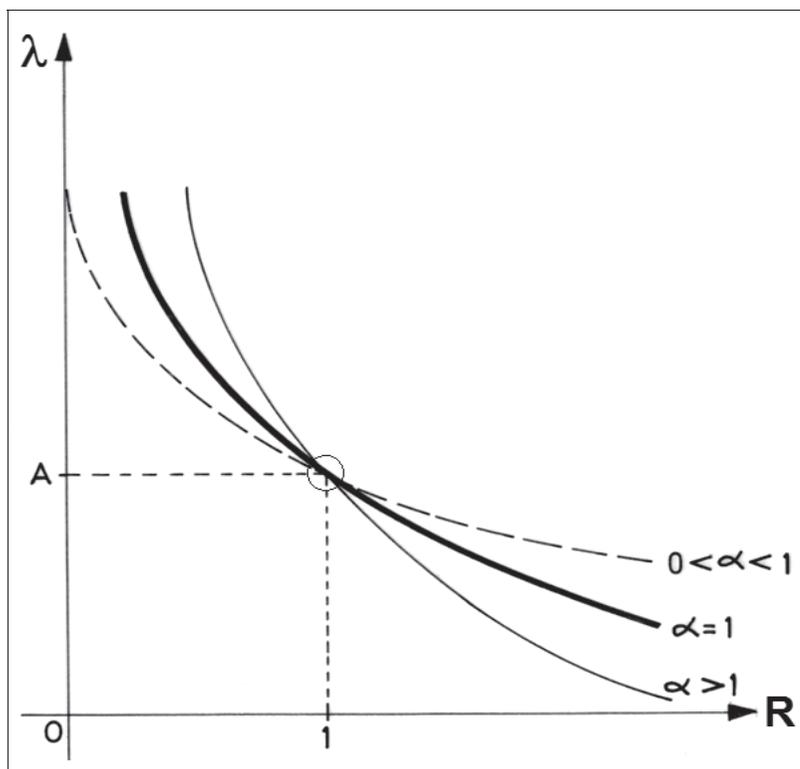


Fig. 12. Función $\lambda = f(R)$ según los valores de α .

De hecho, esta transformación doblemente logarítmica se utiliza frecuentemente en Estadística porque corresponde al supuesto de una **elasticidad constante** entre λ y R , y la simple

aplicación de los métodos lineales a los logaritmos de las variables proporciona directamente una estimación de esta elasticidad.

11.2. SIGNIFICACIÓN DEL PARÁMETRO α

11.2.1. En relación al coeficiente de Fanning

Veremos aquí el significado del parámetro α , para la cual expondremos diferentes interpretaciones, algunas de ellas en contradicción aparente. La función que nos ocupa, de dibujarse a escala doblemente logarítmica, es una recta. En efecto, tomando logaritmos neperianos o naturales en la expresión inicial, se obtiene:

$$\ln \lambda = \ln A - \alpha \cdot \ln R = \beta - \alpha \cdot \ln R ,$$

donde se ha substituido: $\ln A = \beta$.

Si ahora representamos esta recta, resulta que $-\alpha$ es el coeficiente angular o pendiente negativa de dicha recta, dado que la derivada de esta función vendrá dada por: $d(\ln \lambda)/d(\ln R) = -\alpha$. Así:

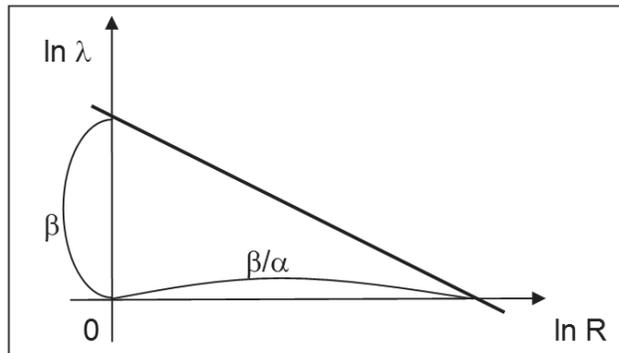


Fig. 13. Representación logarítmica de la función $\lambda = f(R)$.

Si calculamos ahora la elasticidad de la función anterior (hemos de recordar que el concepto teórico de “elasticidad” o “derivada elástica” de la función λ viene dado por el límite del cociente de los incrementos relativos de esta función y de la variable R independiente o explicativa “radio hidráulico medio”, cuando el incremento absoluto de esta última tiende a cero), se obtiene:

$$\frac{E\lambda}{ER} = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta\lambda/\lambda}{\Delta R/R} = \frac{d\ln\lambda}{d\ln R} = \frac{d\lambda/\lambda}{dR/R} = \frac{R}{\lambda} \times \frac{d\lambda}{dR} = \frac{R}{AR^{-\alpha}} A(-\alpha)R^{-\alpha-1} = -\alpha .$$

Entonces, se tiene que α es el coeficiente de elasticidad de la función $\lambda = f(R)$ que estamos buscando.

Como ya se ha demostrado anteriormente: $E\lambda/ER = -\alpha$, pero: $E\lambda/ER = d\lambda/\lambda \div dR/R$, entonces se tendrá: $d\lambda/\lambda \div dR/R = -\alpha$, y operando convenientemente, resultará la ecuación diferencial de variables separadas:

$$d\lambda/\lambda = -\alpha \cdot dR/R \quad (2)$$

siendo: $d\lambda/\lambda$ el decrecimiento relativo del coeficiente de Fanning cuando se produce una variación del radio hidráulico R.

En efecto, integrando mediante una simple cuadratura, en la ecuación anterior (2), obtendremos:

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = -\alpha \times \int \frac{dR}{R} \quad ; \text{ y entonces:}$$

$\ln \lambda = -\alpha \cdot \ln R + \ln A = \ln (AR^{-\alpha})$, de donde se reconstruye la integral general:

$$\lambda = A \cdot R^{-\alpha} ,$$

y donde los diferentes valores de la constante A, específicos de cada categoría de rugosidad K de las paredes de la acequia, nos darán otras tantas integrales particulares.

De la ecuación (2) podemos extraer la siguiente interpretación del parámetro α : **Es la relación existente entre el decrecimiento relativo del coeficiente de Fanning y el crecimiento del radio hidráulico de la conducción.** Además el signo negativo de la ecuación (2) es perfectamente lógico, ya que significa que un crecimiento o decrecimiento del radio hidráulico originará, respectivamente, una disminución o aumento del coeficiente de Fanning (1902).

Si consideramos la variación absoluta del radio hidráulico como constante, o sea: $dR = \text{cte.}$, entonces dR/R (crecimiento relativo de R) disminuye cuando R aumenta. De aquí se puede deducir la siguiente conclusión: *El decrecimiento relativo del coeficiente de Fanning a medida que el radio hidráulico R aumenta es cada vez más pequeño, y la disminución del mismo es proporcional al nivel absoluto (R) del radio hidráulico R .*

En efecto, la ecuación (2) nos dice que: $d\lambda/\lambda = -\alpha \cdot dR/R$.

Si consideramos $dR = \text{cte.}$ $\rightarrow dR/R$ disminuye al crecer R . Por otra parte, es una constante, pero $d\lambda/\lambda$ sólo depende de dR/R y, en definitiva, por ser: $dR = \text{cte.}$, sólo depende de R , de manera que, el cociente $d\lambda/\lambda$ (decrecimiento relativo del coeficiente de Fanning) depende solamente del valor del radio hidráulico y, naturalmente, del valor del coeficiente α ¹⁶.

Si hacemos $dR/R = \text{cte.}$ Entonces la variación relativa del coeficiente de Fanning ($d\lambda/\lambda$) es proporcional al parámetro α (ver la anterior ecuación 2). Si α es grande, una variación porcentual pequeña del radio R asignará una variación grande del coeficiente de Fanning, y viceversa si α es pequeña, sucede justamente lo contrario. Podría decirse, pues, que la distribución varía con el valor del parámetro α .

Antes de dar otra interpretación del parámetro α , hemos de hacer, a efectos clasificadores, un desarrollo estadístico teórico de la función estudiada.

Definimos la función $\lambda = f(R)$ como aquella que nos da el coeficiente de Fanning en función de R ; pero también se puede definir en términos de probabilidad o de frecuencia relativa, así: *La función $\lambda = f(R)$ ofrece la probabilidad de que el radio hidráulico medio alcance valores superiores a un valor predeterminado R .* Precisamente, esta definición nos resultará altamente útil para abordar los conceptos expuestos en el epígrafe siguiente de nuestro estudio.

En efecto, expresado matemáticamente, tenemos que:

¹⁶ También otra manera de enunciar esta ley es que "a medida que aumenta el radio hidráulico R , resulta más fácil pasar a un nivel de R superior".

$$P(R) = A \cdot R^{-\alpha} = \Pr (\varepsilon > R) .$$

O sea, la probabilidad de que la variable aleatoria estadística ε sea mayor que 0.

Recordando que las funciones de distribución de una variable aleatoria estadística R se definen por: $F(R) = \Pr (\varepsilon \leq R)$, podemos relacionar la función $P(R)$ con la función de distribución del radio hidráulico medio $F(R)$ de la siguiente forma:

$$F(R) = 1 - P(R) = 1 - A \cdot R^{-\alpha} \quad (3)$$

ya que los sucesos son contrarios o complementarios y la relación precedente (3) es la que liga las equiprobabilidades laplacianas, en estos casos.

La función de densidad será, pues, la función derivada:

$$f(R) = F'(R) = d/dR (1 - A \cdot R^{-\alpha}) = (\alpha \cdot A) / (R^{\alpha+1}) .$$

Si queremos saber, v. gr., cuál es la proporción de valores de λ en que su radio medio R se encuentra entre dos valores dados R_1 y R_2 , operaremos de la siguiente manera, teniendo en cuenta la propiedad aditiva del intervalo de integración $[R_1, R_2]$ o relación de Chasles y la posterior aplicación de la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} f(R) \cdot dR &= [F(R)]_{R_1}^{R_2} = F(R_2) - F(R_1) = \\ &= (1 - A \cdot R_2^{-\alpha}) - (1 - A \cdot R_1^{-\alpha}) = A \cdot (R_1^{-\alpha} - R_2^{-\alpha}). \end{aligned}$$

11.2.2. En relación a la distribución de los valores de R en una zona regable

Otra interpretación interesante que se extrae del estudio analítico de la función $\lambda = f(R)$ deriva de cambiar el concepto de la variable funcional de dicha expresión. En efecto, substituyendo el concepto de λ (coeficiente de Fanning) por el del número de conducciones libres existentes en las diferentes subzonas de una zona regable, podremos estudiar la distribución de cualquier variable hidráulica de interés (caudales, presiones, diámetros, velocidades de circulación del agua, etc.), y particularmente de los

radios hidráulicos medios de las diferentes conducciones (v. gr., acequias a cielo abierto). En este caso, λ nos ofrecerá el n° de conducciones libres de la subzona regable cuyo radio hidráulico medio es superior a un cierto valor de R prefijado. También del estudio de los diferentes valores del parámetro α según las diversas funciones obtenidas para cada subzona o unidad de actuación, podremos establecer comparaciones entre ellas por lo que se refiere al equilibrio en su distribución, de tal modo que cuanto mayor sea el valor de dicho parámetro, mejor será también la distribución de la variable hidráulica que nos ocupe.

De hecho, el tema de la uniformidad en la distribución de las variables hidráulicas por una zona regable (o por un área a sanear, si se trata de un proyecto de avenamiento o drenaje agrícola), como la R , debe ser objeto de un estudio más profundo y específico en el proyecto técnico correspondiente. Enfocando así el problema, las figuras anteriores nos darán el número de conducciones (acequias o desagües) cuyo radio hidráulico medio es mayor que un valor determinado de R , mientras que el parámetro α constituirá una medida de la uniformidad de la distribución de los radios hidráulicos medios de las diferentes conducciones (libres o forzadas) a lo largo y ancho de la zona regable en estudio. Dicha medida, como es lógico, tiene tanto sentido estudiarla para el caso del diseño de una red como para la evaluación posterior de la uniformidad de la misma, pudiendo constituir un parámetro de calidad de dicha red.

Si ahora llamamos $a = R_0$ al nivel mínimo de los radios hidráulicos medios considerados, que en las tablas antes presentadas ofrece un valor de: $R_0 = a = 0.01$ m, la $P(R_0) = 1$, que es la probabilidad total, pues, parece claro que todas las conducciones tendrán, como mínimo, este valor de su R . Como que: $P(R_0) = A \cdot R_0^{-\alpha} = 1$, podemos deducir el valor de la constante: $A = R_0^{\alpha}$ y sustituyendo las fórmulas obtenidas hasta aquí, nos aparecen las nuevas expresiones, de gran utilidad, a saber:

$$P(R) = (R_0/R)^{\alpha} \quad (4)$$

sólo definida para $R > R_0$ ya que R_0 es el nivel de radio mínimo y además porque la probabilidad no puede ser, en ningún caso, mayor de la unidad. De otro modo:

$$F(R) = 1 - (R_0/R)^\alpha \quad (5)$$

y su derivada será:

$$f(R) = \frac{\alpha \cdot R_0^\alpha}{R^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{R_0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\alpha+1} = \frac{\alpha}{R} \times \left(\frac{R_0}{R}\right)^\alpha \quad (6)$$

que tomará el valor 0 si $R \leq R_0$.

Vamos a calcular, seguidamente, la esperanza matemática o valor medio de la distribución continua de los radios hidráulicos medios que, como sabemos, vendrá dada por la expresión:

$$E(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} R \cdot f(R) \cdot dR .$$

Como en este caso de distribución de la variable R , estos límites de integración no varían de $-\infty$ a $+\infty$ sino que están acotados inferiormente por el valor $R_0 < R$, $\forall R$, la esperanza matemática será:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon) &= \int_{R_0}^{+\infty} R \cdot f(R) \cdot dR = \int_{R_0}^{+\infty} R \cdot \frac{\alpha}{R_0} \cdot \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\alpha+1} dR = \int_{R_0}^{+\infty} R^{-\alpha} \cdot \alpha \cdot R_0^\alpha \cdot dR = \\ &= \alpha \cdot R_0^\alpha \cdot \int_{R_0}^{+\infty} R^{-\alpha} \cdot dR = -\frac{\alpha \cdot R_0^\alpha}{\alpha - 1} \cdot \left[\frac{1}{R^{\alpha-1}} \right]_{R_0}^{+\infty}, \end{aligned}$$

que es una integral impropia de primera o bien de tercera especie, en función de la continuidad o no de la expresión que conforma el integrando o función subintegral.

Esta expresión, sin embargo, carece de sentido si $\alpha \leq 1$. En efecto, analizamos los dos casos siguientes:

a) Si $\alpha = 1 \rightarrow E(\varepsilon) = - (R_0/0) \cdot [(1/\infty)^0 - (1/R_0)^0]$, que es indeterminado.

b) Si $\alpha < 1 \rightarrow E(\varepsilon) = - (\alpha \cdot R_0^\alpha)/(\alpha-1) \cdot [1/R^h - 1/R_0^h]$, siendo $h < 0$,

razón por la que, al substituir los límites, nos sale la esperanza matemática de valor infinito, circunstancia que no es posible en ningún caso. Sólo es factible, efectivamente, para el caso $\alpha > 1$ en que la esperanza matemática vale:

$$E(\varepsilon) = -\frac{\alpha \cdot R_0^\alpha}{\alpha - 1} \left[\frac{1}{\infty^{\alpha-1}} - \frac{1}{R_0^{\alpha-1}} \right] = \frac{\alpha \cdot R_0^\alpha}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{R_0^{\alpha-1}} = \frac{\alpha \cdot R_0}{\alpha - 1} \quad (6')$$

Ahora bien: $E(\varepsilon) = \bar{X} = \frac{\alpha \cdot R_0}{\alpha - 1}$, siendo \bar{X} la media aritmética de los radios hidráulicos de la subzona regable en estudio.

De aquí, podemos extraer una interpretación interesante del parámetro α , a saber:

$$\bar{X} = \frac{\alpha \cdot R_0}{\alpha - 1} \quad ; \quad \bar{X} \cdot \alpha - \bar{X} = \alpha \cdot R_0 \quad ; \quad \alpha(\bar{X} - R_0) = \bar{X} \rightarrow \alpha = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - R_0}.$$

Así pues, a mayor diferencia existente entre el radio medio y el radio mínimo de las conducciones de la zona regable (esto es, a $|\bar{X} - R_0|$ mayor) el valor del parámetro α es menor y viceversa, como tendremos ocasión de comprobar en los casos prácticos. Pero el hecho de que, en una determinada subzona regable, el radio medio y el radio mínimo sean más o menos próximos o distantes puede relacionarse con la mayor o menor uniformidad en la distribución de la variable hidráulica analizada R; entonces, según esta interpretación, para un coeficiente α mayor la uniformidad hidráulica es también mayor y recíprocamente.

También podremos corroborar que la distribución de R será tanto más equilibrada cuanto menores sean las diferencias existentes entre las diversas subzonas. Lo mismo puede afirmarse de las restantes variables hidráulicas cuya uniformidad en su distribución, por una zona regable cualquiera, se pretenda analizar.

Hay que tener en cuenta, por otra parte, que el empleo del coeficiente α como medida de la uniformidad en la distribución por un territorio de una cierta variable hidráulica puede resultar inconveniente en el caso de que la función de ajuste estadístico MCO potencial en cuestión no resulte suficientemente relevante acerca del comportamiento de ambas variables del problema, lo que

nos obligaría a buscar otros índices o parámetros indicadores más fiables.

Veamos, en este sentido, que en el apartado 2.2 de este mismo libro se propone la utilización alternativa del índice de Gini, del índice de concentración y la curva de Lorenz o bien del índice de Williamson, para solventar exitosamente la susodicha circunstancia.

En efecto, en anteriores epígrafes se analiza la distribución, como variable hidráulica, del caudal expresado en litros/segundo de 1000 acequias de riego por una extensa zona regable. El menor valor de dicha variable corresponde a un gasto de cuantía:

$$x_0 = a = 120 \text{ l/s,}$$

con lo que podemos elaborar la siguiente tabla 9 con las frecuencias acumuladas descendentes¹⁷ $N_i \downarrow$, siendo x_i el nivel del caudal e y_i el número de conducciones abiertas de caudal superior a x_i :

Tabla 9. Frecuencias acumuladas descendentes.

x_i	y_i	%
120	1000	100.0
150	997	99.7
155	982	98.2
160	932	93.2
165	692	69.2
170	380	38.0
175	145	14.5
180	37	3.7

Fuente: elaboración propia.

Pues bien, si ahora intentásemos ajustar, a esta distribución de frecuencias por el método MCO, una expresión potencial del tipo: $y = A \cdot x^{-\alpha}$, como la que venimos estudiando hasta ahora, resultaría lo siguiente:

¹⁷ Una propiedad interesante es que las representaciones gráficas de las frecuencias absolutas acumuladas ascendentes y descendentes se cortan, precisamente, en el valor de la variable estadística correspondiente a la mediana M_e de la distribución de frecuencias en estudio.

Variable independiente: X

V. Dependiente:	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf.	A=b ₀	-α=b ₁
Y	POW	0.427	6	4.48	0.079	1.7E+16	-6.1771

que ofrece la expresión analítica: $Y = 1.7e^{16} \cdot x^{-6.1771}$,

con la siguiente representación gráfica:

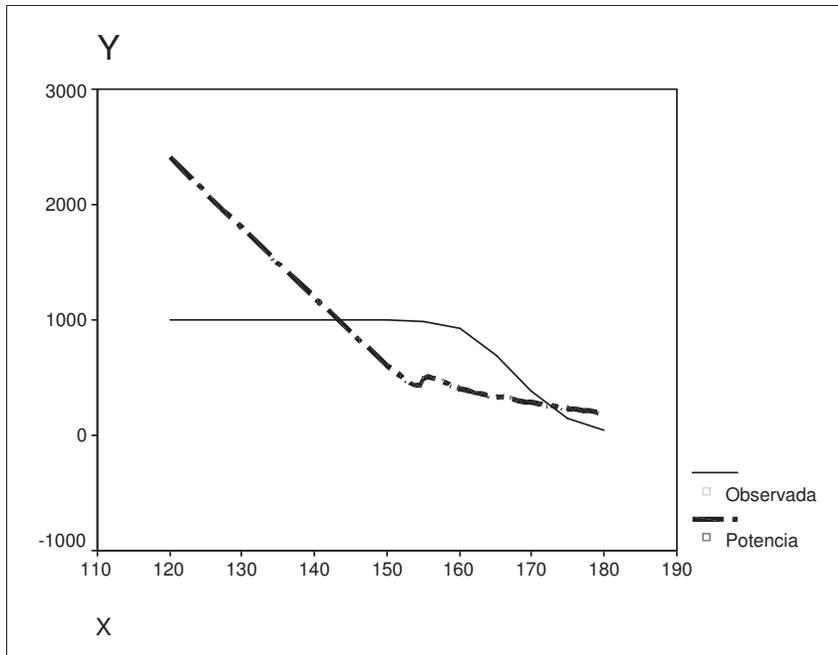


Fig. 14. Ajuste MCO a una función potencial.

, con valores muy bajos de R^2 y de F, como puede comprobarse, razón por la que descartamos, en este caso, su aplicación. La mera contemplación de la figura 14 anterior reafirma, sin duda alguna, lo aseverado.

11.3. FUNCIÓN LOGARÍTMICO-NORMAL O ECUACIÓN DE MC ALISTER

Si obtenemos la elasticidad de la función de frecuencia de la función del coeficiente de Fanning, $\lambda = f(R)$, como ya se ha visto, resulta:

$f(R) = F'(R) = (\alpha \cdot A)/R^{\alpha+1}$, y la elasticidad correspondiente es constante y menor que la unidad, ya que:

$$\begin{aligned} Ef(R)/ER &= \frac{df(R)}{dR} \cdot \frac{R}{f(R)} = \\ &= - \frac{\alpha \cdot A \cdot (\alpha + 1) \cdot R^{\alpha}}{R^{2\alpha+2}} \cdot \frac{R \cdot R^{\alpha+1}}{\alpha \cdot A} = -\alpha - 1. \end{aligned}$$

Otro modelo de distribución de los radios hidráulicos medios R podría ser aquel que tiene una elasticidad que es función lineal del logaritmo neperiano de R (variable independiente), esto es:

$$Ef(R)/ER = -m \cdot \ln R + n.$$

El signo menos aparece ya que la elasticidad mide la variación porcentual del número de conducciones (o del coeficiente de Fanning) correspondiente a una alteración porcentual del radio hidráulico y estos movimientos son, precisamente, de sentido contrario. Por otra parte, es lógico que la elasticidad dependa del nivel del radio hidráulico (R) o bien de una función del mismo ($\ln R$).

Vamos a calcular, ahora, la $f(R)$ a partir de la elasticidad mediante integración:

$$Ef(R)/ER = \frac{d \ln f(R)}{d \ln R} = -m \cdot \ln R + n ; d \ln f(R) = (-m \cdot \ln R + n) d \ln R$$

$$\begin{aligned} \ln f(R) &= \int (-m \cdot \ln R + n) d \ln R = \int (-m \cdot \ln R + n) \frac{dR}{R} = \\ &= \int \frac{n}{R} dR - m \cdot \int \frac{\ln R}{R} dR = n \cdot \ln R - \frac{m}{2} (\ln R)^2 + C. \end{aligned} \tag{7}$$

Ahora bien, si consideramos la función de densidad de la distribución normal del logaritmo del radio medio hidráulico, o sea:

$$f(R) = \frac{1}{\sigma \cdot R \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln R - \mu)^2}{2\sigma^2}},$$

y operando con ella tomando logaritmos neperianos o naturales, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \ln f(R) &= -\ln(\sigma \cdot R \cdot \sqrt{2\pi}) - (1/2\sigma^2) \cdot (\ln R - \mu)^2 = \\ &= -\ln R - \ln(\sigma \cdot \sqrt{2\pi}) - (1/2\sigma^2) \cdot [\ln^2 R + \mu^2 - 2(\ln R)\mu] = \\ &= \ln R \left[-1 + (\mu/\sigma^2) \right] + \ln^2 R (-1/2\sigma^2) - \left[\mu^2 / 2\sigma^2 + \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) \right]. \end{aligned}$$

Como μ y σ son constantes (respectivamente, media aritmética y desviación típica o “standard”) para la población en estudio, si llamamos:

$$\left\{ \begin{array}{l} (-1 + \frac{\mu}{\sigma^2}) = n \\ \frac{1}{2\sigma^2} = \frac{m}{2}; \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{m}} \\ -\left[\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) \right] = C \end{array} \right.$$

nos queda la siguiente expresión:

$$\ln f(R) = n \cdot \ln R - (m/2) \cdot (\ln R)^2 + C,$$

que coincide con la expresión (7) encontrada antes para la distribución que tiene la elasticidad función lineal de $\ln R$; entonces aquella distribución es la logarítmico-normal. La forma o configuración gráfica de la función de frecuencia de esta distribución es, consecuentemente, campaniforme.

Ejemplo de aplicación: Un caso aplicable a los efectos que se pretende sería el constituido por la gran zona regable compuesta por 1000 acequias del ejemplo práctico anteriormente propuesto, donde la variable hidráulica estudiada es el caudal máximo circulante, expresado en litros/segundo, de cada conducción libre, cuyo histograma queda representado en la siguiente figura 15:

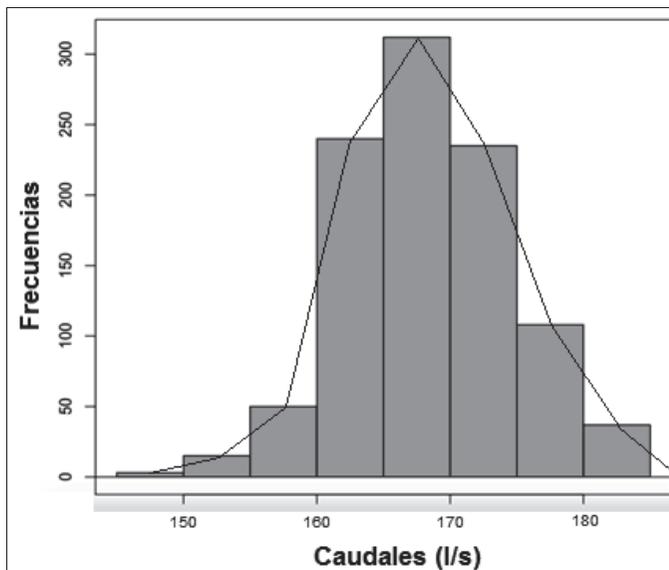


Fig. 15. Histograma del ejemplo propuesto.

11.4. RESUMEN DE RESULTADOS

Los diferentes coeficientes de correlación no lineal obtenidos, en cada caso, se consideran muy aceptables, con un máximo para las categorías de rugosidad $K = 3$ y $K = 4$ y un mínimo para $K = 11$, como puede comprobarse en el punto 8.2 anterior.

Por otra parte, por lo que se refiere a la fiabilidad de los mencionados coeficientes de correlación, podemos definir la variable aleatoria o estadígrafo (denominada “transformación de Fisher”) siguiente:

$$Z = \frac{1}{2} \cdot \ln \left[\frac{(1+r)}{(1-r)} \right] = 1.1513 \log \left[\frac{(1+r)}{(1-r)} \right], \quad e^{2Z} = \frac{(1+r)}{(1-r)},$$

que se distribuye de manera aproximadamente normal. Realizadas las operaciones correspondientes (como ya se ha hecho en otros epígrafes de esta misma obra), el resultado obtenido resulta plenamente satisfactorio en todos los casos analizados.

Una vez conocidos del valor del parámetro α , podemos establecer el siguiente cuadro comparativo de resultados entre las diferentes categorías de rugosidad de las acequias:

Tabla 10. Valor del parámetro α .

K	α
1	0.2430
2	0.2691
3	0.2952
4	0.3112
5	0.3308
6	0.3545
7	0.3665
8	0.3914
9	0.4166
10	0.4222
11	0.4332
12	0.4384

Fuente: elaboración propia.

A continuación, puede verse un gráfico del tipo diagrama de barras verticales referente a los valores correspondientes, para cada categoría de rugosidad, del parámetro adimensional α que venimos estudiando.

A saber:

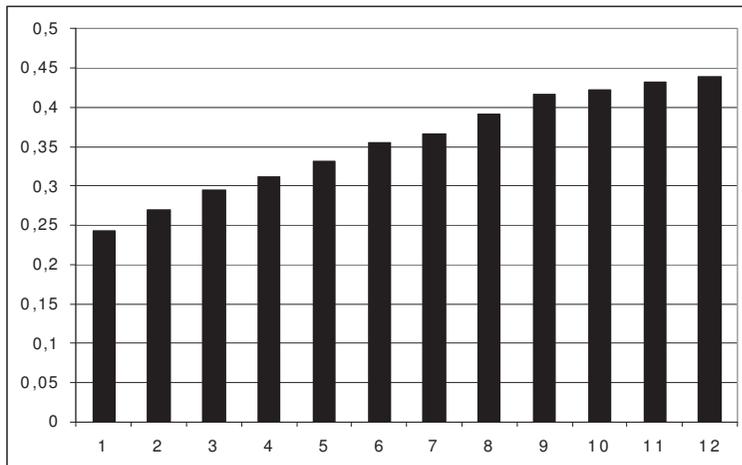


Fig. 16. Valores del parámetro α para cada una de las diversas categorías de rugosidad.

12. APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS ROBUSTOS

Hay que considerar, llegados a este punto, que el empleo de las modernas técnicas que ofrece la “inferencia estadística robusta” -aunque, sin duda, sin ofrecer grandes variaciones en los resultados finales- podrían afinar aún más algunos de los resultados anteriormente obtenidos. Dichos estudios podrían complementarse con una aplicación más sistemática de los métodos Lowess¹⁸, así como desarrollar más el tema de la “cointegración” de las series temporales y analizar, incluso, funciones periódicas y series de Fourier mediante el Cálculo de Variaciones clásico.

Aunque puede afirmarse que la Estadística tuvo su origen en los censos romanos de población¹⁹, sus métodos, tal como los conocemos hoy en día, se deben fundamentalmente a Sir Ronald Fisher, quien en su trabajo del año 1922 (*Sobre los fundamentos matemáticos de la Estadística Teórica*) estableció los principios a partir de los cuales se fueron desarrollando las diversas técnicas y métodos que actualmente utilizamos. Sin embargo, su correcta aplicación requiere de condiciones muy rígidas, tales como un modelo probabilístico fijo (habitualmente la distribución normal) en el que sólo queden indeterminados uno o dos parámetros (la media y/o su varianza). Pero tal restricción o condicionante supone un problema, ya que los modelos probabilísticos más utilizados rara vez se ajustan bien al fenómeno aleatorio observado (en nuestro caso, el caudal de agua circulante por una acequia a cielo abierto), razón por la cual los resultados obtenidos, bajo tales supuestos, dejan de ser válidos incluso en situaciones muy cercanas a la modelizada bajo la cual se obtuvieron.

¹⁸ LOWESS o LOESS (siglas en inglés), es un método propuesto originalmente por Cleveland (1979) y desarrollado por Cleveland y Devlin (1988); se refiere específicamente a un método que también se conoce como *regresión polinómica local ponderada*. En cada punto en el conjunto de datos un polinomio de bajo grado se monta en un subconjunto de los datos, con los valores de las variables explicativas cerca del punto cuya respuesta se está estimando. El polinomio se ajusta utilizando mínimos cuadrados ponderados, dando más peso a los puntos cercanos al punto cuya respuesta se está estimando y menos peso a los puntos más alejados. El valor de la función de regresión para el punto se obtiene, entonces, mediante la evaluación del polinomio local utilizando los valores de las variables explicativas para ese punto de datos. El ajuste LOESS se completa después de que los valores de la función de regresión se han calculado para cada uno de los puntos de datos. Muchos de los detalles de este método, como el grado del polinomio modelo y el peso, son flexibles.

¹⁹ Entre ellos, el más famoso posiblemente, el ordenado por el emperador César Augusto (reinante entre 27 a. C. y 14 d. C.) y que obligó a trasladarse a José y María a la ciudad de Belén de Judea, donde nació Jesús (de Nazareth) en un humilde pesebre.

Por estas razones surgieron los denominados “Métodos Robustos”, aunque su origen se supone remoto. Rey (1978) lo sitúa en la antigua Grecia, en donde los sitiadores contaban las capas de ladrillos de algunos muros de la ciudad sitiada y tomaban la moda (valor más frecuente) de los recuentos al objeto de determinar la longitud de las escalas a utilizar en el asalto. De esta forma, la estimación realizada no se veía afectada por los valores extremos de la variable aleatoria estadística, procedentes de murallas muy altas o muy bajas. No obstante, fue en 1964 cuando, de la misma manera que los trabajos de R.A. Fisher dotaron a la Estadística del rigor matemático del que hasta entonces carecía, el artículo de Peter Huber titulado “Estimación robusta de un parámetro de localización” abrió las puertas de la precisión matemática en robustez y, por ende, las del reconocimiento científico. Posteriores trabajos suyos, así como las aportaciones fundamentales de Frank Hampel en los años 1971 y 1974, en las cuales definió los conceptos de “robustez cualitativa” y la “curva de influencia”, terminaron de poner los cimientos de los métodos robustos, tal y como son conocidos hoy en día (Franquet, 2003).

De hecho, la introducción de los Métodos Robustos en la ciencia Estadística fue motivada -básicamente, aunque no de forma exclusiva- por la gran sensibilidad a los datos anómalos (*outliers* en la terminología anglosajona) de los estimadores generalmente utilizados, y a los que ya nos hemos referido en otros epígrafes de nuestro estudio. No obstante, a pesar de la relación existente entre el análisis de *outliers* y los Métodos Robustos, ambos campos han seguido desarrollos y caminos independientes.

Una de las primeras ideas que sugiere la presencia de resultados anómalos en un conjunto de formulaciones hidráulicas, entendidos éstos como cifras sorprendentemente alejadas del grupo principal de resultados, es la de su rechazo o eliminación, con objeto de reparar o limpiar el trabajo, antes de extraer conclusiones válidas del mismo. En el ejemplo desarrollado anteriormente, hemos considerado innecesaria la aplicación de dichos métodos presuponiendo que la oscilación de los datos del caudal de las acequias en el entorno de sus valores medios o esperables resultaba perfectamente asumible, por lo que, en un principio, cabría obviar la presencia inoportuna de datos anómalos.

Esta idea hállase reflejada en numerosas publicaciones existentes sobre el tema. Así, por ejemplo, puede leerse en el

trabajo de Ferguson datado el año 1961 (García, 2000) que "... el problema que se plantea en el tratamiento de los datos anómalos es el de introducir algún grado de objetividad en su rechazo...", dando por supuesto que los datos anómalos son necesariamente erróneos y que, por tanto, deben de ser eliminados. Pero ello no es más que una de las posibles opciones a considerar en el tratamiento de los datos anómalos, puesto que no siempre son necesariamente erróneos.

En definitiva, los datos pueden ser o parecer anómalos en relación con el modelo supuesto, por lo que una posible alternativa a su rechazo es la de su incorporación, ampliando el modelo. Ello nos llevaría a una nueva definición de *outlier*, a saber: "aquella observación que parece ser inconsistente con el resto de los valores del conjunto, en relación con el modelo supuesto". Desde luego, en la definición anterior aparece una componente ciertamente subjetiva en la calificación o conceptualización de un dato como "anómalo". Existe una manera más objetiva de poder llegar a tal conclusión. Se trata de utilizar unos tests de hipótesis, denominados *tests de discordancia*, que están basados en unos estadísticos para los que es posible determinar, o al menos tabular, su distribución en el muestreo. Mediante dichos tests podemos calificar a uno o varios datos o resultados como discordantes -esto es, valores que resultan significativos en un test de discordancia- y como consecuencia podemos, como se ha visto:

- Rechazarlos, eliminándolos del resto del conjunto.
- Identificarlos, resaltando algún aspecto que pudiera resultar interesante.
- Incorporarlos, ampliando la distribución-modelo propuesta.

A pesar del esfuerzo realizado para conseguir una calificación objetiva de los datos, el carácter subjetivo permanece, en cierta medida, en los tests de discordancia, tanto en su nivel de significación como en la propia elección del contraste a considerar. Además, como en todo test de hipótesis, los tests de discordancia no son simétricos; es decir, no son tratadas de igual manera la hipótesis nula de ausencia de *outliers* en el conjunto analizado que la alternativa de, por ejemplo, tres *outliers* a la derecha. Y una vez concluido el test, deberían considerarse los dos tipos de error asociados al test. Pero lo peor de proceder de tal suerte, rechazando los *outliers* y luego utilizando los métodos clásicos, es

la pérdida de eficiencia con respecto a la utilización de los Métodos Robustos.

Otro problema adicional relacionado con el tratamiento de *outliers* es que éstos no sólo se presentan en situaciones simples, sino que también aparecen en situaciones más estructuradas, como puede ser el caso de la aplicación de las diversas fórmulas empíricas para el cálculo de velocidades y caudales en una conducción libre, que es el problema que ahora nos ocupa. En estas situaciones, los datos anómalos tenderán a ser menos aparentes, siendo en ocasiones la discrepancia con el modelo propuesto lo que conferirá “anomalía” al dato. Así, por ejemplo, en una regresión minimocuadrática la anomalía consistirá en no estar alineado con el resto de las observaciones. Ahora bien, el ser anómalo no consiste en ser extremo; puede encontrarse en el grupo principal de observaciones y ser tratado como “anómalo”.

Al respecto, puede verse el ejemplo de la figura siguiente 17, en el que se presenta una supuesta serie cronológica de caudales medios descendentes por un tramo determinado de cierto cauce natural a lo largo de un período de 40 años, medidos en la correspondiente estación foronómica, en la que aparecen sendos datos anómalos correspondientes a los años 1958 y 1987:

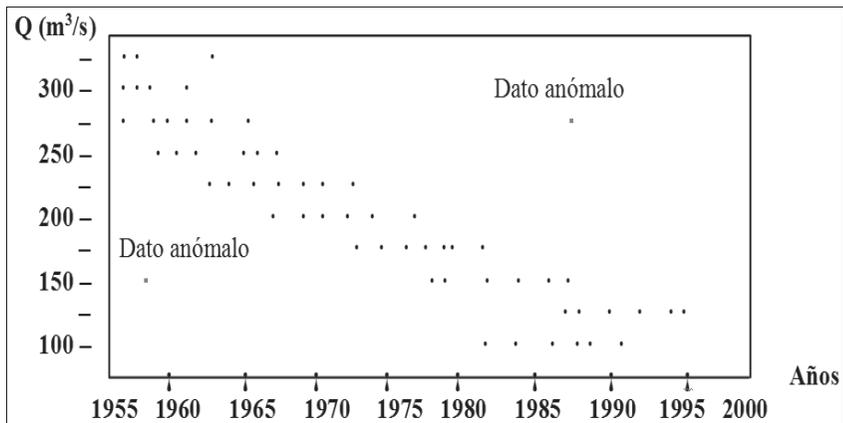


Fig. 17. Serie histórica descendente de caudales.

Digamos, como resumen y síntesis de lo expuesto en el presente apartado de nuestro estudio, que mientras los tests de discordancia tienen como objetivo el estudio de los *outliers* en sí

mismos, proponiendo como acción ante la presencia de un *outlier* alguno de los tres puntos anteriormente reseñados, los Métodos Robustos están diseñados para realizar inferencias sobre el modelo, reduciendo la posible influencia que pudiera tener la presencia de datos anómalos. De hecho, los Métodos Robustos son denominados, en ocasiones, “Técnicas de acomodación de *outliers*”. Es decir, en los tests de discordancia los *outliers* constituyen el objetivo, mientras que en los Métodos Robustos, son precisamente el mal a evitar (García, 2000).

13. RESUMEN Y CONCLUSIONES

1. Existen diversos coeficientes para medir la uniformidad de un riego. No obstante, hemos creído conveniente aquí ampliar el concepto de “uniformidad hidráulica” al estudio del comportamiento de ciertas variables hidráulicas que se manejan en el dimensionamiento de las conducciones hidráulicas libres y/o forzadas, como la sección mojada de la conducción, la velocidad media, el caudal, la presión, la pérdida de carga, la pendiente motriz, etc., referidas a un conjunto más o menos importante de parcelas en regadío (zona regable), y con el ánimo de lograr una distribución más homogénea o “equilibrada” de sus valores desde el punto de vista espacial. También los nuevos coeficientes de uniformidad aquí propuestos se podrán utilizar, indistintamente, para la *evaluación* de instalaciones en funcionamiento o bien para el diseño de nuevas instalaciones, en lugar de los comúnmente empleados hasta la fecha.

2. El proceso de cálculo que aquí se propone comienza con la determinación del coeficiente de variación (CV) de Pearson (que, como es sabido, se trata de una medida abstracta de dispersión relativa de los valores de la variable aleatoria estadística, profusamente utilizada, de los caudales (o radios medios hidráulicos, presiones de servicio, pérdidas unitarias o totales de carga, longitudes, pendientes motrices, diámetros, etc.) de todas las conducciones abiertas o forzadas para cada subzona regable, normalmente obtenidos a partir de una muestra suficientemente representativa; de hecho, el mismo procedimiento puede utilizarse tanto si se trata de un riego a presión o por gravedad, o de una red de desagües para avenamiento o saneamiento agrícola. Es obvio que, desde los respectivos puntos de vista, la zona regable en cuestión se hallará tanto más equilibrada desde la óptica, por

ejemplo, de la distribución de los radios hidráulicos de sus diferentes conducciones, cuanto menores sean los valores de su CV referido a la variable R (radio hidráulico) o a cualquier otra, que toma valores para cada una de las partes en que se considera espacialmente dividido dicho territorio. Al respecto, y como medida de la uniformidad en la distribución de los radios hidráulicos o de cualquier otra variable hidráulica por una zona regable, pueden utilizarse los diversos coeficientes que proponemos (expresados en %), de sentido contrario a la variabilidad antedicha. Por tanto, y según los valores que adopten dichos coeficientes de uniformidad, podríamos establecer una clasificación de las subzonas que constituyen el área objeto de puesta en riego según su grado o índice de uniformidad en relación a la correspondiente característica R, al caudal Q o a cualquier otra variable hidráulica digna de evaluación.

3. Teóricamente, y a igualdad de requerimientos y condicionantes, la distribución perfecta de la variable hidráulica tendrá lugar cuando, por ejemplo, en un riego por gravedad como el aquí expuesto, todas las acequias de riego tengan el mismo caudal (o radio hidráulico, longitud, pendiente motriz, etc.), lo que constituye un *desideratum* ideal pero, en cualquier caso, presenta una medida de la uniformidad en el diseño de las mismas. En este caso, al representar los porcentajes acumulados del caudal frente a los porcentajes acumulados de las conducciones, se obtendrá la recta de ecuación: $q_i = p_i$, coincidente con la bisectriz del primer cuadrante, y el índice de GINI valdrá 0. Obviamente, este índice se encuentra más próximo a 1 cuanto peor está distribuida, por la zona regable, la variable hidráulica que estamos evaluando. La “curva de Lorenz”, frecuentemente usada en el Análisis estructural económico, pondrá de manifiesto una distribución de los caudales de las acequias de riego más equitativa en la medida que la línea poligonal resultante (que tenderá a convertirse en una curva al aumentar el número de puntos en estudio) se sitúe más próxima a la citada diagonal (o bien G más próximo a 0) y también recíprocamente. También se aplican otros índices al caso, como el de Williamson o el índice de concentración de Lorenz, deduciéndose las ecuaciones de ligadura existentes entre los diferentes coeficientes de uniformidad propugnados. Todo ello, con el estudio estadístico correspondiente, se aplica a la resolución de un caso práctico de una gran zona regable constituida por 1000 acequias prefabricadas de hormigón armado a cielo abierto.

4. El trabajo se completa con una cierta cantidad de tablas y figuras intercaladas en el texto, así como con sendos Anexos, uno de tablas estadísticas y otro de fotografías representativas del proceso constructivo del sistema de distribución del riego aquí ejemplificado que, junto con las pertinentes referencias bibliográficas y documentales, índices diversos, así como las notas a pie de página, se pretende le confieran un carácter más ilustrativo y exacto.



APÉNDICE

-RELACIÓN DE ANEXOS-

ANEXO 1. TABLAS ESTADÍSTICAS.

ANEXO 2. FOTOGRAFÍAS DEL PROCESO CONSTRUCTIVO.

ANEXO 1

TABLAS ESTADÍSTICAS

Tabla A1. Áreas bajo la curva normal tipificada de 0 a z.

Tabla A2. Áreas bajo la curva normal tipificada de $-\infty$ a z.

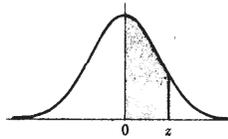
Tabla A3. Ordenadas (y) de la curva normal tipificada en z.

Tabla A4. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (I).

Tabla A5. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (II).

Tabla A6. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (III).

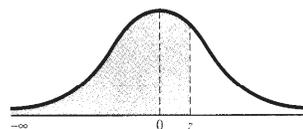
Tabla A1. Áreas bajo la curva normal tipificada de 0 a z.



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0090	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

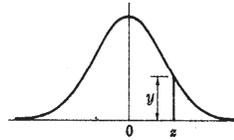
Tabla A2. Áreas bajo la curva normal tipificada de $-\infty$ a z .

$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Tabla A3. Ordenadas (y) de la curva normal tipificada en z.

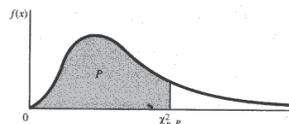


z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004
3.7	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001

Tabla A4. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (I).

Esta tabla proporciona los valores $\chi_{n,p}^2$, tales que

$$P = P(X \leq \chi_{n,p}^2) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\chi_{n,p}^2} x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

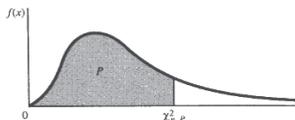


siendo X una variable aleatoria χ^2 de Pearson con n -grados de libertad.

$n \backslash P$	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,250	0,500
1	0,0000	0,0001	0,0009	0,0039	0,0157	0,1015	0,454
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	0,5754	1,386
3	0,0717	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	1,213	2,366
4	0,2070	0,2971	0,4844	0,7107	1,064	1,923	3,357
5	0,4117	0,5543	0,8312	1,145	1,610	2,675	4,351
6	0,6757	0,8721	1,2373	1,635	2,204	3,455	5,348
7	0,9893	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	5,071	7,344
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	8,343
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	9,342
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,34
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,34
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	9,299	12,34
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,17	13,34
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,04	14,34
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,91	15,34
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,09	12,79	16,34
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,86	13,68	17,34
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,65	14,56	18,34
20	7,434	8,260	9,591	10,850	12,44	15,45	19,34
21	8,034	8,897	10,282	11,591	13,24	16,34	20,34
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,04	17,24	21,34
23	9,260	10,195	11,688	13,090	14,85	18,14	22,34
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,66	19,04	23,34
25	10,519	11,524	13,119	14,611	16,47	19,94	24,34
26	11,160	12,198	13,843	15,379	17,29	20,84	25,34
27	11,807	12,878	14,573	16,151	18,11	21,75	26,34
28	12,461	13,564	15,307	16,927	18,94	22,66	27,34
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,77	23,57	28,34
30	13,786	14,953	16,790	18,492	20,60	24,48	29,34
40	20,706	22,164	24,433	26,509	29,05	33,66	39,34
50	27,990	29,706	32,357	34,764	37,69	42,94	49,33
60	35,534	37,484	40,481	43,187	46,46	52,29	59,33
70	43,275	45,441	48,756	51,739	55,33	61,70	69,33
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,28	71,14	79,33
90	59,196	61,754	65,646	69,126	73,29	80,62	89,33
100	67,327	70,064	74,221	77,929	82,36	90,13	99,33

Tabla A5. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (II).

$$P = P(X \leq \chi^2_{n,p}) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\chi^2_{n,p}} x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} dx$$



n \ P	P						
	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
1	1,32	2,70	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	2,77	4,60	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	4,11	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	5,38	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,52
6	7,84	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96	26,12
9	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	13,70	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76	31,26
12	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	17,12	21,06	23,68	16,12	29,14	31,32	36,12
15	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	21,60	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82
20	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	45,32
21	24,93	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40	46,80
22	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27
23	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
26	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29	54,05
27	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64	55,48
28	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89
29	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	58,30
30	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70
40	45,62	51,80	55,76	59,34	63,69	66,77	73,40
50	56,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49	86,66
60	66,98	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95	99,61
70	77,58	85,53	90,53	95,02	100,42	104,21	112,29
80	88,13	96,58	101,87	106,62	112,32	116,32	124,77
90	98,65	107,56	113,14	118,13	124,11	128,29	137,20
100	109,09	118,49	124,34	129,56	135,80	140,16	149,38

Tabla A6. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (III).

g.l.	Por ciento									
	.5	1	2.5	5	10	90	95	97.5	99	99.5
1	.000039	.00016	.00098	.0039	.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.0100	.0201	.0506	.1026	.2107	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.0717	.115	.216	.352	.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.207	.297	.484	.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
120	83.85	86.92	91.58	95.70	100.62	140.23	146.57	152.21	158.95	163.64

NOTA 1: Para valores grandes de los grados de libertad se puede utilizar la fórmula aproximada:

$$\chi^2_{\alpha} = n \left(1 - \frac{2}{9n} + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{2}{9n}} \right)^3,$$

siendo Z_{α} la desviación normal y n el número de grados de libertad. Así, v. gr.:

$$\chi^2_{99} = 60 \cdot \left(1 - 0.00370 + 2.326 \cdot 0.06086 \right)^3 = 60 \cdot (1.1379)^3 = 88.4$$

para el percentil 99 con 60 grados de libertad (Dixon y Massey, 1969).

Del mismo modo, se tendría que para el percentil 99 con 36 g.l.:

$$\chi^2_{99} = 54.324.$$

NOTA 2: Distribución exponencial

También se le suele llamar *distribución exponencial negativa*. Nos hemos referido a ella en el epígrafe 9 de este manual.

Diremos que una variable aleatoria X , de tipo continuo, sigue una **distribución exponencial** de parámetro a , siendo $a \in \{\mathfrak{R}\}$ y siendo $a > 0$, si su *función de densidad* es:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{-ax} & , \forall x > 0 \\ 0 & , \forall x \leq 0 \end{cases}$$

Abreviadamente lo indicaremos por: $X \rightarrow \text{Exp}(a)$.

Esta distribución constituye un caso particular de la distribución gamma $\Gamma(p,a)$ para el parámetro: $p = 1$. Se halla bastante relacionada con la distribución de Poisson, con lo que el número de sucesos que ocurren en un determinado intervalo sigue una distribución poissoniana, y la variable aleatoria que representa el tiempo entre la ocurrencia de sucesos (por ejemplo, la abertura y cierre de una válvula de paso) sigue una distribución exponencial.

También se pueden modelizar mediante esta distribución estadística, por ejemplo, las siguientes situaciones (Casas y Santos, 1995):

- La duración de la prestación de un servicio (jornada de riego).
- El tiempo transcurrido entre llegadas sucesivas a una cola o punto de servicio en los turnos de riego (fenómeno de espera).
- El tiempo de duración de algunos equipos electromecánicos.

La función de densidad está bien definida, puesto que:

$$\forall x > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \text{ cumpliéndose además que: } \int_0^{\infty} a \cdot e^{-ax} \cdot dx = \left[-e^{-ax} \right]_0^{\infty} = 1.$$

ANEXO 2
FOTOGRAFÍAS DEL PROCESO CONSTRUCTIVO

Foto 1: Canaletas prefabricadas acopiadas en el lateral de la acequia térrea antigua.



Foto 2: Preparación para asiento de la acequia prefabricada.



Foto 3: Zapatas de asiento encofradas.



Foto 4: Zapatas de cimentación terminadas.



Foto 5: Nivelando las gravas existentes entre las zapatas de hormigón armado.



Foto 6: Acopio de las canaletas junto a la obra y camino.



Foto 7: Detalle de las uniones con la canaleta prefabricada.



Foto 8: Detalle de la alineación de la canaleta prefabricada de hormigón armado.



Foto 9: Unión de canaleta con un puente. Se ve que se ha marcado el nivel para rellenar de hormigón el fondo del puente para que esté al mismo nivel que el interior de las canaletas.



Foto 10: Detalle de rampa para patos y otras aves anátidas.



Foto 11: Puente-losa de hormigón armado de 9 m. de longitud sobre la acequia de sección semicircular para acceso a finca desde el camino de servicio.



Foto 12: Detalle apoyo canaleta de sección parabólica en zapata.

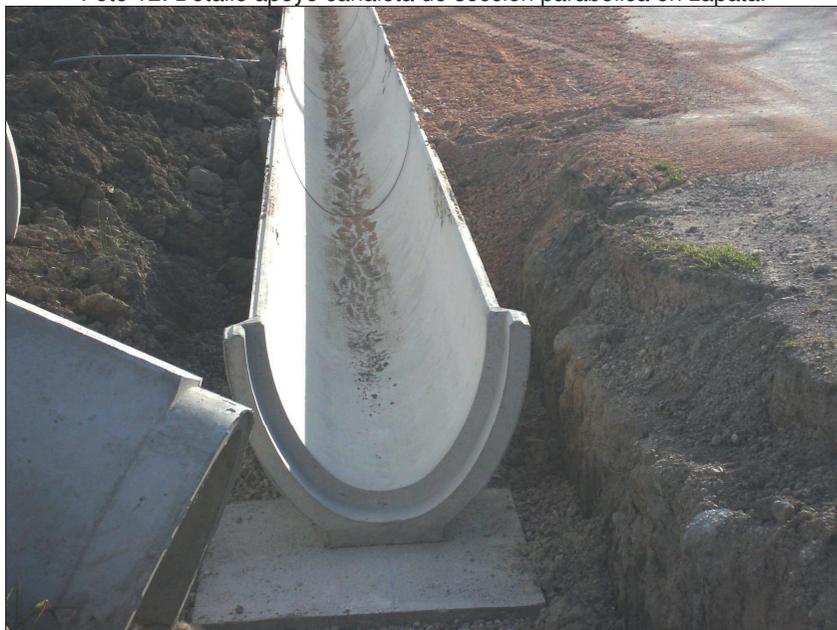


Foto 13: Paso-losa de hormigón armado a finca sobre acequia de sección parabólica.



Foto 14: Compuerta de riego en la arqueta.



Foto 15: Detalle de arqueta simple de hormigón armado con salida de tubo a finca.



Foto 16: Detalle de arqueta de unión de dos tramos a 90°.



Foto 17: Detalle de arqueta y compuerta.



SÍMBOLOS, ABREVIATURAS Y SIGLAS

%	Porcentaje (tanto por cien)
...	Puntos suspensivos (etcétera)
↑,↓	Ascendente, descendente
→	Tiende a ...
A	Área, media aritmética
AA.VV.	Autores varios
a.C.	Antes de Cristo
art.	Artículo
Bin	Distribución binomial
BOE	Boletín Oficial del Estado
c	Contorno o perímetro mojado, amplitud intervalo de clase
C	Media cuadrática
C_{ap}	Coefficiente de apertura
CDT	Coefficiente de desigualdad de Theil
CEDEX	Centro de Experimentación de Obras Públicas
CEH	Centro de Estudios Hidrográficos
Coef.	Coefficiente
CREGR	<i>Centre de la Recherche et de l'Expérimentation du Génie Rural</i>
c.s.q.d.	Como se quería demostrar
cte.	Constante
CU	Coefficiente de uniformidad
CV	Coefficiente de variación de Pearson
d	Diferencial
d.C.	Después de Cristo
DM	Desviación media absoluta
DM_C	Desviación media absoluta (media cuadrática)
DM_G	Desviación media absoluta (media geométrica)
DM_H	Desviación media absoluta (media armónica)
DM_{Me}	Desviación mediana
DM_{Mo}	Desviación media absoluta (moda)
$DM_{\bar{x}}$	Desviación media absoluta (media aritmética)
D_{mc}	Distancia cuadrática media
Dr.	Doctor
=	Igual a ...
≠	Desigual a ...

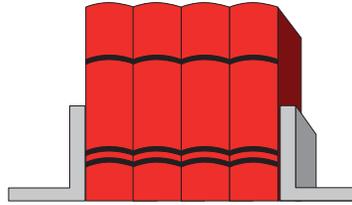
e	Base de los logaritmos neperianos (n° irracional = $= 2.7182818284 \dots$), error máximo de estimación muestral, n° de subzonas de riego
E	Elasticidad, esperanza matemática
ECM	Error cuadrático medio
ed.	Editorial
et alt.	<i>Et altri</i>
etc.	Etcétera
\exists	Existe
\approx, \equiv, \cong	Aproximadamente igual, equivalente
f	Función, función de densidad, frecuencia relativa ordinaria
F	Estadístico de Snedecor, función de distribución, frecuencia relativa acumulada
Fig.	Figura
G	Índice de Gini, Índice de Geary
G	Media geométrica
g.l.	Grados de libertad
GNU GPL	<i>General Public License</i>
g_1	Coefficiente de asimetría o sesgo (Fisher)
g_2	Coefficiente de curtosis (Fisher)
H	Media armónica
∞	Infinito
I	Pendiente motriz o hidráulica
K	Categoría de rugosidad (cauces abiertos), n° de intervalos de clase (Sturges)
k	Número de pares de clase
L	Índice de concentración de Lorenz, intervalo de clase
LCD	Pantalla de cristal líquido
l	Litros, longitud tubería
lim	Límite
ln	Logaritmo natural o neperiano
LOESS	<i>Locally estimated scatterplot smoothing</i>
log	Logaritmo decimal
LOWESS	<i>Locally weighted scatterplot smoothing</i>
m_3	Momento de orden 3 respecto a la media aritmética o central
m_4	Momento de orden 4 respecto a la media aritmética o central
MAD	Desviación absoluta media
M_e	Mediana
M_{eg}	Mediana de Gastwirth

M	Estimador de posición
M_o	Moda
MCO	Mínimos cuadrados ordinarios
MSc	<i>Master of Science</i>
n	Tamaño del universo o población, frecuencia simple
N	Distribución normal, frecuencia absoluta acumulada
{ N }	Conjunto de los números naturales
NMAD	Desviación absoluta mediana estandarizada
n^o	Número
n'	Tamaño de la muestra
p. = pág.	Página
P, Pr	Probabilidad, coeficiente asimetría o sesgo
pp. = págs.	Páginas
\forall	Para todo
q, Q	Caudal o gasto, caudal relativo, media cuadrática
q_{25}	Valor medio del cuarto inferior
q_m	Caudal medio
Q_1	Primer cuartil
Q_2	Segundo cuartil (Mediana)
Q_3	Tercer cuartil
Q_4	Cuarto cuartil
r	Coefficiente de correlación, n^o de clases
{ R }	Conjunto de los números reales
R	Recorrido o rango, radio medio hidráulico, coeficiente de determinación o crítico
R'	Recorrido relativo
R^2	Coefficiente de determinación
R.D.	Real Decreto
RECM	Error típico de la estima
Ref.	Referencia
RLAF	Riego Localizado de Alta Frecuencia
S	Sección mojada, pendiente hidráulica
S_e^2	Varianza residual
S_f	Pendiente final
S_0	Pendiente inicial
s, σ	Desviación típica o <i>standard</i> , segundos
s^2, σ^2	Varianza
SEM	Error "standard"
ss.	Siguientes
t	Tiempo, distribución de Student (Gosset)
T	Trimedia, frecuencias teóricas

T_1, T_2	Terciles
UIC	Universidad Internacional de Catalunya
USA	<i>United States of America</i>
V	Velocidad media
VAR	Varianza o variancia
v.gr.	<i>Verbi gratia</i>
W	Índice de Williamson
x	Abscisa
\bar{x}	Media aritmética
y	Ordenada
$Z_{\alpha/2}$	Nivel de confianza (distribución normal)
Z	Transformación de Fisher
{Z}	Distribución normal (Gauss), transformación de Fisher, conjunto de los números enteros

LETRAS GRIEGAS

α	Esperanza matemática (media), nivel de significación
χ^2	Distribución Chi-cuadrado
Γ	Distribución "gamma" de Euler
λ	Coefficiente de Fanning
π	Irrracional 3.1415927...
σ	Desviación típica poblacional
σ^2	Varianza poblacional
σ_c	Desviación típica corregida



- BIBLIOGRAFÍA Y FONDOS DOCUMENTALES -

(*) Bibliografía local.
 (**) Bibliografía general.
 (***) Bibliografía recomendada.

1) ALCAIDE, A. (1973). *Estadística Económica*. Ed. SAETA. Madrid, 370 p. (**)

2) CASAS, J. M. y SANTOS, J. (1995). *Introducción a la estadística para la economía y administración de empresas*. Ed. CEURA, S. A. Madrid. 920 p. (**)

3) CHRISTIANSEN, J.E. (1942). "Irrigation by Sprinkling". *Bulletin* 670. University of California. College of Agriculture. Agricultural Experimental Station. Berkeley, California. Recuperado de: <https://archive.org/details/irrigationbyspri670chri> , 124 p. (**)

4) CLEVELAND, W.S. y DEVLIN, S.J. (1988). "Locally-Weighted Regression: An Approach to Regression Analysis by Local Fitting". *Journal of the American Statistical Association*, 83 (403), pp. 596–610. (**)

5) DIXON, W. J. y MASSEY, F. J. (1969). *Introducción al análisis estadístico*. Ed. Del Castillo, S.A. Madrid, 489 p. (**)

6) FANNING, J. T. (1902). *A practical treatise on hydraulic and water-supply engineering: relating to the hydrology, hydrodynamics, and practical construction of water-works, in North America*. D. Van Nostrand, New York. (**)

7) FISHER, R.A. (1922). *On the mathematical foundations of the theoretical statistics*. Philos. Trans., R. Society. London A. (**)

- 8) FRANQUET BERNIS, J.M. (1991). *Análisis Territorial. ("División, Organización y Gestión del Territorio"). Vol. I.* UNED. Centro Asociado de Tortosa. CADUP. Estudios 1990/91. Tortosa. 571 pàg. (**).
- 9) FRANQUET BERNIS, J.M. (2003). *Cinco temas de hidrología e hidráulica.* Ed. Bibliográfica Internacional, S.L. – Universitat Internacional de Catalunya. Tortosa. 594 p. (**)
- 10) FRANQUET BERNIS, J.M. (2005). *Cálculo hidráulico de las conducciones libres y forzadas (Una aproximación de los métodos estadísticos).* Ed. Bibliográfica Internacional, S.L. – Universitat Internacional de Catalunya. Tortosa. 590 p. (**)
- 11) FREUND, J.E. y WILLIAMS, F.J. (1964). *Elementos modernos de estadística empresarial.* Ed. Prentice/Hall International, Inc. Londres, 1964-1972. 462 p. (**)
- 12) GARCÍA PÉREZ, A. (2000). “Inferencia robusta aplicada”. *XI Cursos de verano de la UNED.* Cambrils (Tarragona). (***)
- 13) GEARY, R. C. (1938). “Test of Normality”. *Journal Royal Statistics Society.* (**)
- 14) HAMPEL, F. R. (1974). “The influence curve and its role in robust estimation”. *Journal of Amer. Statist. Assoc.*, 42, pp. 1887-1896. (**)
- 15) HUBER, P.J. (1981). *Robust Statistics.* John Wiley & Sons. New York. (**)
- 16) PULIDO, A. (1971). *Estadística y técnicas de investigación social.* Ed.: Anaya. Madrid. (**)
- 17) SPIEGEL, M. R. (1981). *Teoría y problemas de probabilidad y estadística.* Ed. McGraw-Hill. México. 372 p. (1ª ed. 1975). (**)
- 18) STURGES, H. (1926). “The choice of a class-interval”. *Journal of Amer. Statist. Assoc.*, 21, pp. 65-66. Recuperado de:
http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0073-47212007000200010 (**)

* * * *

ÍNDICE DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Fig. 1. Coeficientes de uniformidad en función del coeficiente de variación de Pearson.....	35
Fig. 2. Relaciones existentes entre los diferentes coeficientes de uniformidad, para distribuciones hidráulicas aproximadamente normales (I).....	37
Fig. 3. Relaciones existentes entre los diferentes coeficientes de uniformidad, para distribuciones hidráulicas aproximadamente normales (II).....	38
Fig. 4. Histograma de rectángulos yuxtapuestos.....	54
Fig. 5. Diagrama acumulativo ascendente de los caudales.....	55
Fig. 6. Área bajo la curva normal entre los puntos x_1 y x_2	58
Fig. 7. Construcción geométrica de las cuatro medias empleadas.....	63
Fig. 8. Valores de los diferentes coeficientes de uniformidad.....	72
Fig. 9. Coordenadas cartesianas rectangulares de las variables p y q	80
Fig. 10. Distribución campaniforme o gaussiana de Q	85
Fig. 11. Representación gráfica simplificada de la función $\lambda = f(R)$	97
Fig. 12. Función $\lambda = f(R)$ según los valores de α	98
Fig. 13. Representación logarítmica de la función $\lambda = f(R)$	99
Fig. 14. Ajuste MCO a una función potencial.....	107
Fig. 15. Histograma del ejemplo propuesto.....	110
Fig. 16. Valores del parámetro α para cada una de las diversas categorías de rugosidad.....	111
Fig. 17. Serie histórica descendente de caudales.....	115

* * * * *

ÍNDICE DE TABLAS

	<u>Pág.</u>
Tabla 1. Frecuencias de la distribución de caudales.....	52
Tabla 2. Cálculos auxiliares de la distribución de caudales (I)	65
Tabla 3. Cálculos auxiliares de la distribución de caudales (II)	75
Tabla 4. Desviaciones medias absolutas según promedio empleado.....	78
Tabla 5. Cálculos auxiliares para la determinación de G	81
Tabla 6. Ordenación creciente de los porcentajes acumulados de caudales	83
Tabla 7. Ajuste a una distribución normal	86
Tabla 8. Características de la distribución binomial	92
Tabla 9. Frecuencias acumuladas descendentes	106
Tabla 10. Valor del parámetro α	111

* * * * *

<i>Tabla A1. Áreas bajo la curva normal tipificada de 0 a z.....</i>	<i>122</i>
<i>Tabla A2. Áreas bajo la curva normal tipificada de $-\infty$ a z.....</i>	<i>123</i>
<i>Tabla A3. Ordenadas (y) de la curva normal tipificada en z.....</i>	<i>124</i>
<i>Tabla A4. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (I).....</i>	<i>125</i>
<i>Tabla A5. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (II).....</i>	<i>126</i>
<i>Tabla A6. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (III).....</i>	<i>127</i>

* * * * *

*Otras publicaciones del Centro Asociado
de Tortosa-UNED*

1. **La educación en la crítica: unas consideraciones pedagógicas**
Miguel Ángel García Bordas. 20 pág., 1975
2. **La internacionalización del sistema tributario**
Antonio Barrera de Irimo. 28 pág., 1976
3. **Proteccionismo y política de precios**
Tomás Allende y García Baxter. 24 pág., 1976
4. **Los jesuitas españoles y la cultura hispano-italiana del s. XVIII**
Guido Ettore Mazzeo. 20 pág., 1977
5. **Costums de Tortosa**
A. A. V. V. 408 pág., 1978
6. **Tortosa: Cuatro estudios Histórico-Educativos**
A. A. V. V. 184 pág., 1983
7. **CADUP - ESTUDIOS 1987**
A. A. V. V. 190 pág., 1987
8. **CADUP - ESTUDIOS 1988**
A. A. V. V. 256 pág., 1989
9. **CADUP - ESTUDIOS 1989**
A. A. V. V. 346 pág., 1990
10. **CADUP - ESTUDIOS 1990/91 “Análisis Territorial”**
Josep Maria Franquet Bernis. 574 pág., 1991
11. **CADUP - ESTUDIOS 1992/95 “Revolución y Restauración Católica en la Diócesis de Tortosa (1862/1879)”**
Carmen Ibáñez Gisbert. 504 pág., 1995
12. **CADUP - ESTUDIOS 1996**
A. A. V. V. 190 pág., 1996
13. **Cinco años después de la firma del Tratado de la U.E.**
Jordi Sardà Pons. 20 pág., 1997
14. **Els efectes de l'experiència primerenca en l'emotivitat i les capacitats cognitives**
Pilar Ferré Romeu. 24 pág., 1997
15. **CADUP ESTUDIOS 1997-98 “Psicología hoy”**
A. A. V. V. 128 pág., 1998
16. **Reflexiones sobre la responsabilidad de los ciudadanos ante la Europa post-euro**
José Sánchez Asiaín. 31 pág., 1999
17. **La Generación de 1898, según las memorias de D. Pío Baroja**
Javier Martínez Palacio. 88 pág., 1999
18. **La màgia dels números parlants**
Eugení Perea Simón. 32 pág., 2000
19. **El vent i la pluja a les comarques meridionals de l'Ebre**
Josep Maria Franquet Bernis. 104 pág., 2001

20. **Les limitacions dels conreus per les temperatures extremes**
Josep Maria Franquet Bernis. 80 pág., 2002
21. **La seducción de las palabras**
Natalia Català Torres. 32 pág., 2002
22. **Classificació climàtica de la Regió Catalana de l'Ebre**
Josep Maria Franquet Bernis. 96 pág., 2004
23. **L'escriptor tortosí Jaume Tió i Noé segons les seves obres**
Juan Antonio González Gutiérrez. 50 pág., 2005
24. **El estudio operativo de la psicología. Una aproximación matemática**
Josep Maria Franquet Bernis. 372 pág., 2008
25. **Las perifrasis verbales de la lengua catalana en los siglos XVI-XX. (hasta la normativización de la lengua)**
Juan Antonio González Gutiérrez. 304 pág., 2008
26. **El caudal mínimo medioambiental del tramo inferior del río Ebro**
Josep Maria Franquet Bernis. 344 pág., 2009
27. **Delitos sexuales. Anteproyecto de reforma del código penal de 2008. Defensa en procesos con víctimas menores. Castración química**
Javier Ignacio Prieto Rodríguez. 88 pág., 2009
28. **La ley española ante el "Mobbing"**
Javier Ignacio Prieto Rodríguez. 80 pág., 2010
29. **Nivelación de terrenos por regresión tridimensional**
Josep Maria Franquet Bernis / Antonio Querol Gómez. 488 pág., 2010
30. **Ecuaciones diferenciales ordinarias y en diferencias finitas. Curso práctico**
Josep Maria Franquet Bernis. 750 pág., 2013
31. **Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes**
Josep Maria Franquet Bernis. 916 pág., 2014
32. **Quaranta anys del Centre Associat a la UNED de Tortosa. Cuarenta años del Centro Asociado a la UNED de Tortosa**
Juan Antonio González Gutiérrez. 156 pág., 2014
33. **Tortosa: Dinamització funcional del Casc Antic**
Antonio Querol Gómez. 244 pág., 2015
34. **El caudal mínimo medioambiental del tramo inferior del río Ebro (segona edició)**
Josep Maria Franquet Bernis. 354 pág., 2016
35. **Episcopologi Dertosenense. Introducció a la història de la societat i de l'Església de Tortosa**
Ramon Miravall Dolç. 1.016 pág., 2016
36. **Ecuaciones diferenciales microeconómicas en derivadas parciales**
Josep Maria Franquet Bernis. 508 pág., 2016
37. **Aproximació al marc teòric del Programa d'Intervenció Socioeducativa 6-16**
Inés Solé Vericat. 172 pág., 2017

38. **Problemática del Río Ebro en su tramo final**
Josep Maria Franquet Bernis, Miquel Angel Albacar Damian, Felipe Tallada de Esteve. 352 pág., 2017
39. **El Vino ¿arte o alimento natural?**
Jaime Gelabert Orench. 772 pág., 2018
40. **La comarca del Montsià**
Antonio Querol Gómez. 318 pág., 2018
41. **Hemingway. *Prosas de Manuel Pérez Bonfill***
Manuel Pérez Bonfill. 128 pág., 2018
42. **Francesc Mestre i Noè. *El estímulo asociativo del Bajo Ebro (1886-1936)***
Núria Menasanch i Martí. 124 pág., 2019
43. **La comarca del Baix Ebre**
Antonio Querol Gómez. 308 pág., 2019
44. **Dimensionamiento y distribución de las conducciones hidráulicas**
Josep Maria Franquet Bernis. 972 pág., 2019
45. **Modelo estadístico de distribución espacial de las acequias en una zona regable**
Josep Maria Franquet Bernis. 152 pág., 2019

Este libro se terminó
de imprimir
el 13 de agosto de 2019,
en los talleres
de Gràfica Dertosense, s.l.
de Tortosa

JOSEP MARIA FRANQUET BERNIS (Tortosa, 1950), es Ingeniero Agrónomo (especialidad Economía agraria), por la Universidad Politécnica de Valencia, donde finalizó la carrera en el año 1974, realizando posteriormente, los estudios de Doctorado e Ingeniería Técnica Industrial.

Es Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales, por la Universidad de Barcelona (1995). Es, asimismo, Doctor por la Universidad Internacional de Cataluña (2007, doctorado en Arquitectura). También es poseedor del título de Ingeniero Técnico en Explotaciones Agropecuarias por la Universidad Politécnica de Cataluña (1997).

El profesor Franquet tiene en su haber otros títulos universitarios como son: Diplomado en Cooperación y Diplomado en Investigación Operativa por la Universidad de Valencia, Diplomado en Economía de la Empresa y Diplomado en Planificación de Empresas por la Universidad Politécnica de Madrid. Tiene, así mismo, el reconocimiento profesional de Doctor Ingeniero Superior, *European Engineer-EUR ING* (FEANI, París, 1993).

En 1974 inicia su carrera docente como profesor de la Escuela de Investigación Operativa de la Universidad de Valencia (Departamento de Matemática Aplicada). Es profesor-tutor del Centro Asociado de la UNED en Tortosa desde el año 1976 (Departamento de Economía Aplicada Cuantitativa) y desde octubre de 2007 es el Director del mismo. También ha sido (2013-2015) Director del Campus Nordeste (Cataluña y Baleares). Fue Profesor Asociado de la Universidad Internacional de Cataluña (Departamento de Hidráulica y Proyectos). Posee las acreditaciones oficiales de profesor colaborador, ayudante doctor y contratado doctor. Autor de numerosos artículos técnicos, así como de diversos libros y monografías en materia de agricultura, construcción, hidráulica, planificación territorial, climatología, piscicultura, folklore, narrativa, administración local, psicología, topografía, poesía, matemáticas y economía.

