REDUCCIÓN DE VARIABLES EN LA BÚSQUEDA DE EXTREMOS CONDICIONADOS DE FUNCIONES MULTIVARIANTES

Josep Maria Franquet Bernis

Dr. Ingeniero Agrónomo. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Campus del Nordeste. Centro Asociado de Tortosa (Tarragona). director@tortosa.uned.es.

RESUMEN

El método tradicional de los multiplicadores u operadores de Lagrange para la resolución de los problemas de extremos condicionados de varias variables, o el de los determinantes jacobianos, son sólo necesarios en presencia de puntos de silla (o de “ensilladura”) o bien cuando la forma implícita de la restricción impide despejar la o las variables que interese substituir en la función objetivo a optimizar. Puede suceder, también, que los expresados métodos no ofrezcan soluciones definitivas y haya que recurrir, justamente, a la técnica referida de reducción o eliminación de variables para solventar eficazmente el problema planteado, como tendremos ocasión de comprobar. Para una mayor claridad del proceso, se desarrollan varios ejercicios representativos y un caso práctico de las ventajas que ofrece la técnica en cuestión.

Palabras clave: extremos, ecuación condicionante, función objetivo, operador de Lagrange, determinante funcional, variable independiente, punto crítico.

SUMMARY / ABSTRACT

The traditional method of multipliers or Lagrange’s operators to the resolution of the problems in conditional ends of several variables, or the jacobians determinants, they are only needed in the presence of points of chair (or "tack") either when the implied form of the constraint prevents clear or variables that you want to replace in the objective function to optimize. It can also happen that expressed methods do not provide definitive solutions and have to resort, precisely, to the aforementioned technique of reduction or elimination of variables to effectively solve the problem, as we will have opportunity to see. For greater clarity in the process, develop several representative exercises and a practical case of the advantages offered by the technology in question.

***Key words**: ends, determinant equation, objective function, Lagrange’s operator, independent variable, functional determinant, critical point.*

INTRODUCCIÓN

Un problema que se presenta con frecuencia en el Análisis Matemático estriba en determinar los extremos relativos o locales (máximos y/o mínimos) de una función real cuyas variables reales no son independientes sino que se encuentran ligadas por una o más ecuaciones condicionantes. Decimos, entonces, que se trata de un problema de "extremos ligados o condicionados".

Suelen presentarse en algunos problemas de la Física, la Economía o la Ingeniería, como se verá en el caso práctico de Hidráulica que figura al final del presente artículo. Entonces, el método tradicional de los multiplicadores u operadores de Lagrange, o el de los determinantes jacobianos, son sólo necesarios en presencia de puntos de silla (o de "ensilladura") o bien cuando la forma implícita de la restricción impide despejar la o las variables que interese substituir en la función objetivo a optimizar. Puede suceder, también, que los expresados métodos no ofrezcan soluciones definitivas y haya que recurrir, justamente, a la técnica referida para solventar eficazmente el problema planteado, como tendremos ocasión de comprobar.

En efecto, supongamos que la ecuación condicionante permita despejar una de las variables en función de las otras, por ejemplo, en la forma: $z = \Phi(x,y)$, y substituyéndola en la función objetivo a optimizar se obtiene:

$$u = f\,[x,y,\ \Phi(x,y)\,] = F(x,y),$$

y el problema consistirá en buscar los valores extremos de F(x,y) cuyas variables ya son independientes, para lo cual se pueden aplicar los criterios clásicos establecidos.

Pues bien, por tratarse de una cuestión que, generalmente, no se halla contemplada expresamente en los tratados de análisis matemático al uso, hemos creído conveniente su desarrollo con la apoyatura de algunos ejemplos generales y de un caso práctico de aplicación de la mecánica de fluidos que juzgamos suficientemente representativos al respecto.

METODOLOGÍA Y BASE TEÓRICA

Método de los operadores de Lagrange

Sea la función $z = f(x,y)$ sujeta a la condición $g(x,y) = 0$. Para obtener los máximos o mínimos condicionados, se forma la función de Lagrange:

$$\phi(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y).$$

- Condición necesaria o de primer grado:

Los extremos buscados resultan del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} = f'_x\,(x,y) + \lambda \cdot g'_x\,(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} = f'_y\,(x,y) + \lambda \cdot g'_y\,(x,y) = 0 \end{cases}$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

Formando ahora la diferencial segunda:

$$d^2\phi(x,y) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}dy^2 \text{, con la condición:}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy = 0\,.$$

Entonces, la función tiene un máximo si $d^2\phi < 0$ y un mínimo si $d^2\phi > 0$ (García y Rodríguez, 1985). Si $d^2\phi = 0$ es un caso dudoso y hay que seguir investigando.

Esta condición de segundo grado u orden puede discriminarse, frecuentemente, mediante la formación del denominado "hessiano orlado relevante", que ofrece los siguientes valores:

$$H(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} \Phi''_{x^2} & \Phi''_{xy} & \Phi''_{x\lambda} \\ \Phi''_{xy} & \Phi''_{y^2} & \Phi''_{y\lambda} \\ \Phi''_{x\lambda} & \Phi''_{y\lambda} & \Phi''_{\lambda^2} \end{vmatrix} \left\langle \begin{array}{l} > 0 \rightarrow \text{MÁXIMO (2 variables)} \\ < 0 \rightarrow \text{MÍNIMO} \end{array} \right.$$

donde siempre $\Phi''_{\lambda^2} = 0$. Este proceso se generaliza *n* variables, así:

MÍNIMO $\rightarrow$ siempre H < 0.

MÁXIMO $\rightarrow$ 3 variables $\rightarrow$ H < 0 $\rightarrow$ u = f (x, y, z)
4 variables $\rightarrow$ H > 0 $\rightarrow$ u = f (x, y, z, t)
5 variables $\rightarrow$ H < 0 $\rightarrow$ u = f (x, y, z, t, s)
…………………(y así alternativa y sucesivamente). Con H = 0 es un caso dudoso y hay que seguir investigando.

En la mayoría de los problemas prácticos no resulta necesario efectuar esta distinción, pues a simple vista se conoce la naturaleza del punto extremo o crítico en cuestión.

Método de los determinantes jacobianos

Sea, en el caso de 2 variables, la función objetivo: z = f(x,y) y la ecuación de condición: g(x,y) = 0. El sistema:

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \qquad [I]$$

representará, en general, una curva en el espacio afín tridimensional euclídeo y los valores que toma z serán los de la función f a lo largo de la curva g. Por tanto, razonando como se hace para la obtención de los extremos ordinarios, la condición necesaria para la existencia de extremo condicionado en un punto será la anulación, en dicho punto, de z'_g.

Luego, para la obtención de los posibles puntos extremos, formaremos el sistema:

$$\begin{cases} z'_s = \dfrac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

O bien, como $\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}$ es siempre positivo (obsérvese que ambas derivadas, si el sistema [I] representa una curva, no son idénticamente nulas, simultáneamente) el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = J(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

siendo J(x,y) el determinante funcional jacobiano.

Para deducir las condiciones suficientes, bastará con estudiar el signo de z''_{g^2}. Recordando que:

$$z'_g = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot g'_y - \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot g'_x}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}} = \frac{J}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}}, \text{ se tendrá que: } z''_{g^2} = \frac{\dfrac{\partial z'_g}{\partial x} \cdot g'_y - \dfrac{\partial z'_g}{\partial y} \cdot g'_x}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}},$$

que, en los puntos en que se anula J(x, y), se convierte en:

$$z''_{g^2} = \frac{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y} \cdot J'_x \, g'_y - \sqrt{g'^2_x + g'^2_y} \cdot J'_x \, g'_y}{(g'^2_x + g'^2_y)^{3/2}} = \frac{\dfrac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)}}{g'^2_x + g'^2_y}.$$

Por tanto, si en un punto de los hallados:

$$\begin{cases} z'' > 0 \rightarrow \dfrac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)} > 0, \text{ existe un mínimo relativo} \\[2ex] z'' < 0 \rightarrow \dfrac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)} < 0, \text{ existe un máximo relativo} \end{cases}$$

NOTA: El método expuesto resulta generalizable a *n* variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; si se trata de obtener los extremos de $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con las (n-1) restricciones:

$$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \; ; \; g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \; ; \ldots ; \; g_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \; ;$$

se resuelve el sistema formado por las *n* ecuaciones siguientes:

$$J = \frac{\partial(f, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0 \; ; \; g_1 = 0 \; ; \; g_2 = 0 \; ; \ldots ; \; g_{n-1} = 0 \; ;$$

y para determinar si se trata de un máximo o de un mínimo, se calcula en cada uno de los puntos hallados el signo de:

$$J_1 = \frac{\partial(J, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \; ,$$

resultando un máximo local si $J_1 < 0$ y un mínimo local si $J_1 > 0$ (García y Rodríguez, 1985).

Método de substitución, eliminación o reducción de variables

El problema de los extremos condicionados, generalizado a *n* variables, consiste en hallar los extremos de la función $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfacen la ecuación condicionante: $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Si es posible resolver esta última ecuación para una de las variables, como por ejemplo: $x_1 = h(x_2, \ldots, x_n)$, la solución de x_1 puede substituirse en z resultando: $f\,[h(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n]$, que es una función de (n-1) variables. Llamemos a esta función $F(x_2, \ldots, x_n)$; la obtención de los extremos de z, sujeta a la condición g anteriormente expresada, resulta equivalente a la obtención de los extremos no condicionados de $F(x_2, \ldots, x_n)$ con respecto a las variables $x_2, \ldots, x_n$. El problema de extremos condicionados se reduce, de este modo, al de uno no condicionado y con las mismas variables o bien una variable menos, que podemos resolver en la forma acostumbrada. Esto es, que nos permite pasar de un programa de optimización restringida con restricciones de igualdad a una optimización clásica libre sin ningún tipo de restricciones y con el mismo o inferior número de variables, lo que simplifica notablemente el proceso de resolución.

Por el contrario, a este procedimiento se le puede achacar que envuelve una pérdida de simetría debido a que ofrece preferencia a una de las variables de la condición (que, normalmente, será la más sencilla de despejar en función de las otras). En todo caso, para poder efectuar la sustitución antedicha en un problema general de este tipo, han de poderse explicitar *m* variables de decisión en función de las (n – m) restantes, que es el números de grados de libertad del problema planteado. Y ello no es siempre posible aunque sí lo es en una gran mayoría de problemas prácticos, razón por la cual se presenta aquí mediante algunos ejemplos aclaratorios que veremos a continuación.

Se supone siempre que el número de variables *n* y el número de restricciones *m* son finitos, y además $n > m$. Si sucediese que $n < m$ puede resultar que el conjunto de soluciones factibles fuese el vacío o infinito, con lo cual no existe solución, o es trivial el problema de optimización.

Por otra parte, las restricciones de igualdad en un problema de optimización "reducen" su dimensión. En general, por cada restricción que se añada se pierde un grado de libertad a la hora de obtener los valores que hacen que la función objetivo alcance su valor óptimo (Guzmán et alt., 1999).

Interpretación de los multiplicadores de Lagrange

En epígrafes anteriores se ha visto que los puntos obtenidos al resolver un programa con restricciones de igualdad llevan asociados los denominados multiplicadores de Lagrange (uno por cada restricción o ecuación condicionante). Nos referiremos, a continuación, al significado de dichos multiplicadores, de especial importancia en sus diferentes aplicaciones (Balbás y Gil, 2004).

Para ello, formulemos un programa con restricciones de igualdad, como el siguiente:

$$\text{Optimizar: } f(x_1,\ldots,x_n)$$

$$\text{sujeto a:} \quad \left.\begin{array}{l} g_1(x_1,\ldots,x_n) = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n) = b_m \end{array}\right\} \qquad \text{(I)}$$

donde $f: A \to R$ y $g = (g_1,\ldots,g_m): A \to R^m$ $(n > m)$ son dos funciones de clase C^2 en el abierto $A \subset R^n$.

Si suponemos que $b_1,\ldots,b_m$, pueden variar, es claro que el conjunto factible M dependerá de $b = (b_1,\ldots,b_m)$, y escribiremos simbólicamente:

$$M(b) = \{x \in A \,/\, g(x) = b\}.$$

Intuitivamente, es claro que los puntos óptimos del programa (I) dependerán del valor de $b = (b_1,\ldots,b_m)$. Así si dado $\bar{b} = (\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_m)$ el programa (I) posee un óptimo en el punto: $(\bar{a},\bar{\lambda})(\bar{a} = (\bar{a},\ldots,\bar{a}_n),\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_m))$, y podemos establecer una función $F: B \to R$ (B es un entorno de b), tal que $F(b) = f(a)$ $\forall b \in B$, y a es el óptimo del programa para $b \in B$.

Pues bien, dado un programa como el (I), si para $\bar{b} = (\bar{b}_1, ..., \bar{b}_m)$ la función *f* posee un extremo relativo sobre el conjunto M(b) en el punto $(\bar{a}, \bar{\lambda})$ en el que el determinante funcional jacobiano de la función *g* posee rango *m* y el determinante hessiano orlado es no nulo, entonces se cumple que:

$$-\lambda_i = \frac{\partial F(b)}{\partial b_i}.$$

Así pues, este multiplicador asociado a la i-ésima restricción, nos mide la tasa de variación del valor de la función objetivo *f* en el punto óptimo con respecto a su correspondiente b_i. El opuesto del k-ésimo multiplicador de Lagrange mide el cambio marginal en el valor óptimo de la función objetivo con respecto a la variación del término independiente de la k-ésima restricción b_k. Es decir:

$$\frac{\partial f(z^*)}{\partial b_k} = -\lambda_k^*.$$

Pero los multiplicadores de Lagrange λ_i ($\forall$ i = 1, 2, …, m) pueden tener cierto sentido. Hemos demostrado que los multiplicadores de Lagrange equivalen a derivadas parciales; y estas derivadas son sinónimo del término “marginal”. Por ello, los multiplicadores λ_i pueden interpretarse como cambios marginales (Sánchez, 2014).

ALGUNOS EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1

Hallar, por el método de los multiplicadores de Lagrange, los extremos condicionados de la función: $z = x \cdot y$, si $x + y = 1$.

a) La función de Lagrange o *lagrangiana* es:

$\phi(x,y) = x \cdot y + \lambda(x + y - 1)$, de donde:

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y + \lambda = 0 \,;\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = x + \lambda = 0 \,;\ x + y = 1,$$

de donde, para $\lambda = -\frac{1}{2}$, se obtiene: $x = y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

- Condición suficiente o de segundo grado:

Para determinar si es máximo o mínimo, haremos:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0\,; \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = (\text{lema de Schwartz}) = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = 1; \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0\,,$$

luego, substituyendo: $d^2\phi = 0\cdot dx^2 + 2\cdot 1\cdot dx\cdot dy + 0\cdot dy^2$,

y como: $x + y = 1$, $dx + dy = 0$, o sea, $dy = -dx$.

Substituyendo nuevamente, se tendrá que:

$$d^2\phi = 2\cdot dx\cdot dy = 2\cdot dx\,(-dx) = -2\cdot dx^2 < 0.$$

Por ser negativa $d^2\phi$, en el punto P(½,½,¼) existe, pues, un máximo relativo o local.

b) Otra manera bastante más inmediata de solucionarlo, por el método de reducción de variables que aquí se propugna, conduciría a la siguiente función de una sola variable:

Como: $y = 1 – x$; $z = x\,(1 – x) = x – x^2$; y entonces:

- Condición necesaria o de primer grado:

$$z'_x = 1 – 2x = 0;\ 2x = 1;\ x = ½\,;\ \ y = 1 – ½ = ½\,.$$

Del mismo modo: $z = ½ \cdot ½ = ¼$.

- Condición suficiente o de segundo grado:

Y como: $z''_{x^2} = -2 < 0 \rightarrow$ MÁXIMO local, llegando a la misma conclusión, aunque de modo más simple, que operando por el procedimiento anterior.

Ejemplo 2

Hallar los extremos relativos de: $z = x\cdot y^2$, si $x + y = 6$, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

a) La función de Lagrange o auxiliar es, en este caso:

$$\phi(x,y) = x\cdot y^2 + \lambda(x + y – 6).$$

- Condición necesaria o de primer grado:

Derivando parcialmente: $\frac{\partial\phi}{\partial x} = y^2 + \lambda = 0\,;\quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 2x\cdot y + \lambda = 0\,,$

que, con la condición $x + y = 6$, forman un sistema de ecuaciones cuyas soluciones son las siguientes:

$$\begin{cases} \text{Para } \lambda = 0: \quad \Rightarrow \quad x = 6,\ y = 0. \\ \text{Para } \lambda = -16: \quad \Rightarrow \quad x = 2,\ y = 4. \end{cases}$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

La diferencial segunda de ϕ es: $d^2\phi = 2y \cdot dx \cdot dy + 2x \cdot dy^2$,

y como de la ecuación de condición se deduce que: $dx + dy = 0$, se obtiene también $dy = -dx$, y se tiene que: $d^2\phi = (-2y + 2x)dy^2$. Entonces:

$$\begin{cases} \text{Para } x = 6,\ y = 0:\ d^2\phi = 12dy^2 > 0; \text{ luego en } (6, 0, 0) \text{ hay un mínimo local.} \\ \text{Para } x = 2,\ y = 4:\ d^2\phi = -4dy^2 < 0; \text{ luego en } (2, 4, 32) \text{ hay un máximo local.} \end{cases}$$

b) Por reducción de variables se llegará a las mismas conclusiones, puesto que de la ecuación condicionante se tendrá: $y = 6 – x$; y substituyendo este valor en la función objetivo resultará:

$$z = x(6 - x)^2 = x(36 + x^2 - 12x) = x^3 - 12x^2 + 36x\ ;$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$z'_x = 3x^2 - 24x + 36 = 0\ ;\ \ x^2 - 8x + 12 = 0\ ;$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{matrix} 6 = x_1 \\ 2 = x_2 \end{matrix} \right. .$$

Hay, pues, 2 puntos críticos: $\left\langle \begin{matrix} P_1(6{,}0) \\ P_2(2{,}4) \end{matrix} \right. .$

- Condición suficiente o de segundo grado:

$z''_{x^2} = 6x - 24$, $\quad \rightarrow$ en P_1 es $12 > 0 \Rightarrow$ MÍNIMO en P_1 (6, 0, 0)

$\rightarrow$ en P_2 es $-12 < 0 \Rightarrow$ MÁXIMO en P_2 (2, 4, 32)

Ejemplo 3

Obtener los extremos de la función $z = x^2 + y^2$, con la condición siguiente: $x + y – 2 = 0$, aplicando diversos procedimientos.

a) Aplicando el método de los jacobianos, se empieza por resolver el sistema:

$$\begin{cases} J = \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$, que en el presente caso resulta ser:

$$\begin{cases} J = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2y = 0 \\ g = x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

que, resuelto, proporciona los valores: $x = 1$, $y = 1$.

Para determinar si se trata de un máximo o de un mínimo, se calcula:

$$\frac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 > 0\,,$$

resultando, por tanto, un mínimo local en $x = 1$, $y = 1$, $z = 1 + 1 = 2$.

b) Aplicando, ahora, el método de los multiplicadores de Lagrange, empezaremos por formar la función de Lagrange o auxiliar siguiente:

$$\phi = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2).$$

- Condición necesaria o de primer grado:

Anulando sus dos derivadas parciales, se tendrá:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \end{cases}$$

de donde $x = y$, que con $x + y - 2 = 0$ proporciona $x = 1$ e $y = 1$.

- Condición suficiente o de segundo grado:

Para determinar si esta solución corresponde a un máximo o a un mínimo, se obtiene $d^2\phi$, y según que sea: $d^2\phi > 0$ o $d^2\phi < 0$ se tratará de un mínimo o de un máximo, respectivamente. En nuestro caso sucede que:

$$d^2\phi = 2\cdot dx^2 + 2\cdot dy^2\,,$$

y como de la condición: $dx + dy = 0$ se tiene: $d^2\phi = 4\cdot dx^2$, que en todos los casos es positiva, luego se trata de un mínimo local, cuyo valor es $z = 2$.

c) El problema planteado también puede resolverse directamente por reducción de variables, quedándonos una sencilla función objetivo de una sola variable independiente, ya que:

$$z = x^2 + y^2 \text{ ; si: } x + y - 2 = 0 \text{ ; } y = 2 - x \text{ ;}$$

$$z = x^2 + (2 - x)^2 = x^2 + 4 + x^2 - 4x = 2x^2 - 4x + 4\,.$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$z'_x = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 - 1 = 1 \; ; \; z = 1 + 1 = 2.$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

$$z''_{x^2} = 4 > 0 \Rightarrow \text{Luego se trata de un MÍNIMO, en } P_0(1, 1, 2).$$

Ejemplo 4

Determinar, por diversos procedimientos, los extremos de la función siguiente: $z = x^2 + y^2$, con la condición $x^2 + 8x \cdot y + 7y^2 - 225 = 0$.

a) Método de los jacobianos. Calculemos el jacobiano de las funciones f y g, así:

$$J = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x+8y & 8x+14y \end{vmatrix} = 8(2x^2 + 3x \cdot y - 2y^2)\,.$$

Resolvamos el sistema J = 0, g = 0:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x \cdot y - 2y^2 = 0 \\ x^2 + 8x \cdot y + 7y^2 - 225 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando por -2 la segunda ecuación y sumando, se obtiene:

$$13xy + 16y^2 = 450, \text{ de donde: } x = \frac{450 - 16y^2}{13y} \quad [I]$$

y substituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones, se obtiene:

$$y^4 + 25y^2 - 900 = 0,$$

que es una ecuación bicuadrada, que proporciona: $y^2 = \frac{-25 \pm 65}{2} = \left\langle \begin{matrix} 20 \\ -45 \end{matrix} \right.$.

De la primera solución se deduce que $y = \pm 2\sqrt{5}$, que sustituida en [I] da, para valores de x: $x = \pm\sqrt{5}$.

De la segunda no se obtiene solución real.

Para precisar si se trata de máximos o de mínimos, se obtiene:

$$J_1(x,y) = \frac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)} = 8\begin{vmatrix} 4x+3y & 3x-4y \\ 2x+8y & 8x+14y \end{vmatrix} = 8(26x^2 + 64x \cdot y + 74y^2),$$

y como tanto $J_1(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ como $J_1(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$ son positivos, en ambos puntos existen mínimos relativos de valor:

$$z = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{20})^2 = 5 + 20 = 25.$$

b) Este mismo problema, resuelto por el método de reducción de variables, queda establecido así:

$$[\text{OPT}]\ z = x^2 + y^2,$$

con la condición: $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$; luego substituyendo en la función objetivo, resultará:

$$z = 225 - 8x \cdot y - 6y^2\ ;$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\begin{cases} z'_x = -8y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ z'_y = -8x - 12y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

$z''_{x^2} = 0$; $z''_{xy} = z''_{yx} = -8$; $z''_{y^2} = -12$; luego formaremos el determinante funcional hessiano:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & -8 \\ -8 & -12 \end{vmatrix} = -64 < 0,$$

que ofrece un "punto de silla", y el problema debe ser resuelto por otros métodos. En este caso, pues, el método de reducción de variables no ha resultado efectivo para la resolución del problema planteado.

c) Resolveremos, ahora, el problema aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange. Formando la correspondiente función de Lagrange y anulando sus derivadas primeras, tendremos:

$$\phi = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 8x \cdot y + 7y^2 - 225).$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\begin{cases} \phi'_x = 2x + 2\lambda x + 8\lambda y = 0 \\ \phi'_y = 2y + 8\lambda x + 14\lambda y = 0 \\ \phi'_\lambda = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 \end{cases}$$

Podríamos eliminar λ entre las dos primeras ecuaciones, pero, en este caso, es preferible obtener los posibles valores de λ, imponiendo la condición de compatibilidad del sistema anterior, esto es:

$$\begin{vmatrix} 2(1+\lambda) & 8\lambda \\ 8\lambda & 2(1+7\lambda) \end{vmatrix} = 0 \text{, de donde se obtiene: } 9\lambda^2 - 8\lambda - 1 = 0,$$

que proporciona las raíces: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1/9$. Para $\lambda_1 = 1$, por sustitución en cualquiera de las ecuaciones del sistema anterior, se encuentra $x = -2y$, valor que, al ser sustituido en la ecuación de condición, conduce a:

$$4y^2 - 16y^2 + 7y^2 = 225, \quad -5y^2 = 225, \text{ de donde: } y = 3i\cdot\sqrt{5},$$

solución imaginaria pura que no proporciona extremos.

Para $\lambda_2 = -1/9$, análogamente, se encuentra $y = 2x$ y al substituir en la ecuación de condición resulta:

$$x^2 + 16x^2 + 28x^2 = 225, \quad 45x^2 = 225, \text{ o bien:}$$

$$x = \pm\sqrt{5} \quad \text{y, por tanto,} \quad y = \pm 2\sqrt{5}, \quad z = 25.$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

Para precisar si se trata de máximos o mínimos se obtiene:

$$d^2\phi = 2(1 + \lambda)dx^2 + 16\lambda\cdot dx\cdot dy + 2(1 + 7\lambda)dy^2 .$$

De la ecuación de condición, por diferenciación, se obtiene *dy* en función de *dx*:

$$(2x + 8y)dx + (8x + 14y)dy = 0.$$

Substituyendo *dy* por su valor y para $y = 2x$, $\lambda = -1/9$, se obtiene:

$d^2\phi = \frac{25}{9}dx^2$, que al ser positivo nos dice que en ambos puntos críticos existen mínimos relativos.

De pretender resolverlo alternativamente formando el hessiano orlado relevante, se tiene, a partir de la función auxiliar:

$$\phi = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 8xy + 7y^2 - 225) ;$$

$$\phi''_{x^2} = 2 + 2\lambda ; \quad \phi''_{xy} = 8\lambda = \phi''_{yx} ; \quad \phi''_{x\lambda} = 2x + 8y ;$$

$$\phi''_{y^2} = 2 + 14\lambda ; \quad \phi''_{y\lambda} = 8x + 14y ; \quad \text{y resultará el hessiano:}$$

$$H(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} 2+2\lambda & 8\lambda & 2x+8y \\ 8\lambda & 2+14\lambda & 8x+14y \\ 2x+8y & 8x+14y & 0 \end{vmatrix} = 8\lambda(8x + 14y)(2x + 8y) + 8\lambda(2x +$$

$+ 8y)(8x + 14y) – (2x + 8y)^2(2 + 14\lambda) – (2 + 2\lambda)(8x + 14y)^2 =$

$= 16\lambda(8x + 14y)(2x + 8y) – (4x^2 + 64y^2 + 32xy)(2 + 14\lambda) – (2 + 2\lambda)(64x^2 +$

$+ 196\, y^2 + 224\, xy) =$ ……, de resolución harto laboriosa, al que habrá que sustituir los valores obtenidos de λ, x e y, por lo que resulta más práctico hallar el valor numérico del determinante funcional hessiano para ambos puntos críticos obtenidos. Y así, para $(\sqrt{5},2\sqrt{5})$ se tendrá:

$$H(\sqrt{5},2\sqrt{5},–1/9) = \begin{vmatrix} 16/9 & -8/9 & 18\sqrt{5} \\ -8/9 & 4/9 & 36\sqrt{5} \\ 18\sqrt{5} & 36\sqrt{5} & 0 \end{vmatrix} = –18000 < 0,$$

luego se trata de un mínimo relativo o local. Del mismo modo, para $(–\sqrt{5},–2\sqrt{5})$ se tendrá:

$$H(–\sqrt{5},–2\sqrt{5},–1/9) = \begin{vmatrix} 16/9 & -8/9 & -18\sqrt{5} \\ -8/9 & 4/9 & -36\sqrt{5} \\ -18\sqrt{5} & -36\sqrt{5} & 0 \end{vmatrix} = –18000 < 0,$$

con lo que también se tratará de un mínimo relativo, c.s.q.d.

Ejemplo 5

Hallar, por diversos procedimientos, los máximos y mínimos de la función: $u = x\cdot y^2\cdot z^3$, con la condición x + y + z = 12, siendo x, y, z positivas.

a) Siendo x, y, z positivas, los extremos de la función u, coincidirán con los de la función ln u, donde por *ln* denotamos el logaritmo neperiano o natural. Por tanto, la función de Lagrange o auxiliar será:

$$\Phi\ (x, y, z) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z + \lambda\ (x + y + z – 12).$$

- Condiciones necesarias o de primer grado:

Sus derivadas parciales igualadas a cero proporcionan el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \Phi'_x = \dfrac{1}{x} + \lambda = 0 \\ \Phi'_y = \dfrac{2}{y} + \lambda = 0 \\ \Phi'_z = \dfrac{3}{z} + \lambda = 0 \\ \Phi'_\lambda = x + y + z - 12 = 0 \end{cases} \qquad \text{, o bien, } -\frac{1}{\lambda} = x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3},$$

que con la condición x + y + z = 12, nos proporcionan, en definitiva, los valores:

$$x = 2, \quad y = 4, \quad z = 6, \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$$

- Condiciones suficientes o de segundo grado:

Si ahora calculásemos en dicho punto la diferencial segunda de u, encontraríamos que en (2, 4, 6) existe un máximo. Sin embargo, vamos a partir del determinante funcional hessiano orlado relevante, con lo que:

$$\left|\begin{array}{l} \Phi''_{x^2} = -\frac{1}{x^2} \\ \Phi''_{xy} = 0 \\ \Phi''_{xz} = 0 \\ \Phi''_{x\lambda} = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \Phi''_{y^2} = -\frac{2}{y^2} \\ \Phi''_{yx} = 0 \\ \Phi''_{yz} = 0 \\ \Phi''_{y\lambda} = 1 \end{array}\left| \begin{array}{l} \Phi''_{z^2} = -\frac{3}{z^2} \\ \Phi''_{zx} = 0 \\ \Phi''_{zy} = 0 \\ \Phi''_{z\lambda} = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \Phi''_{\lambda^2} = 0 \\ \Phi''_{\lambda x} = 1 \\ \Phi''_{\lambda y} = 1 \\ \Phi''_{\lambda z} = 1 \end{array}\right|$$

$$H(x, y, z, \lambda) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{y^2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{z^2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\text{desarrollando por los elementos de la 4ª fila}) =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{x^2} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{z^2} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{z^2} & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{x^2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{6}{y^2 z^2} - \frac{3}{x^2 z^2} - \frac{2}{x^2 y^2} < 0 \quad (3 \text{ variables}),$$

luego pudiera ser máximo o mínimo.

El mismo problema, resuelto directamente (más largo), ofrece:

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\Phi = x \cdot y^2 \cdot z^3 + \lambda\,(x + y + z - 12);$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi'_x = y^2 z^3 + \lambda = 0 \\ \Phi'_y = 2\,x\,y\,z^3 + \lambda = 0 \\ \Phi'_z = 3\,x\,y^2 z^2 + \lambda = 0 \\ \Phi'_\lambda = x + y + z - 12 = 0 \end{array}\right\} \text{ de donde:}$$

$y^2 z^3 = 2 x y z^3 = 3 x y^2 z^2$; dividido por $y z^2$: $y z = 2 x z = 3 x y$; $\left.\begin{matrix} y = 2x \\ z = 3x \end{matrix}\right\}$

Entonces: $x + 2 x + 3 x = 12 \left\langle \begin{matrix} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 6 \end{matrix}\right.$, luego en el punto crítico P(2, 4, 6) hay un extremo relativo.

- Condición suficiente o de segundo grado:

$$\begin{vmatrix} \Phi''_{x^2} = 0 \\ \Phi''_{xy} = 2 y z^3 \\ \Phi''_{xz} = 3 y^2 z^2 \\ \Phi''_{x\lambda} = 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Phi''_{y^2} = 2 x z^3 \\ \Phi''_{yx} = 2 y z^3 \\ \Phi''_{yz} = 6 x y z^2 \\ \Phi''_{y\lambda} = 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Phi^2_{z^2} = 6 x y^2 z \\ \Phi''_{zx} = 3 y^2 z^2 \\ \Phi''_{zy} = 6 x y z^2 \\ \Phi''_{z\lambda} = 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Phi''_{\lambda^2} = 0 \\ \Phi''_{\lambda x} = 1 \\ \Phi''_{\lambda y} = 1 \\ \Phi''_{\lambda z} = 1 \end{vmatrix}$$, con lo cual:

$$H(x, y, z, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 2 y z^3 & 3 y^2 z^2 & 1 \\ 2 y z^3 & 2 x z^3 & 6 x y z^2 & 1 \\ 3 x^2 z^2 & 6 x y z^2 & 6 x y^2 z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$ (desarrollando por los elementos de la 4ª fila) =

$$= -\begin{vmatrix} 2 y z^3 & 3 y^2 z^2 & 1 \\ 2 x z^3 & 6 x y z^2 & 1 \\ 6 x y z^2 & 6 x y^2 z & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 y^2 z^2 & 1 \\ 2 y z^3 & 6 x y z^2 & 1 \\ 3 y^2 z^2 & 6 x y^2 z & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 y z^3 & 1 \\ 2 y z^3 & 2 x z^3 & 1 \\ 3 y^2 z^2 & 6 x y z^2 & 1 \end{vmatrix} =$$

= ……………….. (llegando a las mismas conclusiones que mediante el proceso simplificado anterior).

Con $\left\langle \begin{matrix} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 6 \end{matrix}\right.$, substituyendo estos valores en el hessiano anterior, se tiene que:

$$H(x, y, z, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1728 & 1728 & 1 \\ 1728 & 864 & 1728 & 1 \\ 1728 & 1728 & 1152 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\,985\,984 < 0,$$

luego puede ser máximo o mínimo (3 variables), y seguimos sin encontrar la solución definitiva.

b) Resolviéndolo mediante un ejemplo simple (por tanteo), tendríamos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x=1 \\ y=5 \\ \underline{z=6} \\ \sum=12 \end{array}\right\} u = x \cdot y^2 \cdot z^3 = 1 \times 25 \times 216 = 5400$$, y alternativamente:

$$\left.\begin{array}{r} x=2 \\ y=4 \\ \underline{z=6} \\ \sum=12 \end{array}\right\} u = x \cdot y^2 \cdot z^3 = 2 \times 16 \times 216 = 6912$$, y así sucederá para todas las combinaciones posibles de tres cantidades positivas que cumplan la restricción impuesta en el enunciado, luego parece obvio que en el punto crítico $P_0(2, 4, 6)$ existe un MÁXIMO RELATIVO.

c) A continuación, ensayaremos el método de reducción de variables, y se tendrá que:

x = 12 – y – z, con lo que substituyendo en la función objetivo, se tendrá:

$\Phi = (12 - y - z) \cdot y^2 \cdot z^3 = 12\, y^2 z^3 - y^3 z^3 - y^2 \cdot z^4 = \Phi\,(y, z)$, que ya es un caso de extremos no condicionados y solo 2 variables.

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi'_y = 24\, z^3 \cdot y - 3\, y^2\, z^3 - 2\, y\, z^4 = 0 \\ \Phi'_z = 36\, y^2 \cdot z^2 - 3\, y^3\, z^2 - 4\, y^2\, z^3 = 0 \end{array}\right\}$$ de donde:

$$\begin{array}{l} \;\; 24 - 3y - 2z = 0 \\ \underline{-36 + 3y + 4z = 0} \\ -12 + 2z = 0 \;\Rightarrow\; z = 6;\quad y = \dfrac{24 - 2\,z}{3} = \dfrac{24 - 12}{3} = 4;\quad x = 12 - 4 - 6 = 2. \end{array}$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

Formaremos el hessiano:

$$H(y, z) = \begin{vmatrix} \Phi''_{y^2} & \Phi''_{yz} \\ \Phi''_{yz} & \Phi''_{z^2} \end{vmatrix}$$, con los siguientes valores reales:

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi''_{y^2} = 24\, z^3 - 6\, y\, z^3 - 2\, z^4 = 5184 - 5184 - 2592 = -2592 \\ \Phi''_{yz} = 72\, y\, z^2 - 9\, y^2\, z^2 - 8\, y\, z^3 = 10368 - 5184 - 6912 = -1728 \\ \Phi''_{z^2} = 72\, y^2\, z - 6\, y^3\, z - 12\, y^2\, z^2 = 6912 - 2304 - 6912 = -2304 \end{array}\right.$$

$$H(4,6) = \begin{vmatrix} -2592 & -1728 \\ -1728 & -2304 \end{vmatrix} = 5\,971968 - 2\,985\,984 = 2\,985\,984 > 0,$$

$$\text{con}\ \Phi''_{y^2} = -2592 < 0,$$

luego se trata de un MÁXIMO relativo o local en el punto crítico $P_0(2, 4, 6)$, con un valor: $u = x \cdot y^2 \cdot z^3 = 2 \times 16 \times 216 = 6912$.

Obsérvese la mayor facilidad de resolución que se obtiene empleando este último procedimiento (reducción o eliminación de variables) en el presente ejemplo comparado con el método de los multiplicadores de Lagrange, así como el hecho que nos ha permitido discriminar fácilmente la naturaleza del punto crítico hallado como consecuencia de la aplicación de la condición necesaria o de primer grado. De ahí el interés de su empleo en la mayoría de los casos que se presentan en la práctica.

Ejemplo 6

Hallar, por diversos procedimientos, el máximo del producto: $x \cdot y \cdot z$, cuando $x + y + z = a$; siendo x, y, z positivos.

a) Formaremos, en principio, la función auxiliar o lagrangiana siguiente:

$$\Phi = x \cdot y \cdot z + \lambda(x + y + z - a)\ .$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi'_x = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = y \cdot z + \lambda = 0 \\ \Phi'_y = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = x \cdot z + \lambda = 0 \\ \Phi'_z = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = x \cdot y + \lambda = 0 \\ \Phi'_\lambda = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = x + y + z - a = 0 \end{array}\right\} x = y = z;\ 3x = a;,\ \text{de donde:}$$

$$x = \frac{a}{3};\quad y = \frac{a}{3};\quad z = \frac{a}{3};\ P_{\text{máx.}} = x \cdot y \cdot z = \frac{a^3}{27}\ ;\ \text{con: } \lambda = -\frac{a^2}{9}\ .$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

$$\left| \begin{array}{c|c|c|c} \Phi''_{x^2} = 0 & \Phi''_{y^2} = 0 & \Phi''_{z^2} = 0 & \Phi''_{\lambda^2} = 0 \\ \Phi''_{xy} = z & \Phi''_{yx} = z & \Phi''_{zx} = y & \Phi''_{\lambda x} = 1 \\ \Phi''_{xz} = y & \Phi''_{yz} = x & \Phi''_{zy} = x & \Phi''_{\lambda y} = 1 \\ \Phi''_{x\lambda} = 1 & \Phi''_{y\lambda} = 1 & \Phi''_{z\lambda} = 1 & \Phi''_{\lambda z} = 1 \end{array} \right|\ ;\ \text{el hessiano orlado relevante, será:}$$

$$H(x,y,z,\lambda)=\begin{vmatrix}0 & z & y & 1\\ z & 0 & x & 1\\ y & x & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}z & y & 1\\ 0 & x & 1\\ x & 0 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & y & 1\\ z & x & 1\\ y & 0 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & z & 1\\ z & 0 & 1\\ y & x & 1\end{vmatrix}=$$

= - (x z + x y - x^2) + (y^2 – x y – z y) – (z y + z x – z^2) = (operando adecuadamente) = - 2 x^2 – 2 x^2 – 2 x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = - 6 x^2 + 3 x^2 = - 3 x^2 = $-\frac{a^2}{3}<0$ (3 variables), luego pudiera ser máximo o mínimo, y habrá que intentar la resolución de este problema por algún otro procedimiento.

b) Método de reducción de variables:

Haciendo la sustitución en la función objetivo: z = a – x – y, resulta la función de 2 variables siguiente:

$$\Phi(x,y) = x\cdot y(a – x – y) = a\cdot x\cdot y – x^2\cdot y – x\cdot y^2;$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi'_x = a\,y - 2\,y\,x - y^2 = 0\\ \Phi'_y = a\,x - x^2 - 2\,y\,x = 0\end{array}\right\} \text{ del que resulta } \left.\begin{array}{l}a-2\,x-y=0\\ a-x-2\,y=0\end{array}\right\}$$

y, en definitiva, $x=y=z=\frac{a}{3}$ (punto crítico).

- Condición suficiente o de segundo grado:

$$\left\{\begin{array}{l}\Phi''_{x^2}=-2\,y\\ \Phi''_{xy}=\Phi''_{xy}=a-2\,x-2\,y\\ \Phi''_{y^2}=-2\,x\end{array}\right.,\text{ y entonces: } H(x,y,z)=\begin{vmatrix}-2\,y & a-2\,(x+y)\\ a-2\,(x+y) & -2\,x\end{vmatrix}=$$

$$=-a^2-4\,x^2-4\,y^2-4\,x\,y+4\,a\,x+4\,a\,y=-a^2-\frac{4\,a^2}{3}+\frac{8\,a^2}{3}=\frac{4\,a^2}{3}-a^2=\frac{a^2}{3}>0\,;$$

$\Phi''_{x^2}=-2y=\frac{-2\,a}{3}<0$, luego hay un MÁXIMO RELATIVO en el punto $P\,(a/3, a/3, a/3)$, lo que resuelve eficazmente el problema planteado.

Así pues, al igual que sucede en el ejemplo anterior, el método de reducción de variables o sustitución ha permitido discriminar fácilmente la naturaleza del punto crítico hallado, circunstancia que no se había conseguido por la aplicación del método de los multiplicadores de Lagrange.

Ejemplo 7.

Consideremos el programa siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Optimizar} \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2 + 2 \\ &\text{sujeta a:} \qquad x_1^3 - x_2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Solución:

a) De la restricción dada podemos obtener: $x_2 = x_1^3 - 2,$ y substituyendo en la función objetivo (método de eliminación de variables) tenemos que:

$\Phi(x_1) = x_1^2 + 2x_1^3 - 2$, que ya es una función real de una sola variable real.

Encontremos, ahora, los extremos de esta función:

$$\frac{d\Phi}{dx_1} = 2x_1 + 6x_1^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1/3 \end{cases}$$

La deriva segunda será:

$$\frac{d^2\Phi}{dx_1^2} = 2 + 12x_1, \qquad \frac{d^2\Phi(0)}{dx_1^2} = 2 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2\Phi(-1/3)}{dx_1^2} = -2 < 0\,.$$

Por tanto, en dichos puntos, la función objetivo Φ presenta un mínimo y un máximo relativos, respectivamente.

Substituyendo dichos puntos en $x_2 = x_1^3 - 2$ podemos concluir que (0, -2) y (-1/3, -55/27) son, respectivamente, el mínimo y el máximo relativos del programa original (Balbás y Gil, 2004).

b) El problema puede también resolverse formulando la correspondiente función lagrangiana: $\Phi = x_1^2 + 2x_2 + 2 + \lambda(x_1^3 - x_2 - 2)$.

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\left.\begin{aligned} \Phi'_{x_1} &= 2x_1 + 3 \cdot \lambda \cdot x_1^2 = 0 \\ \Phi'_{x_2} &= 2 - \lambda = 0 \\ \Phi'_{\lambda} &= x_1^3 - x_2 - 2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

De la resolución de este sistema, con λ = 2, surgen los dos puntos críticos: (0, -2) y $\left(-1/3, -55/27\right)$.

- El punto crítico (0, -2) ofrece un valor de la función objetivo:

$$\Phi = 2 \times (-2) + 2 = -2 \text{ (MÍNIMO RELATIVO).}$$

- El punto crítico $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{55}{27}\right)$ ofrece un valor de la función objetivo:

$$\Phi = \frac{3}{27} - \frac{110}{27} + \frac{54}{27} = -\frac{53}{27} \approx -1.96 > -2 \text{ (MÁXIMO RELATIVO).}$$

- Condición suficiente o de segundo grado.

Para corroborar lo anterior, formemos el correspondiente hessiano orlado relevante, esto es:

$\Phi''_{x_1^2} = 2 + 12x_1$; $\Phi''_{x_2^2} = 0$; $\Phi''_{x_1x_2} = 0$; $\Phi''_{x_2\lambda} = -1$; $\Phi''_{x_1\lambda} = 3x_1^2$; y entonces:

$$H(x_1, x_2, \lambda) = \begin{vmatrix} \Phi''_{x_1^2} & \Phi''_{x_1x_2} & \Phi''_{x_1\lambda} \\ \Phi''_{x_1x_2} & \Phi''_{x_2^2} & \Phi''_{x_2\lambda} \\ \Phi''_{x_1\lambda} & \Phi''_{x_2\lambda} & \Phi''_{\lambda^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+12x_1 & 0 & 3x_1^2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3x_1^2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 12x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{con } x_1 = 0 \Rightarrow H = -2 < 0 \Rightarrow \text{MÍNIMO LOCAL} \\ \text{con } x_1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow H = -2 + 4 = 2 > 0 \Rightarrow \text{MÁXIMO LOCAL} \end{cases}$$

que ofrece el mismo resultado que el que se deducía directamente de la aplicación de la condición necesaria, c.s.q.d.

CASO PRÁCTICO

Llegados a este punto, veamos que idénticas formulaciones a las propuestas por este autor en sus estudios para el caso de las conducciones libres (véase Cap. I, epígrafes 4.3. y siguientes del libro "Cinco temas de Hidrología e Hidráulica", Universitat Internacional de Catalunya, Tortosa, 2003, citado en la bibliografía) se pueden aplicar, con las correcciones correspondientes, en el cálculo y diseño de las conducciones forzadas o a presión[1]. Para ello, se ha partido de las fórmulas correspondientes a las 6 primeras categorías de rugosidad, y que se expresan a continuación en la siguiente tabla, en función del material del tubo y para conducciones usadas o en servicio.

Dichas fórmulas adoptarán la configuración general: $V = K \cdot R^{\beta} \cdot J^{0'5}$, en la que se da la velocidad (m./s.) en función del radio hidráulico (m.), de la pérdida de carga unitaria (m./m.l.) y de coeficientes según las diversas categorías de rugosidad. A saber:

[1] *Vide* "Cálculo hidráulico de las conducciones libres y forzadas".

Tabla 1. Coeficientes de la formulación propuesta por Franquet según las diferentes categorías de rugosidad.

Grado de rugosidad (k)	Material	K	β
1	Plásticos, vidrio, latón	86.85	0.62150
2	Fibrocemento, aluminio	78.29	0.63455
3	Acero, otros metales	70.02	0.64760
4	Fundición	63.92	0.65560
5	Hormigón	56.24	0.66540
6	Cerámica	49.51	0.67725

Fuente: elaboración propia.

La formulación anterior, sin embargo, resulta más práctica de aplicar en función del diámetro interior (m.) de la conducción y del caudal o gasto (m^3/s.) circulante por la misma, con lo que, para el caso básico estudiado (tubería en servicio o usada), se tendrían, correlativamente, las siguientes expresiones, en las que también se ha despejado la pérdida unitaria de carga (m./m.) y se han incluido las intermedias obtenidas por interpolación lineal:

Tabla 2. Expresiones propuestas de la velocidad, caudal y pérdida unitaria de carga para tuberías en servicio.

Rugosidad (k)	V (m./s.)	Q (m^3/s.)	J (m./m.)
1.0	$\mathbf{36.69 \cdot D^{0.6215} \cdot J^{0.5}}$	$\mathbf{28.82 \cdot D^{2.6215} \cdot J^{0.5}}$	$\mathbf{0.000743 \cdot V^2 \cdot D^{-1.243}}$
1.5	$34.59 \cdot D^{0.62802} \cdot J^{0.5}$	$27.16 \cdot D^{2.62802} \cdot J^{0.5}$	$0.000845 \cdot V^2 \cdot D^{-1.256}$
2.0	$\mathbf{32.48 \cdot D^{0.63455} \cdot J^{0.5}}$	$\mathbf{25.51 \cdot D^{2.63455} \cdot J^{0.5}}$	$\mathbf{0.000948 \cdot V^2 \cdot D^{-1.2691}}$
2.5	$30.51 \cdot D^{0.6411} \cdot J^{0.5}$	$23.96 \cdot D^{2.6411} \cdot J^{0.5}$	$0.001088 \cdot V^2 \cdot D^{-1.2821}$
3.0	$\mathbf{28.53 \cdot D^{0.6476} \cdot J^{0.5}}$	$\mathbf{22.41 \cdot D^{2.6476} \cdot J^{0.5}}$	$\mathbf{0.001229 \cdot V^2 \cdot D^{-1.2952}}$
3.5	$27.14 \cdot D^{0.6516} \cdot J^{0.5}$	$21.32 \cdot D^{2.6516} \cdot J^{0.5}$	$0.001368 \cdot V^2 \cdot D^{-1.3032}$
4.0	$\mathbf{25.76 \cdot D^{0.6556} \cdot J^{0.5}}$	$\mathbf{20.23 \cdot D^{2.6556} \cdot J^{0.5}}$	$\mathbf{0.001507 \cdot V^2 \cdot D^{-1.3112}}$
4.5	$24.06 \cdot D^{0.6605} \cdot J^{0.5}$	$18.89 \cdot D^{2.6605} \cdot J^{0.5}$	$0.001753 \cdot V^2 \cdot D^{-1.321}$
5.0	$\mathbf{22.36 \cdot D^{0.6654} \cdot J^{0.5}}$	$\mathbf{17.56 \cdot D^{2.6654} \cdot J^{0.5}}$	$\mathbf{0.002 \cdot V^2 \cdot D^{-1.3308}}$
5.5	$20.86 \cdot D^{0.6713} \cdot J^{0.5}$	$16.38 \cdot D^{2.6713} \cdot J^{0.5}$	$0.002334 \cdot V^2 \cdot D^{-1.3426}$
6.0	$\mathbf{19.36 \cdot D^{0.67725} \cdot J^{0.5}}$	$\mathbf{15.21 \cdot D^{2.67725} \cdot J^{0.5}}$	$\mathbf{0.002668 \cdot V^2 \cdot D^{-1.3545}}$

Fuente: elaboración propia.

Una visión más completa y justificada de la minimización de las pérdidas de carga unitarias para cada una de las seis (u once) categorías de rugosidad anteriormente definidas, puede llevarse a cabo a partir de la ecuación condicionante: $V = 1.4466 \times D + 0.638$, también deducida por quien suscribe, que representa la velocidad máxima admisible de circulación del agua por la conducción en función del diámetro interior de la misma (Franquet, 2005).

Si consideramos, v. gr., una categoría de rugosidad de la tubería de k = 5, se tendrá la expresión correspondiente propuesta de la pérdida de carga unitaria que intentaremos minimizar por el método de los operadores de Lagrange aplicando la condición necesaria o de primer grado, así:

$$\begin{cases} J = 0.002 \times V^2 \times D^{-1.3308} \\ J'_V = 0.004 \times V \times D^{-1.3308} = 0 \\ J'_D = 0.002 \times V^2 \times (-1.3308) \times D^{-2.3308} = 0 \end{cases}$$

Siendo necesariamente V y D positivos, los extremos condicionados de la función J coincidirán con los de la función ln J. Ello se realiza para mayor facilidad de cálculo, pues de esta forma el producto se convierte en una suma o adición. Por tanto, formamos la función lagrangiana o auxiliar siguiente:

$$\Phi\ (V, D) = \ln 0.002 + 2 \times \ln V - 1.3308 \times \ln D + \lambda\ (V - 1.4466 \cdot D - 0.638).$$

La condición necesaria o de primer grado exige que:

$$\left.\begin{aligned} \Phi'_V &= \frac{2}{V} + \lambda = 0 \\ \Phi'_D &= -\frac{1.3308}{D} - 1.4466 \cdot \lambda = 0 \\ \Phi'_\lambda &= V - 1.4466 \cdot D - 0.638 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ de donde se deduce: } \lambda = -\frac{2}{V} = -\frac{1.3308}{1.4466 \cdot D}\ ;$$

$$\frac{2}{1.4466 \cdot D + 0.638} = \frac{1.3308}{1.4466 \cdot D}\ ;\ 2.8932 \cdot D = 1.9251 \cdot D + 0.849;$$

$0.9681 \times D = 0.849 \quad \Rightarrow \quad D = 0.877$ m., lo que limita la velocidad máxima aconsejable, según hemos visto, a:

$$V = 1.4466 \times 0.877 + 0.638 = 1.91 \text{ m./s. ; y entonces:}$$

$\lambda = -\frac{2}{V} = -\frac{2}{1.91} = -1.049$; con un caudal de: $Q = 0.7854 \times V \times D^2 =$
$= 0.7854 \times 1.91 \times 0.877^2 = 1.15$ m^3/s., y una pérdida unitaria de carga de:

$$J = \frac{0.002 \times 1.91^2}{0.877^{1.3308}} = 0.00866 \text{ m/m.}$$

Condición de segundo grado o suficiente:

Para ello formaremos el determinante funcional hessiano orlado relevante, con lo que:

$$H(V,D,\lambda) = \begin{vmatrix} \Phi''_{V^2} & \Phi''_{VD} & \Phi''_{V\lambda} \\ \Phi''_{VD} & \Phi''_{D^2} & \Phi''_{D\lambda} \\ \Phi''_{V\lambda} & \Phi''_{D\lambda} & \Phi''_{\lambda^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{V^2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1.3308}{D^2} & -1.4466 \\ 1 & -1.4466 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1.3308}{D^2} + \frac{4.1853}{V^2} =$$

$$= -\frac{1.3308}{0.877^2} + \frac{4.1853}{1.91^2} = 1.147 - 1.730 = -0.58 < 0 \rightarrow$$ luego se trata de un MÍNIMO relativo o local en el punto crítico $P_0(1.91,0.877,0.00866)$.

Comprobación por tanteo:

- Si suponemos: D = 1.000 m $\Rightarrow$ V = 1.4466 $\times$ 1 + 0.638 = 2.08 m/s.

$$\text{Entonces: } J = \frac{0.002 \times 2.08^2}{1^{1.3308}} = 0.00869\,\text{m/m.}$$

- Si suponemos: D = 0.500 m. $\Rightarrow$ V= 1.4466 $\times$ 0.5 + 0.638 = 1.36 m/s.

$$\text{Entonces: } J = \frac{0.002 \times 1.36^2}{0.5^{1.3308}} = 0.00931\text{ m./m.}$$

- Si suponemos: D = 2.000 m. $\Rightarrow$ V = 1.4466 $\times$ 2 + 0.638 = 3.53 m/s.

$$\text{Entonces: } J = \frac{0.002 \times 3.53^2}{2^{1.3308}} = 0.00991\text{ m./m.}$$

- Si suponemos: D = 0.100 m. $\Rightarrow$ V = 1.4466 $\times$ 0.1 + 0.638 = 0.78 m/s.

$$\text{Entonces: } J = \frac{0.002 \times 0.78^2}{0.1^{1.3308}} = 0.02624\text{ m./m.}$$

En el cuadro siguiente se pone de manifiesto –como resumen de la anterior determinación- la presencia del mínimo de la función objetivo en un entorno suficientemente representativo de la misma. Así:

D (m.)	**J (m./m.)**
0.100	0.02624
0.500	0.00931
0.877	**0.00866**
1.000	0.00869
2.000	0.00991

Se deduce, de este modo, que cumpliendo con la ley de velocidad media en función del diámetro interior que aquí proponemos, y concretamente para la categoría de rugosidad k = 5, el valor mínimo de la pérdida de carga unitaria es J = 0.00866 m./m., que tiene lugar para V = 1.91 m/s. y D = 877 mm.

Estas mismas determinaciones pueden efectuarse para las restantes cinco categorías de rugosidad, resultando, en definitiva, la siguiente tabla:

Tabla 3. Valor mínimo de J para las diferentes categorías de rugosidad.

Rugosidad (k)	J (m/m.)	D (m.)	V (m./s.)	Q (m^3/s.)
1	0.00315	0.724	1.69	0.70
2	0.00405	0.766	1.75	0.80
3	0.00529	0.810	1.81	0.93
4	0.00650	0.840	1.85	1.03
5	0.00866	0.877	1.91	1.15
6	0.01159	0.925	1.98	1.33

Así mismo, para cada una de las diferentes categorías de rugosidad puede verse, en los gráficos siguientes, el mayor detalle de los mínimos absolutos de la función J(D). A saber:

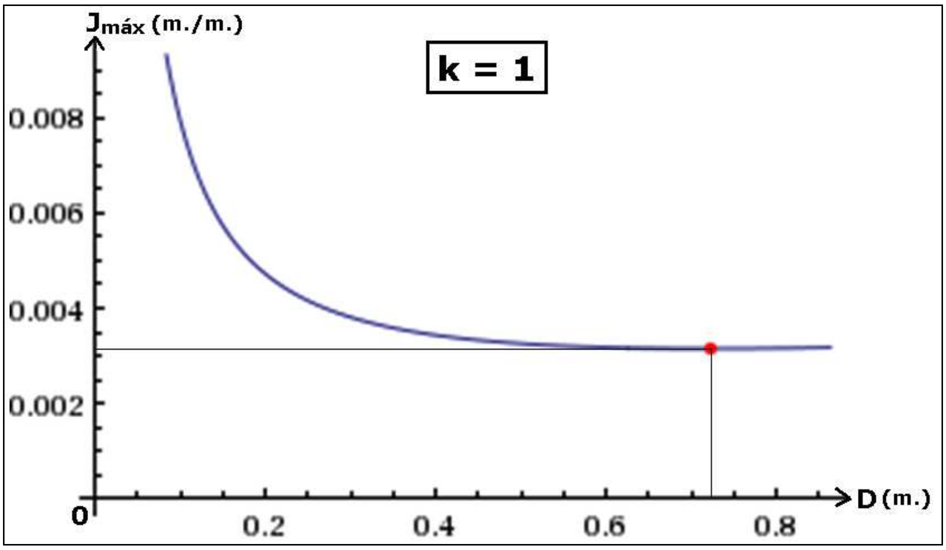

Fig. 1. Mínimo absoluto de J(D) para k = 1.

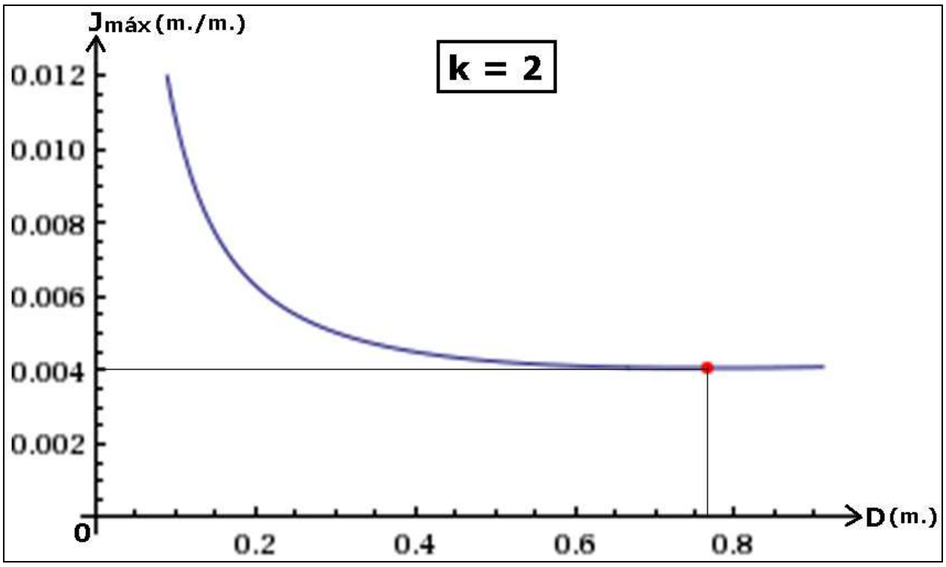

Fig. 2. Mínimo absoluto de J(D) para k = 2.

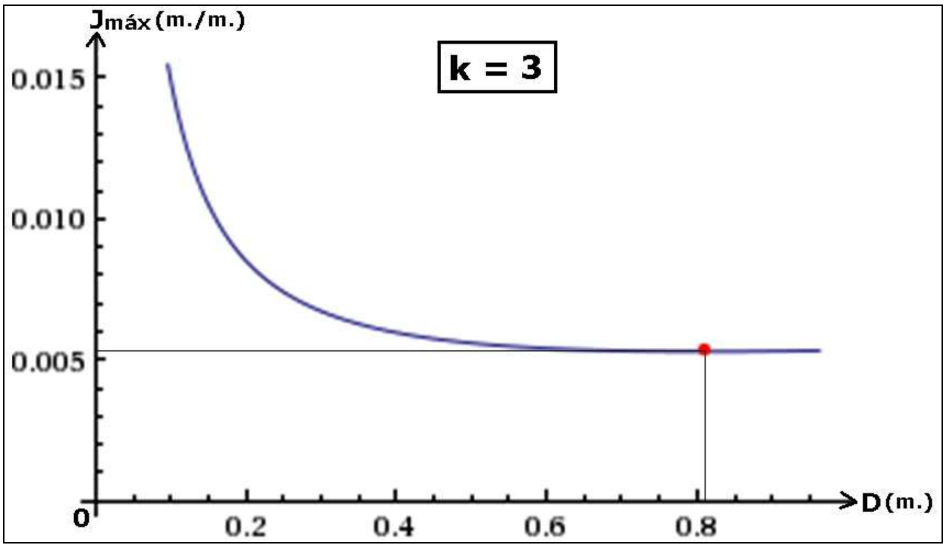

Fig. 3. Mínimo absoluto de J(D) para k = 3.

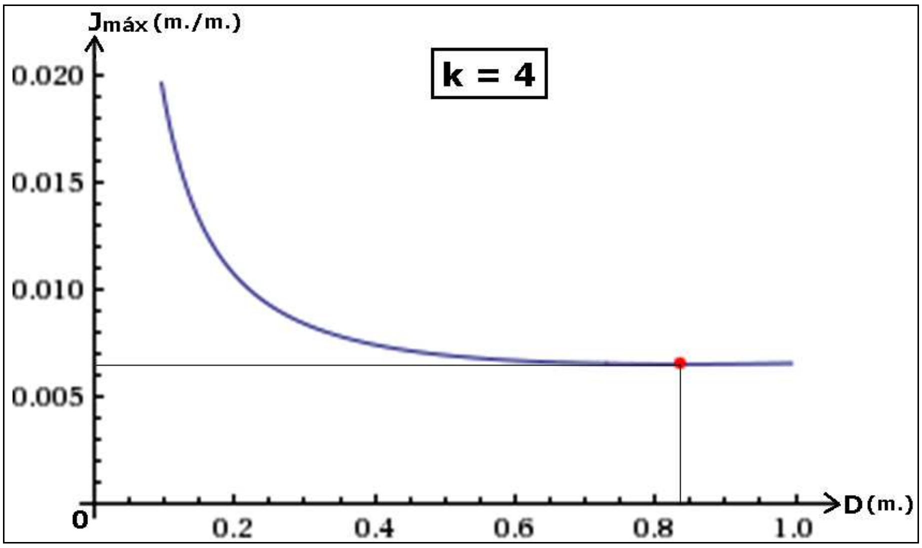

Fig. 4. Mínimo absoluto de J(D) para k = 4.

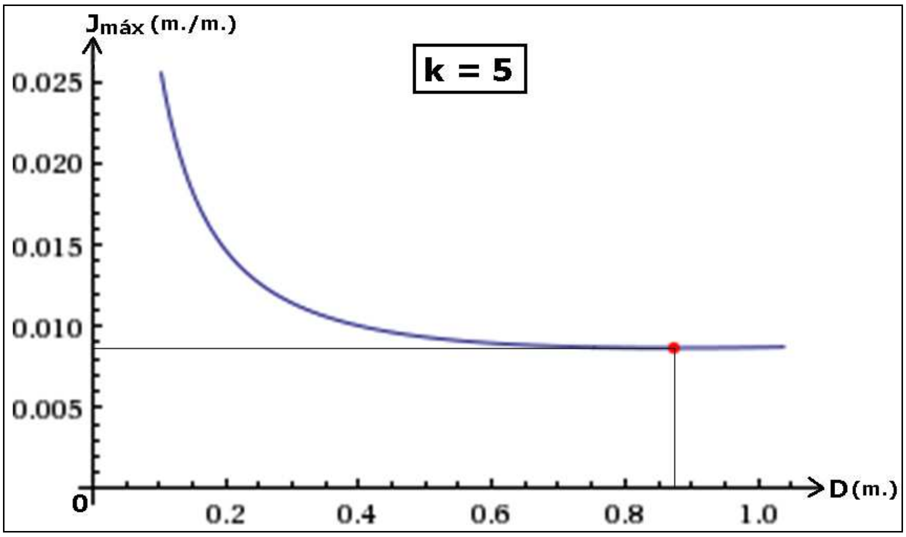

Fig. 5. Mínimo absoluto de J(D) para k = 5.

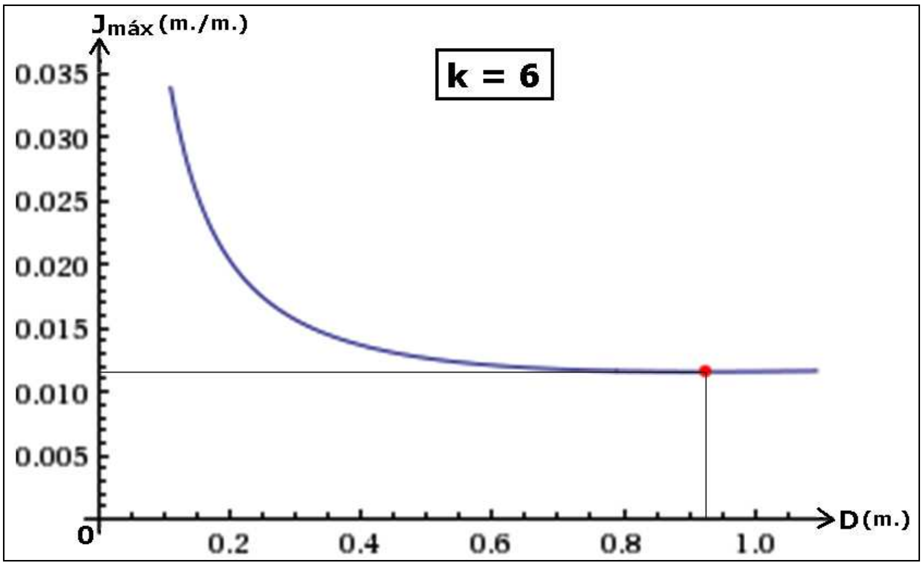

Fig. 6. Mínimo absoluto de J(D) para k = 6.

Comprobación por reducción de variables:

La nueva función objetivo a optimizar, de una sola variable, vendrá dada al substituir en ella la ecuación condicionante, esto es:

$J = 0.002 \times (1.446 \times D + 0.638)^2 \times D^{-1.3308}$; y desarrollando:

$J = 0.002\ (2.0927 \times D^2 + 0.407 + 1.8459 \times D) \times D^{-1.3308} =$

$= 0.002\ (2.0927 \times D^{0.6692} + 0.407 \times D^{-1.3308} + 1.8459 \times D^{-0.3308})$;

y la condición necesaria o de primer grado exigirá que:

$$J'_D = 0.002\left(1.4004 \times D^{-0.3308} - 0.5416 \times D^{-2.3308} - 0.6106 \times D^{-1.3308}\right) = 0\,,$$

y operando adecuadamente: $\frac{1.4004}{D^{0.3308}} - \frac{0.5416}{D^{2.3308}} - \frac{0.6106}{D^{1.3308}} = 0$; de donde:

$1.4004 \times D^2 - 0.5416 - 0.6106 \times D = 0$; entonces, la única raíz positiva será:

$$D = \frac{0.6106 + \sqrt{0.3729 + 3.0338}}{2.8008} = \frac{0.6106 + 1.8457}{2.8008} = 0.877\ \text{m.}, \text{ c.s.q.d.},$$

aunque con un proceso resolutivo más corto y sencillo.

La condición suficiente o de segundo grado corrobora la presencia de un mínimo relativo, como puede comprobarse a partir de la 2ª derivada:

$$J''_D = 0.002\left(-0.4633 \times D^{-1.3308} + 1.2624 \times D^{-3.3308} + 0.8126 \times D^{-2.3308}\right) =$$
$$= 0.00252473 \times D^{-3.3308} + 0.00162517 \times D^{-2.3308} - 0.000926505 \times D^{-1.3308},$$

que para D = 0.877 m. resulta $J''_D > 0$.

CONCLUSIONES

Los problemas de extremos condicionados de funciones de varias variables, resueltos mediante la sustitución pertinente empleando la técnica que denominaremos de "reducción de variables" (en alguna ocasión ha recibido también el apelativo de "substitución" o "eliminación"), se reducen a otros con las mismas variables o una variable menos y sin condición restrictiva alguna, lo que simplifica notablemente su resolución.

En el presente artículo se han expuesto diversos ejemplos y al final un caso práctico de Hidráulica que ponen de manifiesto, una vez más, la utilidad del procedimiento propuesto de "reducción de variables" en una gran cantidad de casos reales que se presentan en la práctica ingenieril.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BALBAS DE LA CORTE, A. y GIL FANA, J.A. *Programación matemática*. Ed. Paraninfo, S.A. Madrid, 2004.
2. FRANQUET BERNIS, J.M. *Cinco temas de hidrología e hidráulica*. Ed. Bibliográfica Internacional, S.L. – Universitat Internacional de Catalunya (UIC). Tortosa, 2003.
3. FRANQUET BERNIS, J.M. *Cálculo hidráulico de las conducciones libres y forzadas (Una aproximación de los métodos estadísticos)*. Ed. Bibliográfica Internacional, S.L. – Universitat Internacional de Catalunya (UIC). Tortosa, 2005.
4. GARCÍA SESTAFE, J. V. y RODRÍGUEZ RUIZ, J. *Curso de matemáticas en forma de problemas*. Ed. CEURA, S.A. Madrid, 1985.
5. GUZMÁN, L., SÁNCHEZ, M. J., MUÑOZ, A. y SANTOS, J. *Fundamentos matemáticos para la administración y dirección de empresas*. Ed. CEURA, S.A. Madrid, 1999.
6. SÁNCHEZ SÁNCHEZ, M. *Matemáticas avanzadas para la Economía*. UNED. Ed. Sanz y Torres, S. L. Madrid, 2014.