INSTITUTIONES

PHILOSOPHICÆ.

INSTITUTIONES PHILOSOPHICÆ

AD STUDIA THEOLOGICA POTISSIMUM ACCOMODATÆ

AUCTORE

FRANCISCO JACQUIER,
Ex Minimorum Familia, Primariarum per Europam Academiarum Socio, in Lyceo Romano, et in Collegio Urbano de Propaganda Fide Professore.

TOMUS III.

SUPERIORUM PERMISSU.

Matriti: Ex Officina Ildephonsi à Lopez.
MDCCLXXXVII.

AUCTOR LECTORI.

PHysicam inter Geometricamque doctrinam tam arcta est necessitudo, ut apud omnes cultiores Viros tamquam vanissimum merito habeatur Physicæ studium Geometriæ præsidio destitutum. Quæ cum ita sint, nemo mirari debet, quod à studiosis adolescentibus, sacræ licet Theologiæ destinatis, Arithmeticæ, et Geometriæ elementa requiram; si enim his careant doctrinæ Physicæ adjumentis, satius est, eos huic præclarissimo studio valedicere omnino; *melius est nihil scire, quam male scire.* Tale enim cognitionis, potius dicam ignorantiæ genus mentis aciem hebetat, rectumque judicium corrumpit, et omni studiorum generi nocet plurimum. Ad me fortasse reprehendent censores aliqui, quod nova elementa ediderim: cum nihil fere in orbe litterario frequentius sit elementorum libris. Neque talem me esse, quis sibi falso persuadeat, ut de aliis elementis minus laudabiliter sentiam, huncque meum libellum supra alios omnes extollam, quod tamen à plerisque elementorum Auctoribus nimis arroganter factum video. Et quidem variis elementis, ratione licet, et methodo diversissimis, suam justam laudem concedendam esse, facile quisque fatebitur; si varias attenderit adolescentum conditiones, atque voluntates. Alii sublimiorem Physicam, Mathesimque universam addiscere, et funditus haurire, sibi proponunt; alii autem aliis studiis, gravioribusque negotiis nati institutiones Geometricas strictim, leviterque tantum arripiunt, quantum scilicet expolien-

do,

do , perficiendoque ingenio satis est, alii ultra Geometriam , quam *practicam* vocant , nolunt progredi , illaque minus nobili Geometriæ parte contenti sunt ; alii tandem alios fines , aliaque consilia in animo habent. Quid ergo mirum , quod ego Arithmeticæ , et Geometriæ elementa ad meas Physicas institutiones accommodatissima proponam? At quæcumque sit elementorum ratio , demonstrationis severitas religiose semper tenenda est , neque obscura multarum propositionum farragine juvenum mens est obruenda , sed splendidiori accuratioris Geometriæ lumine illustranda. Monendi ergo sunt studiosi adolescentes , ut ab iis caute abstineant elementis , quæ nec satis accurata methodo conscripta sunt, nec firmissimo demonstrationum robore munita. Perniciossisima quidem sunt studiosæ juventuti talia elementa, quæ eos habent Auctores, quorum doctrina tota in elementis continetur. Verum si recto proportionum ordine, nexuque necessario colligatæ fuerint demonstrationes omnes; ex hoc studio diligenter, et, ut par est, instituto, in quolibet scientiarum genere fructum maximum sine ulla dubitatione polliceor. Nec quidquam existimationis geometrico studio detrahi debet, si aliqui extiterint in rebus Geometricis etiam versatissimi, in vulgari tamen agendi ratione, et in rebus quoque familiarissimis omnino inepti. Id quidem, quod summa injuria objici solet, tribuendum est præcipiti quorumdam Geometrarum judicio. Non desunt, fateor, celeberrimi etiam viri, qui in rebus Mathematicis toti occupati, necessaria rerum tractandarum, vel gerendarum principia, et elementa non satis tenent; at-

atque hinc mirum non est, quod aliquando errent graviter, Geometrarum, non Geometriæ visio. Et re quidem ipsa, si fons erroris probe attendatur, vitium in principiis, non vero in *consequentiis* latere deprehenditur; contra autem alii homines non pauci veris utuntur principiis, errant autem in *consequentiis*. Itaque huc mihi maxime reducendum videtur geometrici studii pretium: si nempe duos fingere liceat homines eadem ingenii vi, eodemque cognitionum gradu præditos, atque *ceteris*, ut vulgo dicunt, *paribus*, unus autem sit Geometriæ auxilio adjutus, alter autem destitutus, facile mihi persuadeo virum Geometram in quolibet scribendi genere, in tractanda etiam quæstione Theologica multo excelentiorem futurum: neque enim quæ prima sunt, postrema dicet, et vicissim; nec quæ

pers-

perspicua sunt, et illustria, minus accurata methodo obscurabit; aut quæ abstrusa sunt, et involuta, densiori caligine non obvolvet. Verum ne Geometriæ studio nimis tribuere videar, et hanc quam maxime amo, disciplinam magnificentius prædicare, de iis non loquor melioris ingenii viris, in quibus excellens judicium meditatione, et experientia subactum, atque perfectum miramur, sive graviora tractanda sit negotia, sive studiis quibuscumque danda sit opera. Has justissimas Geometriæ laudes attigisse satis sit ad excitandam adolescentum voluntatem. Faxit D. O. M. ut hoc meo qualicumque labore utantur, non in rebus Physicis tantum, sed etiam ut in studiis gravioribus, quem quidem fructum maxime exopto, ratiocinandi vim accuratiori methodo augeant, atque urgeant, hujus tamen sanctissimi dogmamatis probe memores : *captivare intellectum in obsequium fidei.*

Ceterum monendum superest, Scholia, et Appendices in his elementis prætermitti posse ab iis, qui minori pollent intelligendi facilitate; minus enim necessaria sunt hæc additamenta.

IN-

INDEX.

Arithmetica, et Algebra.

me-

Geometria.

Ca-

Sec-

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ

TUM VULGARIS, TUM SPECIOSÆ.

CAPUT I.

De præcipuis utriusque Arithmeticæ operationibus generatim consideratis.

I.

ARithmetica generatim definitur *scientia computandi*. Computatio autem vel fit per vulgares numeros, ac proinde et determinatos 1. 2. 3. cet. vel per alphabeti litteras, a, b, c, cet. quæ numerum quemlibet, aut quantitatem quamlibet designant. Prima computandi ratio *Arithmetica* simpliciter dicitur: altera autem vocatur Arithmetica *speciosa*, vel *Algebra*, et convenientius à Nevvtono Arithmetica *universalis* appellatur. Has quidem definitiones juxta vulgarem docendi consuetudinem præmittimus; monendum tamen est, scientias quasdam vix clare definiri posse, nisi earumdem scientiarum diligens præcedat analysis, atque accurata explicatio. Ita in præsenti casu, explicatis Arithmeticæ, et Algebræ operatiotibus, rectè jam dicere liceret. Hæc, quam vobis explicavimus, scientia, ea est, quæ *Arithmetica*, vel *Algebra* vocatur. Per *numerum* Arithmetici intelligunt *unitatum multitudinem*; at accuratius à Nevvtono definitur numerus *relatio*, seu *ratio* quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem. Quæ quidem definitio, ut in bono lumine collocetur, observandum est, quantitatem quamlibet cum alia ejusdem generis quantitate comparatam vel ea minorem esse, vel majorem, vel tandem ipsi æqualem; hoc est, magnitudinem aliquam vel in alia contineri, vel hanc aliam certo modo continere; hic autem modus, quo magnitudo aliqua aliam continet, vel in ea continetur, *numerus* dicitur. E. G. numerus 3. exprimit rationem magnitudinis alicujus ad aliam minonorem, quæ pro unitate assumitur, et in majori ter continetur. Contra autem si quantitas major 3. pro unitate adhibeatur, erit quantitas 1. tertia pars quantitatis majoris, quæ tamquam unitas consideratur, sive 1. ter in quantitate majori continetur. Inde autem intelligitur, quid sit numerus *integer*, quid numerus *fractus*. Integer dicitur, quem unitas metitur; fractus, qui est pars unitatis; ita 1. 2. 3. cet. sunt numeri integri; sed dimidia, tertia, quarta, cet. pars unitatis sunt numeri fracti; ita autem exprimi solent numeri fracti $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. cet. Ratio, quam modo definivimus, si nempe consideretur, quomodo quantitas una alteram contineat, dicitur *geometrica*. Vocatur autem *arithmetica*, si excessum tantummodo quantitatis unius supra aliam consideremus. Duarum rationum æqualitas *proportio* dicitur vel *geometrica*, vel *arithmerica* pro diversa rationum qualitate. Quare ad habendam proportionem quatuor quantitates requiruntur; et prima ad secundam esse dicitur, ut tertia ad quartam.

II. Numeri omnes in vulgari Arithmetica decem notis, sive characteribus designantur; sunt autem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, quorum ultimus *cyphra*, sive *zero* appellatur. Harum notarum varia est significatio non solum ex diversa illarum figura, sed etiam ex diverso, quem occupant, loco. Quæ ad sinistram postremæ occurrunt, designant unitates; quæ proximæ præcedunt, unitatum decadas; exinde centenarii sequuntur, millenarii; et sic deinceps per decadas, et centenarios progrediendo. Huic autem usui potissimum cyphra destinatur; cum nempe ipsa nullum designet numerum, auget tamen reliquarum notarum significationem, longius illas ab extremo versus sinistram numero removens. Sic unitatis nota, quæ sola unicam designaret unitatem, beneficio unius, vel duplicis cyphræ in secundum, aut tertium locum rejecta denas, unitates, aut centenas significabit. Breviores numeri facile leguntur; ita 247 exprimunt ducentas quadraginta septem unitates: at in prolixioribus numeris aliquo opus est artificio; ita si legere oporteat longiorem nume-

. 3 . 2 . 1 .
rum 3 247 578 562 914 020 467 212; hunc ita divides à postremis numeris exorsus; nempe tres postremos divides à præcedentibus puncto superius apposito, tribus sequentibus adscribes 1, et sic deinceps reliquis ternariis punctum alternatim appones, vel numerum; ita tamen, ut numeri unitate semper augeantur, quemadmodum hic fac-

tum

tum vides. His peractis, quamlibet notarum classem perinde leges, ac si sola esset; et ubi punctum invenies, dic mille; ubi 1, dic decies centena millia, seu, ut vulgo loquimur, *millionem*; ubi 2, dic milliones millionum, sive *billiones*; ubi 3, dic *trilliones*, et sic deinceps. Sic itaque legendus est numerus præcedens: ter mille, ac ducenti quadraginta duo trilliones, quingenta septuaginta octo millia, ac quingenti sexaginta duo billiones, nongenta quatuordecim millia, ac viginti milliones, quadringenta sexaginta septem millia, bis centum, ac duodecim.

III. Vulgares explicavimus Arithmeticæ characteres, quorum auctores feruntur Astronomi Arabes: aliquid jam dicendum est de notis, quæ *Romanæ* appellantur. Notæ illæ, quarum in Physicis Institutionibus usus recurret, majusculis alphabeti litteris exprimuntur. His characteribus *Romanorum* nomen factum fuisse creditur, quod eos in monetis publicisque monumentis usurpaverint veteres Romani. Litteræ, quæ numeros Romanos componunt, sunt septem sequentes I. V. X. L. C. D. M. Harum notarum hæc est significatio. I. unitas: V. quinque: X. decem: L. quinquaginta: C. centum: D. quingenta: M. mille. Si duo I scribantur in hunc modum II, æquivalent binario; si tria scribantur III, significant ternarium;

numerus quaternarius ita exprimitur IV ; et numerus novenarius hoc modo IX : nempe unitas numeris V , X præfixa eos mulctat unitate. Verum ad exprimendos numeros vulgares 6. 7. 8. scribi solet VI. VII. VIII. Si numero L , vel C præmittatur X ; numeri illi decade minuuntur ; ita XL significat 40, et XC 90 : contra autem si numerum L sequatur X in hunc modum LX ; numerus præcedens augetur decade significans 60, cet. Aliquando numerus 400 expressus fuit litteris CD , sed raro. Prætèr litteram D , quæ exprimit 500 , idem numerus significatur etiam hoc modo IƆ. Ita etiam loco M , aliquando scribitur CIƆ. Eodem modo exprimi potest 600 per IƆC ; et 700 per IƆCC cet. Si litteræ C , et Ɔ ante et post addantur , numerus CIƆ augetur in ratione decupla ; ita CCIƆƆ significant 10000, CCCIƆƆƆ 100000, cet. Hi erant communes Arithmeticæ characteres apud veteres Romanos , qui etiam numerum millenarium designare solebant adscripta numeris millenario minoribus lineola ; hoc modo $\overline{\mathrm{V}}$, et significat 5000 ; $\overline{\mathrm{LX}}$, et designat 60000. Similiter $\overline{\mathrm{M}}$ æquivalet 1000000, et $\overline{\mathrm{MM}}$ designat 2000000. A recentioribus nonnullis Scriptoribus variationes aliquæ fuerunt

runt

runt adhibitæ ; ita litteris IIX designat 8, litteris IICIX exprimunt 89. Qua ratione horum numerorum ope computationes suas iniverint veteres Romani, nos omnino latet. Aliquam procul dubio habuerunt Arithmeticam, quam quidem invenire, aut aliam non multum dissimilem substituere, problema est à viris Arithmeticæ et antiquitatis studiosis solvendum.

IV. Quoniam numeri nihil aliud sunt, quam magnitudinum rationes quædam certis signis distinctæ, evidens est, Arithmeticam, sive scientiam numerorum esse artem diversas illas rationes inter se combinandi, illasque certis characteribus distinguendi. Hinc nascuntur Arithmeticæ operationes præcipuæ. Etenim diversæ numerorum combinationes huc revocari possunt, ut nempe mutuus eorum excessus, vel modus, quo se invicem continent, expendatur, et assignetur. Ex his autem intelliguntur mox explicandæ quatuor vulgares Arithmeticæ operationes: *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, *Divisio*.

V. Additio vocatur illa Arithmeticæ operatio, qua plures numeri simul colliguntur; Subtractio autem dicitur operatio, qua numeri à se invicem subtrahuntur; ita si addantur 2 et 3, ut efficiantur 5; vel minor numerus 2 à majori 3 subtrahatur, ut remaneat 1; in primo casu dicitur additio; in altero autem subtractio. Patet, in additione, et subtractione considerari mutuum numerorum excessum; etenim in additione excessus summæ ab alterutro numero innotescit; in subtractione autem mutua numerorum differentia investigatur. Multiplicatio appellatur illa Arithmeticæ operatio, qua idem numerus sibimetipsi pluries additur; ita si 3 per 4 multiplicari debeat, idem est, ac si 4 sibi ipsi ter addatur, vel 3 sibi ipsi quater adjungatur; prodibitque 12. Divisio est Arithmeticæ operatio, in qua numerus unus ab alio subtrahitur, quantum fieri potest; ita numerus 4 ex 12 ter subtrahi potest. Itaque patet, in multiplicatione, et divisione considerari modum, quo numeri sese mutuo continent. Ita in præcedenti multiplicatione innotescit, numerum 12 ter continere numerum 4; per divisionem autem demonstratur, numerum 4 ter contineri in 12. Ex his evidens est, multiplicationem nihil aliud esse, quam additionem compositam; atque etiam divisio nihil aliud est, quam composita subtractio. Quare ad duas dumtaxat revocari possunt quatuor vulgares Arithmeticæ operationes. Hinc Arithmeticæ operationes accurate omnino definivit Nevvtonus: *compositionem, et resolutionem arithmeticam*; quæ quidem definitio ex ipsa

arith-

arithmeticarum operationum natura derivatur. Quamvis autem numeri sint rationes geometricæ, ex dictis tamen evidens est, additionem, et subtractionem proprie revocari ad rationem arithmeticam; multiplicationem vero, et divisionem ad rationem geometricam referri. Cæterum præter vulgares quatuor enumeratas operationes, aliæ sunt plurimæ; sed hæ omnes ad primas referuntur, ut ex dicendis manifestum fiet. Hic autem regulas Arithmeticæ generatim considerasse satis sit, patet autem, hanc, quam tradidimus Arithmeticæ notionem, Arithmeticæ speciosæ communem esse. Itaque licet Arithmeticæ nomen generatim usurpemus; illud tamen de Arithmetica speciosa intelligi quoque volumus. Jam vero universam Arithmeticæ utriusque doctrinam brevitèr, ac distincte explicemus, quantum postulant nostrarum Institutionum necessitas, atque injuncta brevitas.

CA-

CAPUT II.

De quatuor primis Arithmeticæ operationibus in numeris integris.

I. PRima Arithmeticæ operatio dicitur *Additio*, quæ ex præcedentibus satis intelligitur. Totam hujus operationis praxim declarabimus, atque demonstrabimus.

PROBL. I.

Numeros integros addere, sive in unam summam colligere.

II. ADdendi proponantur numeri in hoc exemplo expressi. Quatuor numerorum columnas ita alias aliis adscribe serie descendente, ut unitates unitatibus subjiciantur, decades decadibus, et sic de reliquis Tum infra omnes numeros ducta lineola, et à postrema columna exorsus dic, 1 et 8 efficiunt 9; 9 et 2 efficiunt 11; 11 et 1 efficiunt 12. Habes ergo in hac columna unam decadem

Exempl.
23561
392
8768
49321
82042

dem unitatum, ac præterea duas unitates. Quare scribe 2 in columna unitatum, et decadem rejice in sequentem decadum columnam dicens; 2 et 1 efficiunt 9; 9 et 9 efficiunt 18; 18 et 6 efficiunt 24: hoc est, duas decadas decadum, sive duo centenaria, et 4 decadas; scribe ergo 4 in loco decadum, et duo centenaria in sequentem columnam rejice: eodemque pacto in hac, et reliquis operare: et tandem invenies summam quæsitam 82042.

Demonstratio ex tota operationis serie facile patet. Etenim in unaquaque columna numeri ita colliguntur, tamquam si essent unitates, ex eaque summa tot unitates in columnam proxime sequetem rejiciuntur, quot decades collectæ sunt: quod quidem faciendum esse evidens est, cum nota quælibet ab unitatum columna ad reliquas progrediendo valorem habeat in columna sequente decuplo majorem, quam in præcedente. Igitur in hac operatione adduntur singulæ unitates, singulæ decades, singula centenaria. Quare patet hujus operationis ratio, quæ quidem utpote per se evidens, nullo vulgarium axiomatum auxilio indigere videtur. Quamvis enim demonstrationis severitati maxime studeamus; eorum tamen imitari nolumus obscuram diligentiam, qui res evidentes ita demonstrant, ut, perlecta de-

mons-

monstratione, de iis fere dubitare liceat, quæ antea perspicue credebantur.

PROBL. II.

Numeros integros subtrahere.

III. SEcunda Arithmeticæ operatio dicitur *Subtractio*, cujus totum hoc est artificium. Ut numerum datum à dato numero subtrahas, numerum subtrahendum alteri, à quo subtrahi debet, ita subjicies, ut unitates unitatibus respondeant, decades decadibus, et sic de reliquis. Tum ab unitatibus exorsus quamlibet inferiorem notam à superiori subtrahe, et residuum scribe infra lineolam, habebit numerum, qui sit datorum numerorum differentia. Si vero occurrat, inferiorem notam superiori majorem esse, hanc augebis decem unitatibus, easque mutuas accipies à proxime sequenti nota, quam proinde deinceps habebis tamquam unitate mulctatam. Subtrahendus proponatur numerus 4245 à numero 23897. Auferendo 5 et 7 relinquitur numerus 2; auferendo 4 ex 9 relinquitur 5, 2 ex 8 remanet 6. At cum numerus 4 ex 3 subduci nequeat; adjice huic denas unitates, et aufe-

Exempl.

$$\begin{array}{r} 23897 \\ 4245 \\ \hline 19652 \end{array}$$

fe-

ferendo 4 ex 13, residuum habebis 9. Tum vero notam superiorem proxime sequentem unitate mulctabis; hanc enim ab ea mutuam accepisti, ut denis unitatibus præcedentem augeres: habebis ergo residuum 1; ideoque residuum totum 19652.

Demonstratio satis per se constat; cum unitates ab unitatibus auferantur, decades à decadibus, cet. Nam, quod in hoc exemplo numerus 3 decem augeatur unitatibus, et numerus sequens 2 unitate mulctetur, ratio patet. Hæc nempe unitas in numero 3 decadi unitatum æqualis est, earum scilicet, quibus constat idem numerus 3; quare etiamsi unitatem dumtaxat ille amittat, huic tamen decem accedunt. Simili modo si plures sequerentur cyphræ, ex quibus proinde nulla fieri potest subtractio; ex numero proxime antecedenti mutua accipienda est unitas, quæ in cyphram sequentem translata decem unitatibus æquivalet. Rursus ex illa decade unitas in secundam cyphram transfertur, atque ita deinceps. Quare patet, cyphram ultimam decem unitatibus æqualem esse, cæteras vero antecedentes æquari novenario. Itaque evidens est hujus operationis ratio, nec vulgarium axiomatum ope facilius intelligitur.

Ex additionis, et subtractionis natura manifestum est, duas illas operationes sibi

mu-

mutuam probationem conferre, et sese invicem confirmare. Etenim cum residuum in subtractione sit ipsa numerorum differentia; patet, minorem numerum residuo, sive differentiæ additum majori numero æqualem esse. Item cum additio sit plurium numerorum aggregatum, si ex aggregato alteruter numerus auferatur; numerum alterum remanere, necessum est. Si igitur explorare velis, utrum additio rite peracta sit, subtractione utendum est; contra autem ad explorandam subtractionem additio adhibenda.

PROBL. III.

Numeros integros multiplicare.

IV. TErtia Arithmeticæ operatio vocatur *Multiplicatio*, in qua, ut patet ex capite præcedenti, toties sumitur numerus multiplicandus, quoties unitas continetur in numero, per quem debet multiplicari. Singulæ notæ in singulas facile ducuntur, si numeri breviores sint. Sic nemo non videt, 3 in 4 ductum, sive 4 ter sumtum 12 efficere. At si numeros pluribus notis constantes multiplicare oporteat, horum alterutrum infra alterum scribe, ita ut unitates unitatibus subjiciantur. Deinde notas omnes superioris numeri per singulas inferioris

ris multiplica, initio à postremis facto. Decadas, quæ inter multiplicandum colliguntur, sepone adjiciuntur producto ex eadem numeri inferioris nota in proxime sequentem superioris. Facta, quæ emergunt ex singulis notis inferioris in omnes superioris, infra lineolam seorsim notentur; ita ut uniuscujusque unitates subjiciantur numero, per quem multiplicatio peragitur. Si horum omnium summa colligatur, ea erit productum quæsitum.

Multiplicandus proponatur numerus 235 per 43. Scribe 43, sub 235; tum ducta lineola, dic 3 in 5 efficiunt 15, scribe 5 sub numuro multiplicante 3, et unam decadem sepone adjicienda facto sequenti ex 3 in 3, quod est 9; cui si addas 1 habebis unam decadem, et nullas præterea unitates, scribe igitur 0: et facto ex 3 in 2, quod est 6, adjiciens 1 scribe 7: rursus dic 4 in 5 efficiunt 20; scribe 0, ita ut multiplicatori 4 subjaceat, et facto sequenti 4 in 3, quod est 12, adjiciens 2 habebis 14; scribe igitur 4: et seponens 1, dic 2 in 4 efficiunt 8, et adjecto 1, scribe 9. Demum ducta linea, collige in unam summam hos numeros ita dispositos; eritque 10105 productum quæsitum.

Exempl.

```
  235
   43
-----
  705
 940
-----
10105
```

Demostratio evidens est ex ipsa notarum arith-

arithmeticarum natura, si nempe in memoriam revocetur, numerorum characteres decuplo plus valere in locis anterioribus, quam in posterioribus; illico enim manifestum fiet, toties sumi in producto numerum multiplicandum, quoties unitas continetur in numero, per quem fit multiplicatio.

PROBL. IV.

Numeros integros dividere.

V. QUarta Arithmeticæ operatio vocatur *Divisio*. Cum numerus datus per alium datum dividendus proponitur, eo reducitur quæstio, ut inveniatur quoties in numero dividendo contineatur divisor, totiesque auferatur: atque totidem unitates scribantur in numero, qui idcirco *quotus* dicitur. Hæc ergo genuina est divisionis notio: nempe dividendus est ad divisorem, ut quotus est ad unitatem; vel dividendus est ad quotum, ut divisor est ad unitatem.

Pro-

Proponatur dividendus numerus 10105 per 43. Numero dividendo divisorem præfige lineola interjecta; tum operationem instituens in primis notis dividendi, quæ exhibeant quantitatem divisori æqualem, vel proxime majorem; dic, quoties 43 continentur in 101, quotus erit 2. Scribe ergo 2, lineola pariter interjecta, ex altera parte dividendi, et factum ex 2 in 43, sive 86 aufer ex 101 et residuo 15 notam appone 0, quæ in dividendo proxime sequitur quantitatem iam divisam 101. Dic iterum, quoties 43 continentur 150, quotus est 3, quem scribe, ut ante; et factum ex 3 in 43, seu 129 aufer ex 150. Residuo 21 adnecte sequentem notam dividendi 5: et dic iterum quoties 43 continentur in 215, quotus erit 5, quem scribe cum aliis quoti notis, et aufer ex 215 factum ex 5 in 43, sive 215. Cum nihil ex ea divisione supersit; patet, numerum 235 illum accurate esse, qui oritur ex divisione 10105 per 43.

Exempl.

43 (10105) 235
86
———
150
129
———
215
215
———
000

Tota operationis ratio facile patet, si animadvertamus, in hujusmodi operatione rem perinde se habere, ac si quæreretur, quota pars quantitatis alicujus singulis hominibus obveniret, si eam ex æquo tot hominibus distribui oporteret, quot unitates continet divisor. Nam in tota operationis serie inquirimus, quot unitates, decades, cet. singulis dari possint; iisque datis, quæ dari possunt, quot adhuc distribuendæ supersint. Facile autem intelligitur post quamlibet subtractionem peractam id, quod relinquitur, antequam ulteriorem dividendi notam adjicias, divisore minorem esse oportere; nam si residuum æquale foret, vel majus, divisor in quantitate jam divisa pluries contineretur, quam indicet numerus in quotum relatus. Omnis difficultas in eo sita sit est, quod in numeris longioribus statim non pateat, quoties divisor in dividendi notis contineatur, et tentamine utendum est; divisor nempe per numeros ab 1 ad 9 multiplicandus est, atque numeri ex hac multiplicatione producti debent comparari cum dividendi notis, et explorandum est, quinam ex illis numeris sit proxime minor; pones in quoto numerum, in quem ductus divisor hunc efficit numerum, ipsum vero numerum ex dividendi notis subduces. Cæterum qui in Arithmetica satis fuerit exercitatus, facile conjiciet ex primis utriusque numeri notis, dividendi scilicet, et divisoris, ipsum numerum pro quoto eligendum.

Pro-

Probe autem observari debet in quoto notarum valor, ut in aliis Arithmeticæ operationibus jam antea monuimus; at in præsenti operatione, quæ est omnium difficillima, rem brevi exemplo illustravimus. Dividendus proponatur numerus 416 per 2, statim patet, in quoto contineri centenarios, decadas, et unitates. Dividatur jam 4 per 2, quotus erit 2, qui per à multiplicatus producit 4, quo subtracto ex 4 fit 0. Patet ergo, divisum fuisse 400 per 2. Progredior deinde ad notam sequentem 1, hoc est dividi debet 10 per 2. Statim autem video, 2 in 10 decies non contineri; quare scribitur 0 in quoto; tum ut indicetur, quotum nullam decadem continere, tum ut primæ quoti notæ 2 suus servetur centenarii valor. Tandem progrediendum ad 6, qui numero præcedenti 1 apponitur, divisoque 16 per 2, habetur quotus 8, ideoque quotus totus est 208. Hinc generatim intelligitur, qua de causa in quoto scribatur cyphra, imo et plures cyphras aliquando scribi oporteat. Hac divisione peracta; nulla relinquitur in dividendo nota; si autem aliquid residui ex postrema subtractione supersit, quoto adjicienda est fractio. Ita si in exemplo præcedenti haberetur numerus 417 per 2 dividendus, ita ut numerum 417 ex æquo hominibus 2 partiri debeas, singuli acciperent nummos

 208,

208, et dimidiam partem nummi, quæ ita scribitur $\frac{1}{2}$.

Ex hactenus explicatis generatim etiam, patet satis esse primam dividendi notam per primam divisoris notam dividi, si in divisore, et dividendo idem sit notarum numerus. Verum si dividendus plures contineat notas, persæpe necesse est duas primas dividendi notas primæ divisoris notæ subjici; idquid fieri debere evidens est, quoties datus notarum numerus in divisorem majorem habet valorem, quam habeat æqualis notarum numerus in dividendo: verum si duæ adhibeantur dividendi notæ, per primam divisoris notam divisio semper fieri potest. Quare generatim ostenditur, sumptis in dividendo tot notis, quot sunt in divisore, vel etiam, quod aliquando necesse est, nota una insuper adjecta, notarum numerum in quoto unitate excedere residuum notarum numerum in dividendo. Inde autem facile colligitur, nullum in quoto numerum novenario majorem esse posse. Etenim divisor decies æqualis esse non potest assumptæ dividendi parti. Nam si divisor decies sumatur, nota una augetur: at pars dividendi assumpta habet notarum numerum notarum divisoris numero æqualem, vel unitate ma-

jo-

jorem. In primo casu evidens est, dividendi partem assumptam minorem esse divisore decies sumpto, cum notarum numerum habeat unitate minorem: in secundo casu pars dividendi assumpta, si nota una versus dextram minuatur, minor fit divisore. Quare dividendus hac nota iterum auctus minor est divisore decies sumpto.

Divisionis rite peractæ argumentum habebis, si divisorem in quotum ducas, redeatque divisus numerus; nam si non redeat, manifestum est, alicubi errorem esse admissum; quod quidem patet ex ipsa divisionis natura; cum dividendus toties contineat divisorem, quoties unitas continetur in quoto: quare cum quotus exprimat, quoties divisor contineatur in dividendo, si divisor per quotum multiplicetur, dividendum ipsum restitui necesse est. Cæterum patet, si divisorem accuratum habere non licuit, facto ex divisore in quotum addendum esse residuum ex ultima divisionis subtractione, ut redeat divisa quantitas. Contraria ratione evidens est, multiplicationis rite peractæ haberi argumentum, si productum dividatur per multiplicandum, aut per numerum multiplicatorem: in primo casu quotus fit multiplicator; in casu autem altero quotus est multiplicandus. Cum enim divisio sit multiplicationi contraria, per divisionem resolvitur, quod in multiplicatione componitur, et contra. Cæterum in multiplicatione et divisione compendia plurima usus docebit; hinc monere satis erit, multiplicationis per plures cyphras faciendæ compendium haberi, si in producto scribantur tot cyphræ, quot occurrunt in multiplicando, et multiplicatore simul, multiplicatio autem aliarum notarum fiat secundum regulas prædictas. Item in divisione, si divisor, et dividendus cyphras contineant: in dividendo delendæ sunt tot cyphræ, quot occurrunt in divisore, quæ etiam in ipso divisore deleri debent, et reliqua operatio peragenda, ut antea. Notandum autem est, compendium illud valere dumtaxat, si cyphræ fuerint ultimæ tum divisoris, tum dividendi notæ; quod quidem manifestum est ex cyphrarum natura.

Scholium. In præsenti capite sermonem habuimus dumtaxat de numeris homogeneis, sive ejusdem speciei; at pari facilitate in numeris heterogeneis, seu diversæ speciei absolvuntur operationes arithmeticæ. Antequam vero operationes illas explicemus, definiendum est, quid per numerum *concretum*, quid per *abstractum* intelligant Arithmetici. Numerus concretus dicitur, quo res aliqua determinata designatur, ita si dicas tres homines, tres horas, tres pedes, cet.

At

At si numerum 3 generatim enunciaveris, nec rem aliquam designaveris, numerus vocatur abstractus. Jam in numeris diversæ speciei additio, et subtractio facile intelliguntur. Probe tenenda est diversa numerorum species: ita si addi debeant lineæ, pollices, pedes, exapedæ, sciendum est, lineas 12 pollicem unum æquare, pollices 12 pedem unum, et exapedam ex pedibus 6 constare. Ubi autem in linearum additione summa efficitur, quæ 12 excedit; tot unitates inter pollices referri debent, quot sunt numeri duodenarii; quod vero reliquum est, seu quod duodenario minus est, in linearum columna scribi debet; et ita deinceps de alia qualibet numerorum specie. Similiter in subtractione tota patet operationis ratio, si quantitas subtrahenda E. G. linearum numerus, justo major sit; jam ex quantitate præcedenti, pollicum scilicet, mutuo accipienda est unitas; quæ duodenario numero æquivalet, atque ita reliqua operatio peragenda. Illud unicum est discrimen inter operationes arithmeticas in numeris abstractis, atque heterogeneis peragendas, quod scilicet in numerorum abstractorum additione, vel subtractione unitas mutuo accepta decadi æquivaleat; at in numeris heterogeneis unitas, quæ mutuo accipitur, eum retinet valorem, qui speciei suæ respondeat. Hæc de additione, et subtractione.

Quod multiplicationem spectat, improprie omnino à quibusdam Arithmeticis proponi videtur concretorum numerorum multiplicationes. Ita ineptum est, quod faciunt aliqui, quærere productum ex nummis 3, juliis 3, assibus 3 in nummos 3, julios, asses 3. Etenim in eo sita est multiplicatio, ut data quædam quantitas datis vicibus sumatur, ac proinde multiplicator debet esse numerus abstractus. Qua ratione autem quantitates diversæ speciei per numerum abstractum multiplicentur, facile patet, si E. G. productum ex lineis in numerum abstractum majus sit numero duodenario, jam inter pollices rejici debent tot unitates, quod sunt numeri duodenarii; quod autem reliquum est, inter lineas scribendum. Porro quamvis in multiplicatione numerus abstractus esse debeat multiplicator, res tamen aliter se habet in divisione; nam dividendus semper censetur numerus concretus, divisor autem vel concretus, vel abstractus esse potest. Ita dividi possunt nummi 6 per nummos 2, hoc est, investigari potest, quoties 2 contineatur in 6; quotus 3 erit numerus abstractus. Potest etiam dividi numerus concretus per numerum abstractum; ita nummos 6 dividere possumus per 3, hoc est investigari

ves-

vestigare possumus tertiam partem nummorum 6, et quotus erit numerus concretus, nempe nummi 2. Jam ut perspicua habeatur divisionis notio, ad ipsam definitionem redeamus In divisione scilicet dividendus est ad divisorem, ut quotus est ad unitatem, vel dividendus est ad quotum, ut divisor ad unitatem. Probe autem observari debent illæ duæ proportiones; licet una, eamdemque videantur. Dividendus tamquam numerus concretus semper habetur, concretus autem, vel abstractus esse potest numerus divisor. In 1 casu quotus erit numerus abstractus, et locum habet prima proportio; in casu altero, ubi nempe divisor est numerus abstractus, quotus est numerus concretus, et locum habet proportio altera: quidem omnia exemplo facile licebit intelligere. Si nummi 6, *numerus concretus*, dividantur per nummos 2, *numerum* itidem *concretum*; quotus erit numerus abstractus 3; hic enim non indicabit numerum nummorum, sed exprimet, quoties divisor continetur in dividendo; erunt nempe 6 nummi ad 2 nummos, ut numerus abstractus 3 est ad unitatem abstractum 1. Dici autem non posset, 6 nummi (*numerus* scilicet *dividendus*, et *concretus*) sunt ad quotum 3 (*numerum abstractum*); ut nummi 2 (*numerus divisor*, et *concretus*) ad 1 (*numerum abstractum*). Talis

lis proportio nullam in mente relinqueret distinctam notionem; cum enim numerus concretus, et numerus abstractus diversi sint generis; nulla inter eos comparatio, et ratio proprie dicta institui potest.

Si divisor sit numerus abstractus, ut in casu secundo, quotus est numerus concretus, et secunda valet proportio. Ita si dividantur 6 nummi per numerum abstractum 3, quotus erit nummi 2, (numerus scilicet concretus); habebiturque hæc proportio; numerus concretus nempe 6 nummi, erit ad quotum, nummos 2; ut divisor 3 ad 1. Id vero notandum est, in utraque proportione unitatem esse semper numerum abstractum. Quare divisio sub duplici ratione considerari potest; vel enim quæritur, quoties quantitas una in altera ejusdem generis quantitate continetur, et hic est primus casus, vel quæritur quantitas, quæ certis vicibus in alia ejusdem generis quantitate contineatur, et hic est casus secundus. Facile autem patet ex demonstratis, quomodo numeri concreti per abstractos dividantur, aut etiam concreti per concretos, etiam si fuerint diversæ speciei. Etenim si concreti per abstractos dividantur, initio sumpto ab iis, qui majorem habent valorem, divisio ex regulis præscriptis instituatur; si autem supersit aliquid, ad minorem speciem reducatur.

E.

E. G. si residui fuerint pedes, reducantur in pollices, atque iterum divisio de more fiat. Si concretos numeros diversæ speciei per concretos itidem diversæ speciei dividi oporteat, jam numeri tum dividendi, tum divisoris ad minimam speciem deprimantur, quod per multiplicationem fieri manifestum est, atque divisio fiat eodem modo, ac in numeris abstractis. Cæterum in multiplicatione, et divisione quantitatum diversæ speciei varia adhiberi possunt operandi compendia, quæ sine fractionum doctrina intelligi non possunt. Divisionis notionem ex genuinis principiis jam hausimus. In operationibus arithmeticis abstrahi solet à concretis abstractisque numeris, an concreti sint vel abstracti, ad majorem operationum facilitatem; verum ad formandam earumdem operationum ideam distinctam, necesse est, ut numeris sua deinde restituatur conveniens notio.

CA-

CAPUT III.

De quatuor præcedentibus operationibus in Arithmetica speciosa absolvendis.

PROBL. I.

Quantitas litterales addere.

I. QUantitatibus litteralibus præfigun-tur signa, quorum significationem præmitti omnino necessum est. Signum additionis est $+$, signum autem subtractionis est $-$, æqualitas duabus lineolis exprimi solet hoc modo $=$. Ita à $=$ a, $a+a=2a$, $a-a=0$. Quantitas addenda dici solet quantitas *positiva*, quantitas autem subtrahenda vocatur *negativa*. Si quantitati litterali præfigatur numerus aliquis, hic *coefficiens* vocatur, ita in quantitate litterali $2a$ numerus 2 coefficiens appellatur. Si autem quantitas litteralis nullum numerum præfixum habeat, jam unitas tamquam illius coefficiens censeri debet; ita $a=1a$ ut patet. Quantitates litterales dicuntur *similes*, si easdem contineant litteras, et eumdem ea-

rum-

rumdem litterarum numerum, etiamsi diversis coefficientibus notentur, + 2a, et — 5a sunt quantitates similes; at *dissimiles* sunt quantitates a et b, atque etiam quantitates a et aa. Quantitas aliqua *ex pluribus terminis composita* dicitur, quæ plures habet litteras signo + vel — connexas: Ita a + b constat ex duobus terminis et *binomium* dicitur; a + b + c ex tribus terminis, et *trinomium* vocatur. Quantitas ex unico termino composita dicitur *quantitas simplex*, atque etiam *monomium*: ita a, ab, abc sunt quantitates simplices.

His præmissis definitionibus, quantitatum litteralium additio jam explicanda est. Si quantitates simplices fuerint, tota operationis ratio statim patet. Ita si a et a addi debeant, habebitur 2a; si addere oporteat a et 2a, summa erit 3a, et ita deinceps; satis nempe est in hoc casu addi coefficientes, et coefficientium summam quantitatibus litteralibus præfigi, eodem servato signo + vel —, si quantitates eodem signo afficiantur. At si diversa fuerint signa, jam coefficiens minor à majori subtrahi debet et differentia cum majoris coefficientis signo scribenda.

Id quidem evidens est ex negativarum, et positivarum quantitatum natura. Etenim quantitates positivæ quantitatibus negativis

sunt

sunt directe contrariæ. Quare si quantitates addendæ similes sint, signisque contrariis affectæ, vel se omnino destruunt, vel aliqua ex parte tantum; nempe si quantitas una sit altera major, destruitur in majori quantitate pars minori æqualis, et residuum est quantitatis utriusque differentia, quæ quidem differentia signo majori quantitati præfixo affici debet. Ita evidens est, quantitates $+5df$ et $-3df$ reduci ad $+2df$; nam $+5df$ est quantitas df quinquies sumpta, et $-3df$ est quantitas df ter subtracta reducitur ad quantitatem bis sumptam. Similiter $+5fm$ et $-6fm$ reducitur ad $-1fm$, vel ad $-fm$. Nam $-6fm$ est quantitas fm sexies subtracta, et $+5fm$ est eadem quantitas quinquies addita, ac proinde quantitas fm semel subtrahitur, et remanet negativa, seu fit $-fm$.

Eadem ratione operandum est in aliis quantitatibus utcumque compositis. Quantitates addendæ ita disponuntur, ut similes termini sibi invicem respondeant. Singulæ partes seorsim considerantur, ut simplices, et additio fit, ut modo præscriptum est; summa autem infra lineolam scribitur. Sub terminis, qui sese mutuo destruunt, scribi solet stellula, vel zero. Tota operatio patet ex præsen-

Exemplum.

$$\begin{array}{r}
3ab - 5cs - 4dr + 2s \\
- ab + 4cs + 4dr - s \\
\hline
2ab - cs \quad * \quad + s
\end{array}$$

senti exemplo. Si quantitates aliquæ fuerint dissimiles, eas signo $+$ vel $-$ connectendas esse evidens est. Ita si addi oporteat a et b, vel a et $-b$, scribendum est $a + b$, $a - b$.

PROBL. II.

Quantitates litterales subtrahere.

II. In subtractione considerantur quantitates singulæ subtrahendæ, tamquam si haberent signum ei, quod habent, contrarium, et fiat summa ex legibus jam præscriptis; nempe in quantitate subtrahenda mutetur signum $+$ in $-$, et $-$ in $+$, et addictio de more fat. Ita subtrahitur b ex a, scribendo $a - b$. Si $b - c$ ex $a + c$ subtrahi oporteat, scribitur $a + c - b + c = a - b + 2c$. Simili modo in quantitatibus utcumque compositis operandum est.

Quantitas subtrahenda inferiori loco scribitur, alia autem ex qua subtractio fieri debet, supra apponitur,

Exemplum.

$$
\begin{array}{l}
ab + abb - dd \\
ab - bc + dd. \\
\hline
ab + abb - dd - ab + bc - dd \\
= abb + bc - 2dd.
\end{array}
$$

deinde mutatis signis, ut jam dictum est, tota quantitatum series scribitur, et postea reducitur, ut factum est in additione; habebebitur quantitatum differentia infra lineolam scribenda. Quod autem in quantitate subtrahenda signum — mutetur in +, ratio facile patet. Si ex a subtrahi debeat b — d, scribaturque primo a — b, subtractio justo major est; subtrahenda enim non proponitur tota quantitas b, sed b mulctata quantitate d, quare justo major est subtractio, et excessus est ipsa quantitas d, quæ proinde cum signo positivo + restitui debet, et scribendum est a — b + d. Id vero numerorum exemplo illustratur. Si ex numero 6 subtrahendus proponatur numerus 5 — 3, ex præscripta regula scribendum est 6 — 5 + 3, hoc est 4, reductione facta. Quod evidens est. Si enim scriberes 6 — 5 — 3; subtraheres 8 ex 6, quod quidem faciendum non proponitur; cum enim sit 5 — 3 == 2, ex numero 6 subtrahi debet dumtaxat numerus 2. Cæterum patet, in calculo litterali non secus, ac in arithmetico additionem, et subtractionem sibi mutuam probationem præbere; ita ut operatio una per alteram mutuo exploretur.

PRO-

PROBL. III.

Quantitates litterales multiplicare.

III. **S**Ignum multiplicationes est $\times$, quod tamen in multiplicatione facta per litteras omitti solet, et sola conjunctio litterarum sine signo multiplicationem significat. Sit $a = 2$, $b = 10$; erit $ab = 2 \times 10 = 20$. Si eadem quantitas per seipsam multiplicetur, apponitur post ipsam paulo supra numerus, qui exprimat, quoties scribenda esset. Ita $aa = a^2$, $aaa = a^3$. Cavendum, ne confundantur a^2 cum $2a$; sit $a = 5$, erit $a^2 = 25$, $2a = 10$; sit $b = 2$, erit $(a + b)^2 = \overline{a + b}^2 = 7 \times 7 = 49$; parenthesis autem (), vel lineola —— producta designat, totam quantitatem $a + b$ in seipsam multiplicari. Numerus supra positus est *index*, seu *exponens potentiæ*, ut vocant, vel *potestatis*, seu *dignitatis* quantitatis ipsius, et exprimit, quot vicibus unitas per illam quantitatem multiplicetur. Ita $1 \times a = a^1$; $1 \times a \times a = a^2$;

$1 \times a \times a \times a == a^3$, cet.

In quantitatum compositarum multiplicatione, scribenda est altera quantitas sub altera, tum tota prima quantitas multiplicanda per unum ex terminis secundæ, scribendo productum in una linea, deinde tota prima quantitas per aliam; et ita porro, scribendo singula producta in singulis lineis, ac notando similes terminos diversorum hujusmodi productorum alios sub aliis; deinde omnium linearum colligenda summa. Omnium vero hujusmodi operationum patet ratio; multiplicatio enim fit per partes non secus, ac in quantitatibus simplicibus. Porro in multiplicatione quatuor operationis partes considerari debent; nempe signa, coefficientes, litteræ, et exponentes; hinc quatuor præscribuntur regulæ. 1. Si signa fuerint eadem, positiva scilicet, vel negativa, productum fit positivum: contra autem si fuerint diversa, productum est negativum. Ita $+ \times + == +$; $+ \times - == -$; $- \times + == -$; et $- \times - == +$. 2. Coefficientes in se invicem multiplicantur. 3. Litteræ ordine alphabetico scribuntur, nullo interposito signo. 4. Si quantitas aliqua exponente afficiatur, eaque multiplicari debeat per eamdem litteram exponente itidem affectam, littera illa semel in producto scribenda est; ita ut tamen hujus quantitatis exponens, æqualis fiat exponentium summæ. Operatio tota patet exemplo. Quantitas multiplicanda, superiori loco scribitur. Deinde multiplicatur per a, et producta

Exemplum.

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ac - bc \\ \qquad\quad a - b \\ \hline a^3 + 2a^2 c - abc \\ - a^2 b - 2abc + b^2 c \\ \hline a^3 - a^2 b + 2ac^2 - 3abc + b^2 c \end{array}$$

singula infra lineolam scribuntur. Postea fit multiplicatio per $-b$, productaque infra apponuntur, et tandem productorum partes singulæ, ut moris est, in summam colliguntur. Id vero, pro majori additionis facilitate observandum est, ut scilicet similes productorum partes aliæ sub aliis scribantur, et sibi invicem respondeant, ut in additione præscripsimus. Quod spectat tres ultimas leges, hæ satis patent ex antea demonstratis; verum quod attinet signorum doctrinam, in bono lumine collocari debet.

Signorum multiplicatio, quæ tyronibus difficultatem afferre solet, ex ipsa quantitatum negativarum natura intelligi potest. Dum quantitas positiva $+a$ multiplicatur per aliquem numerum possitivum $+n$, sensus est, quantitatem $+a$ toties sumi, quoties unitas continetur in n; atque proinde productum fit na. Si $-a$ multiplicari debeat per $+n$, sensus est, $-a$ quantitatem negativam toties sumi, quoties unitas continetur in n, ideoque productum est $-na$. Simili modo si multiplicetur $+a$ per $-n$, sensus est, quantitatem à toties subtrahi, quoties unitas continetur in $-n$, ideoque productum est negativum, seu $-na$. Si $-a$ multiplicari oporteat per $-n$, sensus est, $-a$ toties subtrahendum esse, quoties unitas est in $-n$, sed subtractio quantitatis negativæ $-a$ æquivalet additioni $+a$; quare productum est $+na$. Nemo non videt; productum ex quantitate positiva in positivam, fieri positivum. Sed alii casus, hoc modo rursus illustrari possunt. Cum sit $+a-a = o$, si multiplicetur $+a-a$ per n, productum debet esse o. Jam vero primus producti terminus est $+na$, ergo terminus alter debet esse $-na$, qui destruat primum terminum $+na$, ita ut productum sit $+na-na = o$. Quare $-a \times +n = -na$. Simili modo, si multiplicetur $+a$, et $-a$ per $-n$, primus producti terminus est $-na$; quare terminus alter est $+na$; alioqui termini duo sese mutuo non destruerent, quod tamen fieri debet, cum sit $a-a = o$. $-a \times -n = +na$.

PRO-

PROBL. IV.

Quantitas litterales dividere.

IV. SIgnum divisionis et lineola interposita, dividendum separans a divisore; ita $\frac{a}{b}$ designat, a dividi per b; divisio etiam designatur, interpositis binis punctis, hoc modo a : b. Verum his signis, utendum est dumtaxat, si divisio accurate fieri non possit; quod primum illustrabimus, exemplo quantitatum, quæ unico constat termino. Si proponatur dividenda quantitas a^2 bc per a^2 c, erit $\frac{a^2 bc}{a^2 c} = b$, ac proinde quotus erit b. Simili ratione $\frac{6a^2 bc}{2a^2 c} = 3b$. At $\frac{10a^2 b}{6a^2 c} = \frac{10b}{6c}$. In hoc sita est tota divisionis operatio, ut ex dividendo, et divisore expunguntur

 lit-

litteræ utrique communes, reliquæ autem pro quoto habeantur. Si autem quantitates litterales coefficientibus afficiantur, evidens est, divisionem institui debere non secus, ac in Arithmetica vulgari. Porro licet in dividendo, et divisore deleantur litteræ communes; non tamen putandum est, quotum ex quantitate per seipsam divisa esse $=$ o; ita $\frac{abc}{abc}$ non est $=$ o; delentur quidem litteræ omnes, sed quantitati litterali præfixus semper intelligitur coefficiens 1; sic $\frac{abc}{abc} = \frac{1abc}{1abc} = \frac{1}{1} =$

1. Et quidem dum dividitur abc per abc, quæritur quoties abc continetur in abc. Sed quantitas quælibet semel in seipsa continetur. Quare in hoc casu quotus est semper unitas. Quod signorum leges spectat, eædem omnino sunt, quæ pro multiplicatione: nempe si $+$ dividatur per $+$, et $-$ per $-$, quotus signo $+$ afficitur; contra autem si dividatur $+$ per $-$, vel $-$ per $+$, quotus afficitur signo $-$. Tota explicatæ operationis ratio evidens est ex ipsa divisionis natura; cum enim productum ex divisore in quotum, dividendo æquale esse debeat; manifestum est, quotum ex divisione quantitatis nega-

 ti-

tivæ per negativam, oportere esse positivum. Ponamus enim, esse negativum, jam productum ex quoto negativo in divisorem negativum, foret positivum, ac proinde non rediret quantitas dividenda, quæ ponitur negativa. Similì ratione demonstrantur aliæ signorum leges.

Eodem plane modo operandum est in aliis divisionibus utcumque compositis. Ita si dividi oporteat $9ab^2 - 15a^2b + 6a^3$ per $-3ab + 2a^2$.

Exemplum.

$$
\begin{array}{l|l}
6a^3 - 15a^2b + 9ab^2 & 2a^2 - 3ab \\
\cline{2-2}
6a^3 - 9a^2b & 3a^1 - 3b \\
\cline{1-1}
-6a^2b + 9ab^2 & \\
-6a^2b + 9ab^2 & \\
\cline{1-1}
\quad * \qquad * & \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

Singuli termini ita disponi debent, ut sumetur divisionis initium ab illo termino, qui ad maximam evectus est potestatem, et ita per gradus progrediendo, ut hic factum vides. Itaque dividas $6a^3$ per $2a^2$: prodit quotus $3a^1$; per quem divisor totus multiplicatur, productumque $6a^3 - 9a^2 b$ subtrahas ex dividendo; residuum fit $-6a^2 b$, cui addas $9ab^2$, et dividere pergas, ut ante: quotus est $-3b$; productumque ex hoc quoto, et divisore $-6a^2 b + 9ab^2$ iterum auferas ex dividendo, nihilque remanet. Quare accurata est divisio. Si autem peracta operatione aliquid supersit, ita ut divisor, et reliqua pars dividendi, nullas communes habeant quantitates, jam divisio accurate fieri non potest, sed quoto invento jungenda est fractio; de fractionibus autem, tractabitur in proximo capite.

Sæpe contingit, divisionem in infinitum continuari, et tunc quotus fit, ut vocant, *series infinita*. Exemplo sit unitas dividenda per $1 - a$. Operatio est hujusmodi.

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \text{quotus est} \\
\hline
1 - a & 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 \text{ cet.} \\
\hline
+ a & \\
+ a - aa & \\
\hline
+ aa & \\
+ aa - aaa & \\
\hline
+ aaa \text{ cet.} &
\end{array}
$$

Hæc

Hæc pauca exempla satis sint. Cæterum patet, multiplicationem, et divisionem in quantitatibus litteralibus non secus, ac in numeris, sibi mutuam probationem conferre, ita ut multiplicatio per divisionem, et viceversa divisio per multiplicationem confirmetur.

Schol. In hoc capite frequens fit mentio de quantitatibus negativis, quarum genuinam notionem, paucis iterum explicare, non abs re erit. Si duæ quantitates magnitudine æquales ad partes directe oppositas simul, et in eodem subjecto conjunctæ intelligantur, sese mutuo destruunt, illarumque effectus nihilo æqualis est. Ita si potentiæ duæ æquales, in partes directe oppositas agunt, virium illarum effectus nullus est. Pari modo, si aliquis habeat 100 nummos, totidemque alteri debeat, jam illi 100 nummi, si ad hujus hominis possessionem referantur, pro nihilo considerari debent. Si autem quis 100 nummos habeat, et 200 alteri debeat, jam possessio hujus hominis negativa est, et ut ita dicam, nihilo minor. Si aliquis ad propositum locum iter facturus, ad partem directe oppositam progrediatur; jam hujus hominis iter tamquam negativum, et minus nihilo haberi debet, si ad finem propositum referatur. Igitur probe tenendum est, quid intelligatur per quantitatem negati-

ti-

tivam, et nihilo, ut dicunt, minorem. Quantitas negativa non minus realis est, quam quantitas positiva; sed nihilo minor dicitur, quatenus positivæ quantitati opponitur; juncta scilicet quantitati positivæ ipsam minuit, quem quidem effectum, hanc nempe diminutionem, ipsum *zero* non producit. Quare quantitas negativa, ratione effectus tantum, et *relative*; non autem *absolute*, nihilo minor dicitur. Hunc loquendi modum à nonnullis usurpatum ita explicavimus, ut nihil difficultatis tyronibus facessere possit.

CAPUT IV.

De iisdem operationibus in numeris fractis.

I. NUmeri fracti definitionem, jam in primo Capite tradidimus. Si divisor excedat dividendum, duo numeri à se invicem, interposita lineola, separantur ita, ut dividendus supra lineolam, et divisor infra scribantur, in hunc modum $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ cet. Similiter: si quantitas aliqua litteralis, per aliam dividenda proponatur, et et divisio fieri non possit, eodem modo scribuntur duæ quantitates: ita $\frac{a}{b}$ significat quotum ex a per b; tales autem quoti *fractiones* vocantur. Quantitas superior dicitur *numerator*, inferior autem *denominator* appellatur. Denominator exprimit numerum partium, in quas totum aliquod divisum fingitur; numerator autem designat, quot ejusdem partes accipiantur, vel, quod idem est, quoties una ex illis partibus sumatur; ac proinde pars illa considerari potest tamquam unitas aliqua. E. G. fractio $\frac{3}{4}$ nihil est aliud, quam pars quarta alicujus totius ter sumpta; hæc autem pars quarta, tamquam unitas altera haberi etiam potest.

II. Ex fractionum natura intelligitur, qua ratione numerus integer ad fractum reducatur, atque etiam ad denominatorem datum. Ita si numerus 3 reducendus proponatur ad fractionem, cujus denominator sit 4; multiplicetur 3 per 4, scribaturque $\frac{12}{4}$, erit hæc fractio æquivalens ternario, ut patet; cum numerus 3 multiplicetur, simulque dividatur per 4. Sed tales fractiones, in in quibus numerator major est denominatore, pro veris fractionibus non habentur, atque *improprie* dumtaxat ita appellantur. Pari ratione, si quantitas a reduci debeat in fractionem litteralem, cujus denominator sit b; habebitur $\frac{ab}{b} = a$.

Ex his etiam patet, quomodo fractiones, quæ diversum habent denominatorem, ad eumdem redigantur. Si nt fractiones duæ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$: multiplicetur fractio $\frac{a}{b}$ per d, simulque dividatur per d, erit $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{a}{b}$. Simili modo multiplicetur fractio $\frac{c}{d}$ per b, simulque dividatur, erit $\frac{c \times b}{d \times b} = \frac{c}{d}$. Itaque generatim fractiones ad eumdem denominatorem reducuntur, multiplicando numeratorem unius per denominatorem alterius, et viceversa, scribendoque pro denominatore communi, productum ex utroque denominatore. Evidens est, hanc operationem eamdem

dem esse pro quolibet fractionum numero. Multiplicentur scilicet numeratores singuli, seorsim sumpti per denominatores singulos, proprio excepto denominatore ; producta singula dabunt numeratores singulos quæsitos. Deinde denominatores singuli in seipsos ducuntur, habebitur denominator communis quæsitus : ita fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ reducuntur ad $\frac{acd}{bcd}$, $\frac{bbd}{bcd}$, $\frac{ccb}{bcd}$. Patet, rem perinde se habere in numeris quibuslibet fractis ; ita fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, *respective* æquales sunt fractionibus $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$.

III. Hinc facile adduntur, et subtrahuntur fractiones ; reducantur scilicet ad denominatorem communem, sumatur numeratorum summa, vel differentia, et subscribatur denominator communis. In illo casu habebitur additio, in hoc autem subtractio. Ita $\frac{a}{b} +$

$\frac{c}{d} + \frac{d}{e} = \frac{ade + bce + ddb}{bde}$, et $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$. Similiter, in numeris $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$, et $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}$. Fractiones ex integris, et fractis compositæ, qualis est $1\frac{5}{12}$, appellantur mixtæ. Ex his autem statim intelligitur, quomodo numeri integri, et fracti simul addi possint, vel a se invicem subtrahi. Integri ad fractos reducantur, et ad denominatorem communem, atque operatio fiat, ut ante. Quamvis autem additionis, et subtractionis operationes, ex dictis sint manifestæ, demonstrari tamen possunt, hoc modo. Sint fractiones duæ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$ ad eumdem denominatorem re-

duc-

ductæ, erit $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, et $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$. Etenim ponatur $\frac{a}{b} =$ m, et $\frac{c}{b} =$ n; erit, facta multiplicatione per b. a = mb, c = nb et mb + nb = a + c; ac proinde m + n = $\frac{a+c}{b}$, hoc est $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$. Simili modo patet, esse $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} =$ m − n = $\frac{a-c}{b}$.

IV. Nulla reductione opus est, ubi fractiones multiplicare, et dividere opertet. In multiplicatione, satis est numeratores, et denominatores invicem ducere; habebitur numerator, et denominator fractionis quæsitæ, quæ erit productum ex datis fractionibus emergens. Contra vero, si fractio per aliam fractionem dividenda sit, numerator dividendæ per alterius denominatorem est multiplicandus, et illius denominator in hu-

hujus numeratorem ducendus est. Ita productum ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Quotus autem ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. Etenim ponatur $\frac{a}{d} =$ m ; $\frac{c}{d} =$ n ; erit c $=$ dn. Jam demonstrandum superest, esse $\frac{ac}{bd} =$ mn, et $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$; quod quidem facile patet, substituendo loco a, et c illorum valores bm, et dn ; erit enim in primo casu $\frac{bdmn}{bd} =$ mn; in casu autem altero, fiat $\frac{bdm}{bdn} = \frac{m}{n}$. Demonstratio generalis est, ac proinde in numeris quibuslibet fractis, eadem est operatio. Sic productum ex $\frac{2}{6}$ in $\frac{4}{8} = \frac{8}{48}$. $\frac{3}{6}$: per $\frac{2}{16} = \frac{48}{12} = 4$. Manifesta quoque est ope-

operandi ratio, si numerus fractus per integrum multiplicari, aut dividi debeat; considerari enim debet numerus integer tamquam fractio impropria, in qua denominator est unitas, et reliqua peragenda, ut ante. Quare patet, in multiplicatione numerum integrum per numeratorem esse multiplicandum; contra autem in divisione per denominatorem. Nec mirum esse debet, si fractio per fractionem divisa, præbeat numerum integrum; cum revera una fractio bis, ter, quater, cet. in alia contineri possit. Itaque fractionis valor per multiplicationem minuitur, augetur per divisionem; quod quidem paradoxum videtur iis, qui multiplicationis, et divisionis naturam non satis attendunt.

Ex dictis etiam facile patet, *fractiones fractionum* ad multiplicationem referri: *fractionem fractionis* appellant fractionis alicujus partem. Ita si sumantur $\frac{2}{3}$ fractionis $\frac{3}{4}$, operatio illa ad divisionem non pertinet, sed ad multiplicationem. Etenim si sumenda proponeretur dumtaxat pars $\frac{1}{3}$ fractionis $\frac{3}{4}$, multiplicandus esset denominator per 3, habereturque $\frac{1}{12}$. At sumi non debet dumtaxat pars tertia, sed duæ tertiæ partes sumendæ proponuntur, quare productum præcedens duplo majus fieri debet, hoc est, numerator multiplicandus est per 2. Eodem modo reduci debent aliæ quotlibet fractiones fractionum, multiplicando numeratores singulos, et singulos denominatores.

Ex fractionum doctrina, colligi possunt operationum arithmeticarum compendia plurima, si de quantitatibus variæ speciei agatur. E. G. Quæritur, quanti constiterint 35 mensuræ mercis alicujus, si mensuræ unius pretium sit 24 nummorum et assium 15. Multiplicetur primo (35×24) erit productum 840. Quoad alteram multiplicationis partem; considerari potest, esse $15 = 10 + 5$. Jam si asses 10 nummo æquivalerent, productum foret 35. At sunt pars decima dumtaxat nummi unius, quare 35 dividi debet per 10. Simili modo operandum est in ultima multiplicationis parte, atque emerget productum ex nummis, nummorumque partibus compositum. Ille operandi modus dicitur operatio per partes *aliquotas*. Partes autem aliquotæ quantitatis alicujus appellantur, quæ ipsam quantitatem accurate dividunt;

se-

secus autem, partes *aliquantæ* vocantur. Cæterum exercitatio, atque attentio multa docebunt, quæ fusius explicare, superfluum esset.

V. Explicatis Arithmeticæ operationibus in numeris fractis, jam superest, ut communes, si quos habeant, fractionum divisores inquiramus. Si numeri nullum habeant communem divisorem præter unitatem, numeri illi inter se *primi* dicuntur, cujusmodi sunt 1. 5. 7. 11. 19. quos sola unitas metitur. At numeri *compositi* appellantur, quos præter unitatem, alii quoque numeri metiuntur; sic 12 componitur ex 2, et 6, itemque ex 3, et 4. Quare 2. 3. 4. 6. metiuntur 12, seu aliquoties sumpti, 12 adæquant; illi autem numeri dicuntur *factores* ipsius numeri 12. Si igitur fractionis alicujus denominator sit numerus compositus, et resolvi possit in alterius fractionis denominatorem, instituta divisione per numerum, qui sit etiam numeratoris divisor communis; jam licebit fractionem hanc, ad minimos terminos deprimere, quod sic præstari potest. Dividatur major numerus per minorem; si nihil ex divisione supersit, jam minor numerus, est maximus divisor communis. Si autem residuum aliquod fuerit, divisor datus per hoc residuum dividatur; si divisio accurate fiat, primum residuum erit maximus divisor communis. Si autem divisio non sit accurata, sed alterum maneat residuum, per hoc secundum residuum dividatur primum; si autem nullum supersit tertium residuum, jam residuum secundum, pro maximo divisore communi haberi debet; atque ita progrediendum, donec nihil supersit, atque ultimus divisor erit maxima, ut vocant, communis duorum numerorum mensura, qua inventa, fractio ex his duobus numeris composita ad minimos terminos reducitur. Exemplo sit fractio $\frac{91}{294}$. Dividatur 294 per 91, neglectoque quoto 3, residuum est 21. Rursus dividatur 91 per 21, iterumque neglecto quoto 4, residuum est. 7. Tandem residuum primum 21, per alterum 7 dividatur; habetur quotus 3, et divisio est accurata. Quare numerus 7, est maximus communis divisor, per quem divisis numeratore, et denominatore, fractio præcedens, in hanc simpliciorem abit $\frac{13}{42}$ $= \frac{91}{294}$. Æquales autem esse fractiones illas, ex natura divisionis omnino patet. At, si divisione instituta, ad unitatem tandem, ultimum residuum, perveniatur; jam nul-

nulla est mensura communis, præter unitatem.

Eadem plane est operatio in quantitatibus litteralibus, in quibus tamen nonnulla adverti debent. Ordinatis, ut fieri solet, divisoris, et dividendi terminis, observandum est, an singuli termini divisoris, et dividendi possint dividi per monomium aliquod commune: tunc enim, facta divisione, reponi debet divisor ille, per quem deinde, facta operatione, multiplicabitur divisor communis. Præterea dividi debet, si fieri possit, polynomium utrumque per quantitates, quæ primum terminum accurate dividunt: negligitur autem divisor ille, nisi idem sit in duobus polynomiis. Tandem, si coefficiens primi termini in divisore, non possit accurate dividere primum terminum in divinendo; ita multiplicari debet dividendus per quantitatem hanc, ut accurata succedat divisio: aut etiam, quod idem est, ut coefficiens simplicior fiat, quæritur maximus communis divisor utriusque coefficientis, per quem divisor ipse dividitur, dividendus autem per quotum divisionis multiplicatur. Tota operationis ratio patet. Si enim multiplicetur, aut dividatur polynomium alterutrum per quantitatem aliquam, quæ accurate non dividat polynomium alterum; evidens est, non mutari communem polynomiorum divisorem. Sed res exemplo fiet magis manifesta. Sint polynomia duo

$(a^2 + bda + b^2 d - b^2 a - bd^2 - d^2 a)$

et $(a^3 + da^2 - b^2 a - b^2 d)$

Primum dividitur per secundum, quotus 1 negligitur: residuum autem est

$$-da^2 + bda + 2b^2 d - d^2 a - bd^2$$

Quia vero singuli termini, sunt divisibiles per d, fit divisio; habeturque

$$-a^2 + ba + 2b^2 - da - bd$$

Per hanc quantitatem dividitur primus divisor, quotus sit $-a$; ut ante negligitur: et residuum est $ba^2 + b^2 a - b^2 d - bda$; quod divisum per b, fit $a^2 + ba - bd - da$; per quod residuum dividatur ultimus divisor, quotus est -1, et residuum $2ba + 2b^2 - 2da - 2bd$: quod dividitur per $2b - 2d$, quotus est $a + b$, qui est ultimus divisor sine ullo residuo ac proinde $a + b$, est maximus divisor communis.

Tota operationis series facile demonstratur, paucis observatis. 1. Mensura quælibet communis x quantitatum duarum a, et b metitur quoque illarum summam, vel differentiam $a \pm b$. Nam sit m quotus emergens ex divisione a per x; et n quotus ex di-

divisione b per x : nempe $m = \frac{a}{x}$, et $n = \frac{b}{x}$; erit $a = mx$, et $b = nx$. Quare $a \pm b = mx \pm nx = (m \pm n)\,x$. 2. Si x sit mensura quantitatis alicujus, evidens est eam fore mensuram ejusdem quantitatis utcumque multiplæ. 3. Si b contineatur in a, quoties unitas continetur in m, sitque præterea residuum aliquod c; quantitas quælibet, quæ metietur a, et b, metietur quoque residuum c. Nam (ex hyp.) $a = mb + c$; quare $a - mb = c$. Sed x metitur b, ergo metitur quoque mb ejus multiplum: ac proinde metitur quoque $a - mb$; ideoque $c = a - mb$. Si residuum c contineatur in b, quoties n continet unitatem; sitque præterea aliud residuum d ita ut $b = nc + d$, et $b - nc = d$; x metietur etiam d. Nam (ex hyp.) x metitur b, atque etiam c (ex dem.), Ergo metitur etiam nc, et $b - nc = d$. Quare cum subtrahendo b ex a, quantum fieri potest, residuum c metiatur x; itemque subtrahendo c ex b, quantum fieri potest, residuum d metiatur x; et ita deinceps de quolibet residuo: quantitas x communis mensura ipsarum a, et b metietur residuum quodlibet; residuum vero ultimum, quod præcedens residuum metitur accurate, erit communis mensura ipsarum a,

 et

et b. Nam ponamus, residuum illud esse d, quod contineatur in c, quoties unitas continetur in r: ergo c = rd. Præterea a = mb + c, b = nc + d; sed d metitur c; quare metietur etiam nc; et nc + d = b. Quia vero metitur b et c, metietur etiam mb + c = a; ideoque erit mensura communis inter a, et b. Tandem erit maxima communis mensura; nam mensura quælibet communis inter a, et b metitur aliam d (ex dem.): sed maxima mensura ipsius d, est ipsa quantitas d; ergo erit maxima communis mensura inter a, et b. Demonstrata ergo est vulgata maximi communis divisoris regula.

VI. De fractionum communi divisore, et numeris primis pauca addenda supersunt, quæ deinde utilitatis maxime futura sunt. 1. Si duo muneri a et b fuerint primi inter se, tertius autem numerus c metiatur primum a, hic erit primus respecto b. Nam si c, et b non essent numeri primi, haberent mensuram communem, quæ cum metiatur c, foret quoque mensura ipsius a, quam metitur c. Quare a, et b haberent mensuram communem contra hypothesim. 2. Si duo numeri a, et b sint primi respectu c, productum ab erit quoque numerus primus respectu c. Nam productum ex duobus numeris a et b nullos potest habere divisores, nisi vel nu-

me-

meros ipsos a, et b, vel partes illorum aliquotas, vel alterutrius numeri multiplos. Sed numeri a, et b non possunt esse divisores numeri c, cum respectu c sint numeri primi; ac proinde partes illorum aliquotæ, divisores esse non possunt. Tandem si c dividi posset per numerum aliquem multiplum ipsius b, dividi etiam posset per ipsum numerum b (contra hyp.). Quare si a, et b sint numeri primi respectu c, productum ab erit quoque numerus primus respectu c: pari ratione si a, et c sint numeri primi inter se, erit etiam a^2 numerus primus respectu c; nam ponatur $a = b$, erit $ab = a^2$; ideoque a^2 erit numerus primus respectu c. Similiter c^2 erit numerus primus respectu a.

3. Si duo numeri a, et b sint primi respectu numerorum c, et d; producta ab, et cd erunt quoque numeri primi inter se. Nam ab est primus respectu c, et d; ergo cd erit primus respectu a^2. Quare etiam si a et c sint numeri primi, erit a numerus primus respectu c^2. Et generatim, productum ex numeris primis quibuscumque, divisum per productum ex aliis quibuscumque numeris, itidem primis ad simpliciores terminos reduci

non

non potest. Quare si $\frac{a}{b}$ sit fractio ad minimos terminos reducta; erunt quoque $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^n}{b^n}$ fractiones ad simplicissimos terminos reductæ; ac proinde fractio quælibet sive pura, sive mixta ad potentiam quamlibet evecta, semper manet fractio.

Schol. Præter fractiones, in hoc Capite explicatas, considerari etiam debent fractiones, quæ *decimales* appellantur. Illæ scilicet fractiones pro denominatore habent unitatem, cum tot sequentibus cyphris, quot sunt numeri in numeratore: atque eam ob causam non scribitur denominator, sed numerator dumtaxat, cujus numeris præfixa est virgula, alii punctum præfigunt, quod fit, ut numnrator à numeris integris distinguatur. Ita ad exprimendum fractionem $19 \frac{4}{10}$, scribi solet 19. 4. Ad exprimendam fractionem $19 \frac{4}{100}$, scribitur 19, 04; cyphra numero 4 præfixa indicat, denominatorem es-

esse 100. Fractio $19\frac{4}{1000}$ ita exprimitur 19, 004. Ex fractionum decimalium significatione patet, primum numerum post virgulam designare decadas, secundum centenarios, et ita deinceps, per decadas semper progrediendo; sic $4, 217 = 4 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$. Fractionum decimalium utilitas, maxima est ad obtinendum quotum proxime verum, si divisio accurate fieri non possit. E.G. Si dividendus proponatur numerus 147475 per 362, quotus invenitur 407 cum residuo 141, cui addatur 0, dividaturque 1410 per 362, quotus erit 3 cum novo residuo 324, cui iterum addatur 0; dividaturque 3240 per 362, quotus prodit 8 cum residuo 344, cui addatur 0; in nova tandem divisione quotus emergit 9; quod autem remanet 182, iterum dividi posset; sed operationis ordinem exhibuisse satis sit. Quare quotus est 407, 389, quem quidem accuratiorem esse, evidens est.

Eadem methodo fractio vulgaris, in fractionem decimalem reducitur. Si fractio $\frac{3}{4}$ in fractionem decimalem, reducenda pro-

po-

ponatur, numeratori 3 addatur 0, dividaturque 30 per 4, quotus est 7 cum residuo 2, cui addatur 0, rursusque 20 per 4 dividatur, quotus est 5 sine ullo residuo; quare $\frac{3}{4} = 0,75$. Et re quidem ipsa, cum sit 25 quarta pars numeri 100, numerus 75 erit $\frac{3}{4}$ ejusdem numeri 100. Hinc generatim patet, quo artificio fractio vulgaris ad decimalem reduci possit; multiplicetur nempe numerator fractionis datæ per 100, vel 1000, cet. productum illud divisum per denominatorem erit numerator fractionis decimalis, cujus denominator est 100, vel 1000, cet. Sæpe tamen contingit, fractiones ad decimales, accurate reduci non posse, etiamsi divisionum residuis plures utcumque cyphræ addantur. Id autem facile dignoscitur, si nempe ad idem residuum semper perveniamus, vel si iidem numeri, eodem ordine redeant. Ita si fractionem $\frac{4}{7}$ ad decimalem reducere volueris, inventes 0, 571428571428571428..; cet. nec umquam pervenies ad divisionem accuratam. Pari

mo-

modo ad reducendam fractionem $\frac{5}{12}$ in decimalem, invenies o, 416666, cet. In his autem casibus duas, vel tres primas decimales adhibere satis sit, reliquæ autem negliguntur. Ita poni possunt $\frac{4}{12} = 0, 57$, et $\frac{5}{7} = 0, 416$.

Hæc quidem pauca satis esse possunt iis, qui demonstrationis severitatem non quærunt; sed rem utilissimam generatim, et omnino accurate ostendemus. Sit $\frac{p}{q}$ fractio vulgaris reducenda ad fractionem decimalem $\frac{r}{10^n}$ in qua n exprimit cyprarum numerum, ponaturque r numerus integer, erit $r = \frac{p \times 10^n}{q}$. Sed est $10^n = 2^n\ 5^n$; non potest autem $\frac{p \times 2^n \times 5^n}{q}$ abire in nume-

rum

rum integrum r, nisi q æqualis sit alicui potestati ipsius 2, vel 3, vel 2×5, vel tandem producto ex aliqua potestate ipsius 2 in aliquam potestatem ipsius 5, quæ tamen potestates sunt minores, quam n; ponitur enim, fractionem $\frac{p}{q}$ esse ad minimos terminos reductam, hoc est, p, et, q nullum habere divisorem communem. In alio quolibet casu, fractio $\frac{p \times o^n}{q}$ numquam fieri poterit numerus integer r. Attamen quo major erit n, hoc est, quo plures erunt cyphræ in denominatore, eo magis fractio $\frac{1}{10^n}$ accedet ad fractionem $\frac{p}{q}$. Si enim $p \times 10^n$ per q dividatur, inventus r, qui minor erit; justo major fiet, si unitate augeatur. Quare $\frac{1}{10^n}$ minor est, quam $\frac{p}{q}$, et $\frac{1+1}{10^n}$ major.

Quatuor Arithmeticæ operationes in fractionibus decimalibus, eadem omnino ratione, ne, qua in numeris integris tractantur; sed habenda est maxime ratio virgulæ, qua fractiones ab integris dirimuntur. Hæc virgula in eadem linea verticali jacere debet, si plures quantitates vel in unam summam colligendæ sunt, vel ab invicem subtrahendæ. Si vero multiplicatio instituitur, eum locum in producto occupare debet virgula, ut totidem post se notas relinquat, quot erant in utraque fractione. Tandem si divisio peragitur, dividendi numeri decimales notæ probe observandæ sunt; nam in quoto, et divisore simul, totidem esse debent post virgulam notæ, quot erant in dividendo. Quatuor illarum operationum exempla exhibebimus.

Additio.

23, 304
3, 6567
149, 86

178, 8207

Multiplicatio.

12, 35
4, 2

24 70
494 0

51,8 70

Subtractio.

49, 638
17, 16

32, 478

Divisio.

3, 22) 8, 445 (2, 6

644

2005
1932

0073

Unum

Unum autem in divisione notandum est. Si nempe in divisore plures occurrant notæ decimales, quam in dividendo, tunc decimalibus dividendi adjunges, quot volueris cyphras; ita ut tamen, notæ decimales in dividendo plures sint, quam in divisore, ut nempe in quoto, aliquæ decimales notæ haberi possint. Tota operationum illarum ratio, statim manifesta fiet, si fractiones decimales vulgari modo exprimantur Ita in exemplo divisionis præcedentis 8, 445 $= \frac{8445}{1000}$ per 3, 22 $= \frac{322}{100}$. Itaque dividi debet fractio prior per secundam; evidens autem est, cypharam unam dumtaxat in quoto adesse, et hinc facile intelligitur, cypharum numerum in quoto esse semper æqualem cypharum in divisore, et dividendo differentiæ. Generatim, quod multiplicationem spectat, si 10^n sit denominator fractionis unius decimalis, et 10^m alterius; denominator producti erit 10^{m+n}. Quare, omisso denominatore, productum habere debet tot partes decimales, seu numeros post virgulam, quot sunt unitates in $m+n$. Contraria ratione in divisione denominator non erit 10^{m+n}, sed

sed 10^{m-n} ; ideoque m-n exprimit numerum cyphrarum, quæ post virgulam, in quoto scribi debent.

CAPUT V.

De radicum extractione.

I. Explicavimus jam in Capite 2° quid sit *potestatum* formatio. Quantitatis alicujus *potestas prima*, vel *primi gradus*, est quantitas ipsa solitarie spectata. Ita prima potestas ipsius a, est a. Productum ex quantitate aliqua in seipsam, dicitur *potestas secunda*, vel etiam *quadratum*, ita a^2 est quadratum. Ipsa autem quantitas dicitur *radix*, quæ vocatur *quadrata*, si potestas sit secunda, vel quadratum. Si quadratum in ipsam quantitatem ducatur, productum dicitur *potestas tertia*, vel *cubus*; ita a^3 est cubus ipsius a; quantitas autem, dicitur *radix cubica*. Et generatim, si quantitas evehatur ad potestatem, cujus index est n, habebitur potestas gradus n. In hoc autem Capite præsertim considerabimus radicum quadratæ, et cubicæ extractionem, quod ut clare fiat, ipsam quadrati, et cubi formationem primum investigabimus, atque deinde ad operationes arithmeticas, recto ordine progrediemur. Si quantitas litteralis $a + b$ ad quadratum evehenda, prodit $aa + 2\,ab + bb$. Jam vero quadrati hujus formationem, seu partes singulas expendamus. Quadratum binomii $a + b$ continet $1^{o.}$ Quadratum aa primæ partis a. $2^{o.}$ Productum $2ab$, ex duplo primæ partis, in secundam. 3^{o}. Quadratum partis secundæ, nempe bb. Simili modo si multiplicetur $a + b + c$ per $a + b + c$, orietur quadratum

$$a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2.$$

In hoc quadrato, rursus considerandæ sunt partes singulæ; cotinet $1^{o.}$ Quadratum $a^2 + 2ab + b^2$ ex duobus primis terminis $a + b$. $2^{o.}$ Productum ex duplo duorum priorum terminorum in tertium terminum $= \overline{2a + 2b} \times c$. Tandem continet quadratum c^2 tertii termini. Simili modo progredi licet, pro alia qualibet quantitate ex pluribus, quam tribus terminis, composita;

ta-

tales vero quantitates magis compositæ appellari solent *polynomia*.

Eadem omnino ratione intelligitur cubi formatio. Binomium $a + b$ ad III potestatem evehatur, multiplicetur nempe quadratum $a^2 + 2ab + b$ per $a + b$, prodit cubus $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$. Cubi hujus partes singulæ sunt 1^o. Cubus primi termini, nempe a^3. 2^o. Productum ex quadrato a^2 primi termini, in triplum terminum secundum, scilicet $3a^2 b$. 3^o. Productum ex primo termino a, in triplum quadratum secundi termini, nempe $3ab^2$. 4^o. Cubus secundi termini, scilicet b^3.

Simili modo operandum est, pro trinomio $a + b + c$; invenieturque cubus $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2 c + 6abc + 3b^2 c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$. In hoc autem cubo præter cubum $a^3 + 3ab^2 + 3a^2 b + b^3$ duor. primor. terminor., habetur 1^o. factum ex quadrato summæ duo-

 rum

rum primorum terminorum in tertium terminum c ter suptum, nempe $3a^2c + 6abc + 3b^2c = \overline{a^2 + 2ab + bb} \times 3 \times c$.

2^o. Tripla summa duorum primorum terminorum per tertii termini quadratum multiplicata, scilicet $3ac^2 + 3bc^2 = \overline{a+b} \times 3c^2$. 3^o. Tandem tertii termini cubus, nempe ccc.

II. Ex potestatum compositione facile colligitur illarum resolutio, sive radicum extractio. Sit quantitas litteralis $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$, ex qua extrahenda sit radix quadrata. Sumatur primi termini radix quadrata x, cujus quadrato subtracto, remanent termini duo $- ax + \frac{1}{4} a^2$. Deinde sumatur duplum ipsius x, per quod dividatur secundus terminus $- ax$, quotus fit $- \frac{1}{2} a$, qui multiplicetur per ax. Tandem fiat quadratum quoti $- \frac{1}{2} a$, atque producta illa

ex

ex residuo $- ax + \frac{1}{4} aa$ subtrahantur, nihil remanet. Quare radix quadrata est $x - \frac{1}{2} a$. Tota operatio patet ex num præcedenti.

Cæterum, si radix plures habuerit quam duos terminos, jam duo primi termini post primam operationem, velut unicus terminus considerari debent, et reliqua peragenda, ut ante, quod quidem patet ex demonstratis.

Proponatur extrahenda radix cubica, ex quantitate litterali $c^3 - 3c^2 y + 3cy^2 - y^3$. Ex primo termino extrahatur radix cubica, quæ est c, cujus cubus c^3 auferatur: remanent termini $- 3c^2 y + 3cy^2 - y^3$. Jam quia notum est, secundum terminum multiplicari per triplum quadratum primi, sumatur termini c triplum quadratum, per quod dividatur secundus terminus $- 3c^2 y$, prodit quotus $- y$, qui erit secunda pars radicis. Quia vero cubus quilibet, continet cubum ex duobus primis terminis radicis, sumatur cubus terminorum c — y, deinde a reliquis terminis auferatur, quo facto nihil remanet; ac proinde radix accurata est c — y.

III. Ex demonstrationibus præcedentibus, facile patet radicum extractio, in quantitatibus numericis.

Extrahenda sit radix quadrata, ut in præsenti exemplo. Numerum datum in clases divide, quarum singulæ duas notas contineant, initio a postremis facto: nihil autem refert, sive unica tantum nota constet prima classis, sive notis duabus. Quære radicem veram, aut proxime veram numeri 38, quæ in nostro casu est 6. Scribe 6 loco radicis, et ejus quadratum 36 aufer et 38. Residuo 2 adjunge notas classis proxime sequentis 94, et hujus novi numeri postrema nota neglecta, quære

Exemplum.

```
38. 94. 89. ( 624,90
36
--------------
294
122
244
--------------
  5089
  1244
  4976
--------------
   11300
   12480
       0
--------------
 1130000
  124809
 1123281
--------------
   6719. cet.
```

re quoties duplum radicis hactenus inventæ, sive 12, contineatur in 29, invenietur 2, scribe ergo 2 in radice, et ex 294 aufer productum ex 2 in 122 nempe 244, remanet 50; huic autem residuo adnecte natas classis proxime sequentis 89. Rursus, contempta novi numeri postrema nota, quære quoties duplum radicis hactenus inventæ, scilicet 124, contineatur in 508, quotus erit 4, iterumque ex numero superiori aufer productum ex 1244 in 4, nempe 4976, residuum est 113. Quare radix proxime vera numeri propositi est 624; numerus autem ille foret perfecte quadratus, si numero 113 minueretur. Quamvis autem radix quadrata non sit accurate vera, ad eam tamen fractionum decimalium ope, peo arbitrio licet accedere. Residuo 113 addantur cyphræ duæ, ut hic factum vides; ut habeatur numerus 624 tamquam prima pars radicis, cujus duplum sumatur, nempe 1248; dividaturque 1130 per 1248, quotus est 0, quare scribe 0 in radice, et multiplica 12480 per 0, productumque 0 aufer ex 11300, remanent 11300. Huic residuo iterum addantur cyphræ duæ, sumaturque duplum radicis, nempe 12480, per quod dividatur 1130000, scribaturque quotus 9 in radice, per quam multiplicetur numerus 124809, productumque 1123281 auferatur ex 1130000, residuum fit 6719. Operatio rursus continuari posset; sed satis patet methodus, cujus ope radicem proxime veram obtinere licet, et ad eam magis ac magis accedere. Tota operationis ratio manifesta est, ex fractionum decimalium natura.

In hujus operationis serie, idem notare oportet, quod in divisione observatum est, nempe si post adjectas alicui residuo notas duas classis proxime sequentis, duplum radicis inventæ non contineatur in numero, qui per illud dividendus est; postrema hujus dividendi nota neglecta, cyphra scribenda est in radice, et classis proximæ notis duabus demissis, operatio continuanda. Evidens autem est, hanc operationem esse divisioni similimam, in qua radix sit quotus, divisor vero sit duplum radicis postremo inventæ auctum nota, quæ deinceps investigatur. Hoc unum interest, quod in divisione divisor semper est idem, hic autem semper augetur; in divisione totus divisor cognoscitur, hic autem ignota est novi divisoris nota, quæ inquiritur; atque id in causa est, cur in hac divisioni instituenda postrema dividendæ quantitatis nota prætereatur. Si contigeret, divisorem esse majorem: V. G. in præsenti exemplo, si productum est 2 in 122 subtrahi hi non posset ex 294, jam in radice scribendus esset numerus proxime minor, et tota operatio esset reformanda. Sed in casu nostro, id minime contingit; quare nulla correctione opus est. Unum tandem superest notandum, cur nempe post duplum radicis inventæ scribatur radix nova, et deinde numerus totus per radicem novam multiplicetur. Ita in præsenti exemplo post duplum primæ radicis 12 scribitur 2., totusque numerus 122 multiplicatur per novam radicem 2. Operationis ratio manifesta est; cum enim numerus 0 in radice duas exprimat decadas, hujus numeri quadratum versus sinistram promoveri debet, ut patet ex notarum arithmeticarum significatione.

Ad radicis cubicæ extractionem jam veniendum est. Pro radice cubica methodus est admodum similis; et iisdem innititur principiis. Extrahenda sit radix cubica, ut in præsenti exemplo.

Di-

Diviso numero in classes, per ternas notas, incipiendo a postremis notis ; prima classis, quæ poterat continere vel tres notas, vel duas, in hoc casu unicam continet. Quæratur radix cubica numeri 5 proxime minor, quæ est 1. Hujus cubus 1 subtrahatur a prima classe 5, residuum est 4, cui adnectatur classis sequens, ut hic factum vides. Deinde ita dicendum, prima pars radicis 1 pro decade haberi debet, si conferatur cum secunda parte. Sumatur itaque numeri 10 quadratum 100, et per illius triplum 300 dividatur 4305, invenietur quotus 7, quilibet enim alius foret justo major, si 7 excederet, ut patet operationem experiendo. Jam multiplicetur 300 per 7, habetur productum 2100. Dic præterea $7 \times 7 = 49$, et $49 \times 10 = 490$, postea $490 \times 3 = 1470$, quod scribe

Exemplum.

```
5. 305. 472. (174,4
1
-----------
4305
 300
-----------
2100
1470
 343
-----------
3913
-----------
 392472
  86700
-----------
 346800
   8160
     64
-----------
 355024
-----------
 37448000.
```

be infra 2100. Tandem $7 \times 7 \times 7 = 343$, quod scribi debet infra 1470. Addantur numeri 2100, 1470, et 343, et summa 3913 auferatur ex numero 4305; residuum est 392. Demittatur classis tertia 472, et duæ primæ partes radicis, velut pars una, considerentur. Hæc autem pars, quæ est 17, æquivalet 170, si conferatur cum tertia parte quæsita. Sumatur hujus numeri 170 triplum quadratum 86700, per quod dividatur pars cubi reliqua 392472, prodit quotus 4, quem scribe in radice; multiplicetur divisor 86700 per 4, productum fit 346800, quod infra scribitur. Dicas deinde $4 \times 4 = 16$; $16 \times 170 \times 3 = 8160$, quod productum scribe infra 346800, atque infra scribi debet cubus ipsius 4, nempe 64. Addantur tres illæ quantitates; quarum summa 355024 ex reliqua rubi parte subtrahatur, residuum fit 37448. Quare numerus propositus, non est cubus perfectus; sed ad radicem proxime veram licebit accedere, si residuo addantur tres cypræ, ut in præsenti exemplo factum est; et eadem operatio deinde pro alio quolibet fractionum decimalium numero iteretur, magis ac magis accurata fiet radix inventa; illud autem observandum est diligenter, inventas radicis partes velut partem unicam tractandas esse, si pars alia investigari debeat.

In

In extractione radicis quadratæ, et cubicæ, diximus, tot esse radicis partes, quot sunt diversæ numeri propositi partes. Id vero demonstratione indiget. Quantitas quælibet ex duobus constans numeris unicam dumtaxat in radice partem habere potest. Consideretur numerus 99 omnium, qui duabus constent notis, maximus. Deinde radicem ex duabus notis compositam omnium minimam 10 consideremus; quadratum erit 100, quod numero 99 majus est, ac proinde radix duas notas continere non potest. Similiter quantitas omnium minima, quæ tres habeat notas, est 100, cujus radix quadrata est 10, quæ proinde duas continet notas; ac quantitas omnium maxima, quæ tres habeat notas est 999, cujus radix tres notas habere non potest; nam numeros omnium minimus tribus constans notis est 100, cujus quadratum fit 10000, quod quidem numerum 999 longe excedit. Eadem ratione, ad aliam quamlibet numerorum seriem progrediendo facile intelligitur, præscripta numerorum divisio, in extrahenda radice quadrata: et huic numerorum divisioni, partium numerum in radice respondere, evidens est. Idem simili ratiocinatione constat pro radice cubica. Evidens est, extractionem radicum, simili ratione perfici in numeris fractis, extrahendo scilicet radicem

pro-

propositam ex numeratore, et ex denominatore. In qualibet autem radicum extractione operationis ritæ peractæ facile habetur argumentum. Si radix sit quadrata, hæc in se ipsam ducatur, productoque addatur residuum, si aliquod fuerit facta operatione, et restitui debet ipse numerus propositus. Similiter radix cubica ad cubum evehatur; id vero statim patet ex ipsa earumdem operationum natu a.

IV. Sæpe ab extrahenda radice supersedemus, ubi veram invenire non licet, et quantitati propositæ præfigitur signum $\sqrt{\ }$ quod *radicale* appellant. Sic $\sqrt{3}$ significat radicem quadratam numeri 3. $\sqrt[3]{10}$ denotat radicem cubicam denarii; et hi sunt numeri, quos Arithmetici vocant numeros *surdos*, sive *irrationales*, aut etiam *incommensurabiles*. Quantitatibus litteralibus idem signum præfigitur, ita $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{abc}$ significant radicem quadratam ipsius ab, et radicem cubicam quantitatis abc. Sed commoditatis ergo radix secunda, vel quadrata exprimi solet per $\frac{1}{2}$, radix cubica per $\frac{1}{3}$; ita a^{2}

$a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{m}}$ significant radicem quadratam, cubicam, et radicem quamlibet indeterminatam m. Ut autem clara talium expressionum notio habeatur, meminisse oportet, quæ antea de exponentibus breviter dicta sunt.

Ponamus $a = bb$ erit $a^{\frac{1}{2}} = (bb)^{\frac{1}{2}}$. Præterea in quantitate $(bb)^{3}$ exponens 3 indicat, quantitatem bb ter scribendam esse, ac proinde $(bb)^{3} = b^{6}$. Igitur eadem ratione in quantitate $(bb)^{\frac{1}{2}}$ exponens $\frac{1}{2}$ designat, litteram b dimidio minus sumendam esse, quam in bb; ac proinde semel tantum, quare $(bb)^{\frac{1}{2}} = b = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Idem patet de aliis quibuscumque exponentibus. Res autem tota magis illustrabitur, explicatis quatuor Arithmeticæ operationibus in quantitatibus surdis.

Quan-

Quantitates surdæ adduntur, vel subtrahuntur facillime, si ejusdem sint exponentis, et eamdem habeant sub signo radicali quantitatem. Si autem res non ita se habeat, sæpissime contingit, quantitates surdas ejusdem ordinis, ad eamdem quantitatem sub signo radicali posse revocari. Ita si addi, vel subtrahi debeant quantitates radicales $\sqrt{48abb}$, et $b\sqrt{75a}$, prima per reductionem mutatur in $4b\sqrt{3a}$, altera autem in $5b\sqrt{3a}$. Quare in 1^o casu, habebitur $9b\sqrt{3a}$; in altero autem $b\sqrt{3a}$. Totum reductionis artificium in eo consistit, ut numeri sub signo radicali positi, quærantur divisores, inter quos ille eligatur, si quis fuerit, ex quo liceat radicem extrahere, ejusdem ordinis, cujus est surda quantitas. Si aliquem ejusmodi divisorem invenias, ejus radicem præfige signo radicali, quo includatur tantummodo alter dati numeri coefficiens. Si autem nullus talis divisor inveniri possit, jam quantitates radicales in additione signo $+$ connectendæ, in subtractione autem signo $-$ separandæ.

Demum multiplicantur, et dividantur quantitates irrationales non secus, ac rationales, et producto, vel quoto idem, quod

prius

prius erat, signum radicale præfigitur, quod quidem in utraque quantitate sit ejusdem ordinis. Ita si multiplicari debeat $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{ac}$, productum erit $\sqrt{aabc} = a\sqrt{bc}$. Ita si dividi debeat $ac\sqrt{(bc)}$ per $a\sqrt{b}$, quotus erit $\dfrac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}$.

Patet autem, in multiplicatione delendum esse signum radicale, si æquales fuerint quantitates signo incluse: sic $\sqrt{(a^3\ c)} \times \sqrt{(a^3\ c)} = a^3\ c$.

Quoniam sæpe contingit, quantitates radicales ad eumdem exponentem reducendas esse, observandum est, id facile præstari posse ex hactenus demonstratis. Ita quantitates duæ radicales $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)}$, et $\sqrt[m]{\left(\frac{c}{d}\right)}$ mutantur in $\sqrt[nm]{\left(\frac{a^m}{b^m}\right)}$ et $\sqrt[nm]{\left(\frac{c^n}{d^n}\right)}$ quod patet; nam quantitates illæ ad potestates n, m, respective evehuntur, et simul deprimuntur.

Pro-

Probe autem notandum est discrimen, inter quantitatum multiplicationem, illarumque potestatem. Ita si multiplicari debeant a^3 per a^2, productum fit $a^{3+2} = a^5$. Si autem quantitas a^3 ad secundam potestatem evehi debeat, habetur $a^{3\times 2} = a^6$; et generatim quantitas a^m ad potestatem n evecta, fit a^{mn}. Quare multiplicatio, fit per *indicis* additionem, potestas autem per multiplicationem. Contraria ratione, divisio fit per *exponentis* subtractionem, et radicis extractio, per exponentis divisionem. Ita $\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2}$. At si ex a^6 extrahenda sit radix quadrata, erit $a^{\frac{6}{2}} = a^3$. et generatim, pro divisione $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; at pro radicis n extractione habetur $a^{\frac{m}{n}}$. Si quantitates sint simplices, brevius per exponentes, quam per signum radicale, exprimuntur.

V. Quantitates irrationales, sive incommensurabiles, sæpe in hoc Capite nominavimus; revera autem, tales dari quantitates, evidens est ex Capite præcedenti, in quo demonstravimus, fractionem sive puram, sive mixtam in fractionem semper abire, etiamsi ad potestatem quamlibet evehatur. Ergo numerus integer, cujus radix quadrata, cubica, cet. non est numerus integer, nullam fractionem, nequidem mixtam pro radice habere potest, ac proinde hujus numeri radix, est incommensurabilis. Itaque numeri incommensurabiles, non sunt numeri proprie dicti. Et re quidem ipsa, cum per numerum nihil aliud intelligamus, quam rationem quantitatis cujusvis, ad aliam ejusdem generis quantitatem; in omni ratione, vel numero existere necessum est partem aliquotam, quæ sit utrique quantitati communis; at quantitates inter se incommensurabiles, tali carent mensura; ita $\sqrt{2}$, non est numerus proprie dictus, quia talis quantitas proprie non existit, eaque inveniri non potest. Imo fractiones, proprie non dicuntur numeri, nisi quatenus ad numeros integros revocantur. Et quidem fractio $\frac{3}{4}$, quæ exprimit quartam partem totius alicujus ter sumplam, ipsa ad numeros integros refertur; hæc enim quarta pars, velut alia unitas consideratur, ut antea ob-

ser-

servavimus. Rem arithmetico exemplo illustrabimus Si ex numero 7, extrahenda proponatur radix quadrata, hæc invenitur minor quam 3; cum $3 \times 3 = 9$, et major quam 2, cum sit $2 \times 2 = 4$. Igitur radix quadrata numeri 7, continetur intra limites 2 et 3; ac proinde si posset determinari, ea foret æqualis numero 2, et alicui numero fracto, sed fieri non potest, ut fractio mixta per se ipsam multiplicata, producat numerum integrum, ut antea demonstravimus. Ergo numerus 7, pro radice habere non potest neque numerum integrum, neque fractum. Idem patet de alio quolibet numero integro, cujus radix non est numerus integer.

Schol. Secundæ dumtaxat, et tertiæ potestatis compositionem, ac resolutionem in præsenti Capite explicavimus; at rem generatim, et breviter, quantum licet, pro alia qualibet dignitate considerabimus. Ex hactenus explicatis manifestum est, eodem modo formari, altiores cujuslibet gradus potestates. Ita ad formandam quarti gradus potestatem, multiplicari debet cubus per suam radicem, et sic deinceps. Jam in singulis terminis exponentes, et coefficientes diligenter observemus. In potestatis cujuslibet compositione, primus terminus a binomii cujuslibet $a + b$, evehitur ad potestatem quæsitam, V. G. a^2 si potestas secunda fuerit. In aliis sequentibus terminis, exponens quantitatis a per unitatem decrescit, et in ultimo termino evanescit. Ita in secunda potestate habetus $2ab + b^2$. Contra autem potestas termini b, in primo termino non reperitur, sed in 2^o. termino illius exponens est unitas, in 3^o. termino 2, et ita crescit per gradus, donec in ultimo termino exponenti potestatis quæsitæ æqualis fiat. Quare iisdem gradibus, quibus decrescunt exponentes ipsius a, crescunt exponentes quantitatis b, atque in utraque quantitate exponentium summa semper eadem est, et potestatis quæsitæ exponenti æqualis, quod quidem in potestate qualibet experiri licet. Ita potestas 6 binomii $a+b$, invenitur $a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$; in qua observare est, exponentes quantitatis a decrescere secundum seriem numerorum 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0; contrario autem ordine crescere exponentes quantitatis b, nempe hoc modo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; summaque exponentium in utroque termino est semper 6. Jam superest, ut singulorum terminorum coefficientes observemus. Dividatur coefficiens præcedentis termini per ex-

po-

ponentem ipsius b in termino dato, et quotum multiplica per exponentem ipsius a in eodem termino auctum unitate. Ita in præcedenti exemplo, ubi termini sunt a^6, $a^5 b$, $a^4 b^2$, $a^3 b^3$, $a^2 b^4$, ab^5, b^6, coefficiens primi termini est unitas, coefficiens secundi est $\frac{1}{2} \times \overline{5+1} = 6$, tertii termini coefficiens $\frac{6}{2} \times \overline{4+1} = 3 \times 5 = 15$, coefficiens termini quarti est $\frac{15}{3} \times \overline{3+1} = 5 \times 4 = 20$. Et simili modo invenientur coefficientes alii 15, 6, 1.

Ex hac constanti exponentium, et coefficientium serie, generatim exhiberi potest binomium $a+b$ ad potestatem quamlibet m evectum. Ita terminorum series se habebit, non consideratis coefficientibus, a^m, $a^{m-1} b$, $a^{m-2} b^2$, $a^{m-3} b^3$, $a^{m-4} b^4$, quæ series continuari debet, donec exponens quantitatis b evadat m. Coefficientis autem ex præcedenti regula hoc ordine progredientur 1, m, $m \times \frac{m-1}{2}$, $m \times \frac{m-1}{2}$

F 3

$\times\frac{m-2}{3}$, $m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}$ et ita deinceps. Quare hæc habetur generalis formula $\overline{a+b}^{\,m} = a^m + ma^{m-1}b + m\times\frac{m-1}{2}\times a^{m-2}b^2 + m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times a^{m-3}b^3$; cet. Simili modo invenitur formula pro binomio $\overline{a-b}^{\,m}$, hoc solum observato discrimine, quod terminus debeat esse negativus, si exponens quantitatis b sit numerus impar. Ita in cubo $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ secundus, et quartus termini sunt negativi; ratio autem est evidens, cum negativa existente quantitate, multiplicationum numerus impar, productum efficere debeat negativum. Formula, eamdem omnino ratione componi posset pro trinomio $a+b+c$, ponendo $a+b = n$, et ita deinceps pro polynomio quolibet. Præcedens formula, quæ potestatum compositionem exibet, earum quoque resolutionem repræsentate potest. Ita radix quadrata binomii $a+b$ nihil est aliud, quam potestas binomii $a+b$, cujus

jus expomens $\frac{1}{2}$. Quare ponatur in formula præcedenti $m = \frac{1}{2}$, habebiturque $\overline{a+b}^{\frac{1}{2}}$ $= a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times a^{\frac{1}{2}-1} b + \frac{\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} - 1)}{2}$ $\times a^{\frac{1}{2}-2} b^{2}$, cet. Si quantitas ex pluribus, quam duobus, constet terminis: E. G. si extrahenda sit radit quadrata ex quantitate $1 + 2c + 2^{c}$. Fiat $a = 2c + c^{2}$. Eadem adhibita formula, factisque debitis reductionibus per vulgares Algebræ regulas, invenitur radix $1 + c$, ut oportet. Si autem quantitas proposita nullam habeat radicem accuratam, hujus formulæ ope ad radicem proxime veram licet accedere. Exempla duo breviter proponemus. Sit $aa + b$ quadratum imperfectum, ex quo extrahenda sit radix quadrata, habebitur $(aa + b)^{\frac{1}{2}} =$

$$aa)^{\frac{1}{2}} + {}^{\frac{1}{2}} \times (aa)^{\frac{1}{2}-1} b \, x^{\frac{1}{2}} \times (\frac{1}{2} - 1)$$

$$\overline{}\,2\,\overline{} \times$$

$\times (aa)^{\frac{1}{2}-2} b^{2}$ cet. $\times a \times \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^3}$ cet. Simili modo si ex cubo imperfecto $(a^3 \times b)$ extrahenda sit radix cubica, erit $(a^3 \times b)^{\frac{1}{3}} \times a \times \frac{b}{3a^3} - \frac{b^2}{6a^5}$ cet. Itaque ad radicem proxime veram accedere possumus per series infinitas, dummodo series illæ sint *convergentes*, hoc est, si termini perpetuo decrescant. Sit n ordo, quem terminus aliquis in præcedenti serie occupat, terminus ille invenietur esse ad terminum proxime sequentem, ut 1 ad $\frac{b}{a} \times \frac{m - n + 1}{n}$; ac proinde ut series sit convergens, oportet b $(\times m\text{-}n + 1)$ esse semper minorem, quam na. Ita in exemplo proposito, ad habendam radicem quadratam proxime accuratam, terminus $b \times (\frac{1}{2} - n + 1)$ positive sumptus minor esse debet, quam naa, existente

n

n numero integro. Simili modo ad habendam radicem cubicam quam proxime in exemplo præcedenti, oportet terminum $b \times \left(\frac{1}{3} - n \times 1\right)$ positive sumptum semper minorem esse, quam na^3, quod quidem diligenter observandum est in præcedentis formulæ usu.

CAPUT VI.

De Proportionibus.

I. IN memoriam revocanda est explicata cap. 10. rationis, et proportionis definitio. *Ratio* dicitur ea duarum quantitatum *habitudo* qua ad se invicem referuntur; *geometrica* dicitur, si in ea relatione consideremus, quomodo quantitas una alteram contineat; *arithmetica* vocatur, si excessum tantummodo unius supra aliam spectemus. In omni ratione quantitas, quæ ad aliam refertur, *antecedens* dicitur, ea vero ad quam refertur, *consequens* appellatur. Ratio *geometrica* dicitur *dupla*, *tripla*, *decupla*, cet. si antecedens bis, ter, decies, cet. consequentem continet; contra vero *subdupla*, *subtripla*, *subdecupla*, cet. si bis,

bis, ter, decies, cet. antecedens in consequenti continetur. *Exponens* rationis geometricæ dicitur quotus ex antecedenti per consequentem diviso; exponens vero rationis arithmeticæ est differentia consequentis ab antecedenti. Hinc ratio geometrica ad instar fractionis scribitur, arithmetica ad instar subtractionis. Duarum rationum æqualitas *proportio* dicitur, *geometrica* vel *arithmetica* pro rationum ipsarum qualitate. Igitur in omni proportione quatuor quantitates esse debent, et *prima ad secundam esse* dicitur, *ut tertia ad quartam.* Si vero eadem quantitas bis assumatur, ita ut primæ rationis consequens idem sit cum antecedente secundæ, proportio dicitur *continua.* Ita exprimi solet proportio geometrica

$$a.\, b : : c.\, d, \text{ vel } a : b = c : d, \text{ vel } \frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$ arithmetica vero $a - b = c - d$.

II. Si inter duas primas quantitates eadem sit differentia, quæ inter duas ultimas, jam quantitates illæ sunt *arithmetice proportionales*, ut patet ex præcedenti definitione; quare arithmetice proportionales sunt numeri 3, 7, 12, 16; atque etiam quantitates a, a + b, e, e + b. Si autem talis proportio continuetur, ita ut quantitates per eamdem

dem constantem differentiam perpetuo crescant, vel decrescant, jam habetur series, vel *progressio arithmetica*, qualis est ita a, a + b, a + 2b, a + 3b, cet. vel hæc alia x, x — b, x — 2b, cet, aut etiam in numeris 1, 2, 3, 4, 5, cet. et 10, 7, 4, 1, — 2, — 5, — 8, cet. Ex ipsa proportionis arithmeticæ natura evidens est, summam extremorum terminorum æqualem esse summæ mediorum. Ita in proportione arithmetica a — (a + b) = e — (e + b) manifestum est, summam extremorum a + e + b, æqualem esse summæ mediorum a + b + e. Hinc datis tribus quantitatibus, facile invenietur quarta arithmetice proportionalis: addantur scilicet secunda, et tertia, atque ex summa auferatur prima, differentia erit quartus terminus arithmetice proportionalis, ut patet.

Inde etiam colligitur, in progressione qualibet arithmetica, summam duorum extremorum æqualem esse summæ duorum quorumlibet terminorum ab extremis æque distantium. Sint priores termini a, a + b, a + 2b, cet. sitque ultimus terminus x, erit penultimus x - b, antepenultimus x — 2b, cet. Jam comparentur inter se termini, qui ab extremis æque distant in hunc modum.

a

$$\begin{array}{l} a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ \text{cet.} \\ x,\ x-b,\ x-2b,\ x-3b,\ x-4b,\ \text{cet.} \\ \hline a+x,\ a+x,\ a+x,\ a+x,\ \text{cet.} \end{array}$$

Si nempe singuli termini correspondentes, et qui ab extremis æqualiter distant, sibi invicem addantur, habebitur semper $a + x$, hoc est, summa primi termini a, et ultimi x, atque hinc etiam evidens est, summam omnium terminorum in progressione arithmetica æqualem esse producto ex summa primi, et ultimi in dimidium terminorum numerum. Ita si numerus terminorum dicatur n, erit omnium summa $\overline{a + x} \times \frac{n}{2}$.

IV. Cum differentia communis terminorum in progressione arithmetica primum terminum non afficiat; patet, hujus differentiæ coefficientem in quolibet dato termino æqualem esse numero terminorum, qui terminum datum præcedunt. Quare in ultimo termino x habebitur $\overline{n - 1} \times b$; nempe $x = a + \overline{n - 1} \times b$. Igitur cum omnium terminorum summa sit $\overline{a + x} \times \frac{n}{2}$, ea quoque invenitur $= \frac{2an + bn^2 - bn}{2}$

$= \frac{(2a + bn - b) \times n}{2}$. E. G. Series arithmetica $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, cet. ad 100 terminos producta $= = \frac{2 \times 100 + 10000 - 100}{2} = 5050$. At si progressionis primus terminus fuerit o, erit progressionis summa æqualis dimidio producto ex ultimo termino in numerum terminorum. Nam in hoc casu cum sit $a = 0$, summa terminorum, quæ generatim exprimitur per $\overline{a + x} \times \frac{n}{2}$ in hanc abit $\frac{nx}{2}$. Unde patet, summam numeri cujuslibet terminorum in progressione arithmetica, cujus primus terminus est o, æqualem esse dimidio producto ex terminorum numero in terminum maximum. E. G. Progressio Arithmetica.

$$\frac{0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 9+9+9+9+9+9+9+9+9+9 =}{2}$$

$$\frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

IV. Si quotus ex duabus primis quantitatibus, æqualis sit quoto ex duabus ultimis, quatuor illæ quantitates sunt *geometricæ proportionales*, ut patet ex præcedenti definitione. Tales sunt numeri 2, 6, 3, 12, et quantitates a, ar, b, br. Ex ipsa proportionis geometricæ natura evidens est, productum ex terminis extremis æquale esse producto ex mediis; sic a $\times$ br $=$ ar $\times$ b, ut patet. Quare datis tribus terminis facile invenitur quartus geometricæ proportionalis: multiplicando scilicet duos medios terminos, productumque dividendo per primum; quotus erit quartus terminus quæsitus; ita datis tribus quantitatibus a, ar, b, invenitur quarta $\frac{ar \times b}{a} =$. At si proportio sit continua, ita ut secunda quantitas sit primæ rationis consequens, et simul secundæ rationis antecedens, simili ratiocinatione patet, sumendum esse hujus quantitatis quadratum, illudque per primam quantitatem esse dividendum. Hæc autem quantitas, quæ antecedentis, et consequentis vices gerit; vocatur *media proportionalis*, talisque proportio ita exprimitur ∷ a. b. c, nempe hoc scribendi modo significatur, b esse mediam proportionalem. At media proportionalis arithmetica ita designatur ÷ a. b. c.

Pa-

Patet autem, in hac proportione, summam extremorum æqualem esse termino medio bis sumpto.

Ex demonstratis de proportione geometrica pendet vulgatissima Arithmeticæ operatio, quæ *regula trium*, vel etiam *regula aurea* propter eximiam utilitatem appellari solet. Per hanc regulam, datis tribus terminis, invenitur quartus proportionalis. In hac autem operatione probe observari debet terminorum ordo. Et primo quidem consideranda est quantitas, quæ est ejusdem generis cum quantitate quæsita. Ex quæstionis natura intelligitur, an quantitas data sit major, vel minor quantitæ quæsita; si major sit, jam maxima ex aliis duabus quantitatibus in terminorum ordine ad sinistram scribi debet; at si minor sit, tunc duarum aliarum quantitatum minima ad sinistram, alia autem ad dexteram collocari debet. Constituto autem convenienti terminorum ordine; jam ex præscripto regulæ, productum ex secundo termino in tertium, per primum terminum dividi debet. Tota res exemplo perspicua fiet. Hæc proponatur quæstio. Si triginta operarii dierum 12 spatio, opus aliquod absolvant; quæritur necessarius operariorum numerus, ut idem opus 18 diebus absolvatur. Quoniam quæritur operariorum numerus, primum considerandus est

nu-

numerus 30; statim autem vides, numerum illum datum majorem esse numero quæsito; quare numerus 18 ad sinistram collocari debet, numerus autem 12 ad dexteram, atque ita operatio peragitur hoc modo 18; 30 = 12: 30 × 12 = 20.
$$\frac{30 \times 12}{18} = 20.$$

V. Pro varia terminorum ordinatione in proportione geometrica, diversa ab Arithmeticis inventa fuerunt nomina. At ex prima terminorum ordinatione aliæ omnes facile inferuntur. Si primus terminus dicatur esse ad tertium, ut secundus ad quartum, argumentari dicimur *alternando*. Si dicatur secundus ad primum, ut quartus ad tertium, tunc dicitur *invertendo*. Si summa terminorum primi, et secundi refertur ad secundum, ut summa terminorum tertii, et quarti ad quartum, inferre dicimur *componendo*; contra autem *dividendo*, si terminorum primi, et secundi differentia ad secundum referatur, ut differentia tertii, et quarti refertur ad quartum. In his autem omnibus argumentandi modis proportionem manere patet, cum productum extremorum æquale semper inveniatur producto mediorum. Ex eadem productorum æqualitate facile colligitur, rationum compositione, proportionem non mutari. Ratio *composita* ex plu-

pluribus geometricis rationibus illa dicitur, quam habet productum ex earum antecedentibus ad productum ex consequentibus. Sint duæ proportiones $a : b = c : d$ erit

$f : g = m : s$)

$af : bg = cm : ds$. Etenim productum extremorum $afds$ æquale est producto mediorum $bgcm$. Et quidem $a : b = c : d$, ac proinde $ad = bc$. Præterea $f : g = m : s$, ideoque $fs = gm$, ergo $ad \times fs = bc \times gm$. Simili ratione patet $\frac{ad}{fs} = \frac{bc}{gm}$. Atque eadem valet demonstratio, pro alio quolibet proportionum numero. Ratio ex duabus æqualibus composita, dicitur *duplicata*, ex tribus *triplicata*, cet. Hinc ratio geometrica, quam habet quadratum unius quantitatis ad quadratum alterius, est duplicata ejus, quam habent ipsæ quantitates ad invicem; ratio cuborum, triplicata, cet. E contra ratio, quam habent inter se radices quadratæ, cubicæ, cet. dicitur *subduplicata*, *subtriplicata*, cet. rationis potentiarum *respectivarum*. At ratio, quæ intercedit inter radices quadratas cuborum, hoc est ratio $a^{\frac{3}{2}}$ et $b^{\frac{3}{2}}$ dicitur *sesquiplicata*.

Si duæ quantitates ita inter se connexæ sint, ut si una sit dupla, tripla, cet. altera etiam dupla, tripla, cet. evadat, prima dicitur esse in *ratione directa simplici* alterius. At si prima in eadem ratione decrescit, in qua altera augetur, tunc illa esse dicitur in *ratione inversa* sive *reciproca* istius. At si duæ quantitates ita sint invicem connexæ, ut altera crescat in eadem ratione, qua primæ quadratum, aut cubus, cet. tunc illa ad hanc esse dicetur in ratione duplicata, triplicata, cet. At si in eadem ratione una decrescit, qua crescunt alterius quadrata, vel cubi, dicetur esse in ratione hujus *reciproca* duplicata, aut triplicata, cet. Harum rationum frequentissimus usus recurret in Physica.

VI. Ex mediorum, et extremorum producto pendet etiam universa progressionum geometricarum doctrina. In progressione qualibet geometrica, productum ex primo in ultimum terminum, semper æquale est producto ex secundo, et penultimo, aut etiam alteri cuilibet producto ex duobus terminis a primo, et ultimo æqualiter distantibus. Sit progressio a, ar, ar^2, ar^3 in qua communis multiplicator, aut divisor *ratio communis* dici solet, sitque y ultimus terminus; erunt quatuor ultitimi termini y, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{r^2}$, $\frac{y}{r^3}$, ut patet ex natura progressionis geometricæ. Est autem $a \times y = ar \times \frac{y}{r} = ar^2 \times \frac{y}{r^2} = \frac{ar^3 \times y}{r^3}$ cet. Præterea summa progressionis geometricæ, dempto primo termino, æqualis est summæ omnium terminorum, dempto ultimo per communem rationem multiplicato. Nam $ar + ar^2 + ar^3 +$ cet. $+ \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r} + y = r \times a + ar + ar^2$ cet. $+ \frac{y}{r^4} + \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r}$. Quare si progressionis summa dicatur s; erit $s - a = \overline{s - y} \times r$, hoc est $s - a = sr - yr$, vel $sr = y - a$, et $s = \frac{yr - a}{r - 1}$.

 Quam-

Quamvis autem ex arithmeticarum operationum natura facile pateat, qua ratione ad hunc ultimum valorem perveniatur; res tamen magis fiet manifesta ex apendice, quam de æquationibus mox adjungemus. Porro cum exponens ipsius r ab ipso secundo termino perpetuo crescat, si numerus terminorum dicatur n, erit $n-1$ exponens ipsius r in ultimo termino; ac proinde $y = ar^{n-1}$, et $yr = ar^{n-1+1} = ar^{n}$, et $s = \frac{yr-a}{r-1} = \frac{ar^{n}-a}{r-1}$. Quare datis in progressione geometrica primo termino, terminorum numero, et communi ratione; facile invenietur omnium terminorum summa. Si invenienda sit summa seriei decrescentis $y + \frac{y}{r} + \frac{y}{r^2} + \text{cet.} + ar^3 + ar^2 + ar + a$ posito terminorum numero infinito, ultimus terminus a fit $= 0$. Cum enim n sit infinitus, ac proinde et infinitus^{n-1}; erit $a = \frac{y}{r^{n-1}} = 0$. Quare summa ma talis seriei est $s = \frac{yr}{r-1}$ quæ est summa finita, quamvis numerus terminorum sit infinitus; ita series infinita est $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} +$ cet. $= 2$.

Schol. Ad progressiones arithmeticas et geometricas refertur logarithmorum doctrina, maximæ quidem utilitatis in Physica sublimiori, sed rem breviter attingere nobis erit. Progresio quælibet geometrica hac formula potest repræsentari ∺ $aq^0 . aq^1 . aq^2 . aq^3 . aq^4 . aq^5$. cet. in qua a, et q exprimunt numeros quoslibet. Quare si fiat $a = 1$, præcedens series abit in hanc ∺ $q^0 . q^1 . q^2 . q^3 . q^4 . q^5$. cet. Inde autem duo colliguntur; 1. Productum ex duobus quibuscumque hujus progressionis terminis pro exponente habet ipsorum exponentium summam. Ita productum ex $q^4 \times q^5 = q$. Quare si inveniendus proponatur in hac progressione terminus, qui sit duorum aliorum producto æqualis; quæratur terminus, cujus exponens est ipsa duorum exponentium summa. . . 2^0 . Quotus ex duobus terminis emergens, ipse est terminus, cujus exponens est ipsa exponentium differentia. Ita si dividatur q^2 per q^3, quotus est $q^{2-3} = q^{-1}$. Quare si inveniendus proponatur terminus duorum aliorum quoto æqualis, quæratur terminus, cujus exponens æqualis est exponentium differentiæ.

Numeri alicujus *Logarithmus* appellatur exponens potestatis numeri denarii, qui sit numero dato æqualis. Ita si habeatur progressio geometrica ∺ 10^0 . 10^1 . 10^2 . 10^3. 10^4 . cet. et infra scribantur eorumdem terminorum valores ∺ 10. 100. 1000. 10000. cet. exponens 0 est logarithmus unitatis, exponens 1 est logarithmus numeri 10, et ita deinceps. Sed quia exponentes illi exhibent dumtaxat logarithmos numerorum integrorum in progressione decupla 1, 10, 100, 1000, cet., necessum est præterea, haberi logarithmos numerorum intermediorum 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, cet. quare exponentibus præcedentibus, additæ fuerunt decimales septem hoc modo. ∺

10°

$10^{0,0000000}$. $10^{1,0000000}$. $10^{2,0000000}$. $10^{3,0000000}$. cet. Jam vero quia exponentes illi, semper sunt in progressione arithmetica, ex dictis evidens est, valores numeri denarii ad illas potestates evecti, quarum indices sunt iidem exponentes, perpetuo manere in progressione geometrica, atque eosdem exponentes esse horum numerorum logarithmos. Quare si continuo augeantur decimales illæ fractiones $\frac{1}{10000000}$ vel, quod idem est, si inter singulos primæ progressionis exponentes inferantur termini medii arithmetice proportionales 9999999, habetur nona progressio geometrica hoc modo ∷ $10^{0.000000}$. $10^{0.0000001}$. $10^{0.0000002}$. $10^{0.0000003}$, cet. in qua quidem progressione observandum est, numeros lentissime crescere, cum primus terminus sit 1, et 1000000, 2us sit 10. Erit ergo terminus aliquis intermedius $=$ 2, vel 3, vel 4, cet. Ita 2 inventus est $=$ termino $10^{0.3010300}$; 3 $=$ $10^{0.4771213}$; 4 $=$ $10^{0.6020600}$. Quare exponentes illi sunt logarithmi numerorum 2, 3, 4, cet.

Ex his principiis pendent vulgarium logarithmorum tabulæ ab 1 usque ad 100000, hæ autem, majoribus numeris inveniendis inserviunt. Aliquæ accuratiores tabulæ logarithmos exibent ex decem, imo et quindecim decimalibus constantes; sed ut plurimum septem sufficiunt, atque etiam quinque primæ decimales, dumtaxat aliquando adhiberi solent. Ex hactenus demonstratis, et ex logarithmorum tabulis evidens est, logarithmos numerorum inter 1, et 10 incipere à 0; logarithmos numerorum inter 10, et 100 incipere ab 1, logarithmos numerorum inter 100, et 1000 incipere à 2; et ita deinceps. Primus ille terminus, qui est integer numerus exponentis, dici solet logarithmi *characteristica*, quo nomine appellatus fuit, quia indicat, quot notas contineat numerus dato logarithmo respondens. Manifestum enim est, numerum illum tot notas continere, quot unitates habet characteristica unitate aucta. Ita logarithmo 4, 8145605 respondet numerus quinque constans notis, cum characteristica sit 4.

Commodissimæ sane sunt logarithmorum tabulæ. Etenim cum demonstratum sit, productum ex duobus numeris logarithmorum summæ respondere, eorum vero differentiæ respondere numerorum quotum, per solam additionem, et subtractionem compen-

dio-

diose absolvi possunt multiplicatio, et divisio. Sumantur datorum numerorum logarithmi, simulque addantur, numerus summæ respondens in logarithmorum tabulis, erit producti logarithmus; contra autem logarithmorum differentia erit logarithmus quoti, ac proinde inveniuntur numeri quæsiti. Simili ratione patet, numerum quemlibet ad datam potestatem evehi, si toties sumatur numeri dati logarithmus, quoties per seipsum numerus multiplicandus proponitur: hoc est, logarithmus per exponentem potestatis multiplicari debet, et productum erit quæsiti numeri logarithmus. Contra autem si numeri dati logarithmus per exponentem radicis dividatur, quotus erit quæsitæ radicis logarithmus. Quamvis autem eam dumtaxat explicaverim logarithmorum formam, in qua logarithmus unitatis constituitur = 0; multipliciter tamen variari possunt logarithmi. Etenim si duæ sint progressiones, quarum altera geometrica sit, altera arithmetica, et sub singulis primi terminis singuli secundæ scribantur, undecumque initium fiat, hi dicuntur illorum logarithmi. Sic termini progressionis inferioris sunt logarithmi superioris. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16. 32, cet. —4. —2. 0. 2. 4. 6. 8. 10. 12.

12. 14, cet. Semel autem constituta progressione geometrica cum suis logarithmis, utramque seriem licebit interjectis quotcumque terminis augere ; si inter duos quoslibet progressionis geometrice terminos medium geometrice proportionale, et inter duos eorum logarithmos medium arithmetice proportionale constituas. Sic inter 2, et 4 medium proportionale est $\sqrt{2 = 4} = \sqrt{8} = 2.289$, cet. cujus logarithmus est $\frac{6+8}{2} =$ 7. Et eadem methodo semper inveniri poterunt infiniti alii logarithmi numerorum, qui vel integri sint, vel ex integris, et fractis compositi, medios terminos inter duos proximos semper inquirendo. Aliud exemplum in vulgaribus logarithmorum tabulis proponemus. Ut haberetur Log. 9. quæsitus est medius proportionalis inter 1, et 10, sive inter 1. 0000000. et 10. 0000000, extrahendo ex 10. 0, cet. radicem quadratam veræ proximam 3. 1622777, cujus logarithmus est dimidius Log. 10. Et iste quidem numerus major est aliquanto, quam 3, sed longe distat à 9. Itaque inter eum, et 10. 0, cet. terum quæsitus est medius proportionalis, extrahendo radicem numeri, qui oritur ducendo 10. 00, cet. in 3. 16, cet. et inventa est

est radix veræ quam proxima 5. 6234132. Hic numerus paulo major est, quam 5, et ejus logarithmus habetur, si summa logarithmorum 10. 00, cet. et 3. 16, cet. bifariam dividatur. Sic continua investigatione mediorum proportionalium inter duos numeros, qui sint proxime majores, vel minores, quam 9, devenitur tandem ad numerum, qui ne una quidem millionesima differat à 9, ejusque logarithmus numero 9 attribuitur. Hoc artificio, et patientissimo multorum annorum labore supputatæ sunt logarithmorum tabulæ. Ceterum in tabulis supputandis necesse non est, eam, quam demonstravimus, methodum adhibere, nisi in numeris, qui dicuntur *primi*. Nam in numeris, qui ex aliorum multiplicatione producuntur, satis est logarithmos coefficientium addere, ut habeatur logarithmus producti. Sic Log. 15. $=$ Log. 3. $+$ Log. 5, et Log. 27. $=$ Log. 2. $+$ Log. 9.

AP-

APPENDIX.

De Æquationibus.

I. ÆQuatio dicitur propositio duarum quantitatum æqualitatem affirmans, interposito æqualitatis signo $=$. Æquatio valorem quantitatis alicujus repræsentat, si ex una æquationis parte habeatur quantitas sola quæsita, in parte autem altera occurrant quantitates, quæ omnes sint cognitæ. Ita si habeatur $x = \frac{4 \times 6}{3} = 8$, notus est valor ipsius x. Itaque in omni resolvenda æquatione, id curandum est, ut nempe quantitas, cujus valor quæritur, in una æquationis parte sola contineatur, pars autem altera, solas quantitates cognitas contineat. In hac autem appendice duplex dumtaxat æquationum genus considerabimus, eas scilicet, in quibus quantitas incognita vel unius est dimensionis, seu primi gradus, vel ad secundam dimensionem, seu secundum gradum evehitur. Quod primi gradus æquationes spectat, totum artificium regulis quibusdam explicabimus, variisque numeris distinguemus. 1°. Ex una æqua-

æquationis parte in alteram transfertur quantitas aliqua, facta signorum permutatione, ut in hoc exemplo: $5x + 50 = 4x + 56$; $5x - 4x = 56 - 50$, et $x = 6$. 2°. Si quantitas incognita quantitatibus aliis per multiplicationem, aut divisionem permixta sit, ab iis liberari debet in primo casu per divisionem, in casu altero per multiplicationem. Sit $3x + 12 = 27$, erit $3x = 27 - 12 = 15$, et $x = \frac{15}{3} = 5$. Sit autem $\frac{x}{5} + 4 = 10$; erit $x + 20 = 50$, et $x \times 6 = 50 - 20 = 30$. 3°. Proportio quælibet geometrica converti potest in æquationem, facta extremorum, et mediorum multiplicatione. Sit $12 - x : \frac{x}{2} = 4 : 1$, erit $12 - x = 2x$; quare $3x = 12$, et $x = 4$. Simili ratione proportio arithmetica in æqu[illegible]ione[illegible] per additionem mutari pot[illegible] ° Loco [illegible]uantitatis cujuslibet in æquatione, [illegible]ita eju[illegible]em valoris substitui potest. [illegible] $3x$ [illegible] y [illegible] $= 24$, et $y = 9$, erit $3x + 9 = 24$, $x = \frac{24-9}{3}$ =

$= 5$. 5°. Si pars æquationis quatitatem quæsitam continens, signo aliquo radicali afficiatur, delendum est signum radicale, et altera pars æquationis ad eam evehi debet potestatem, quam indicat ipsum signum radicale. Sit $\sqrt{\overline{ax + b^2}} - c = d$, erit $\sqrt{\overline{ax + b^2}} = c + d$, et $ax + b^2 = d^2 + 2cd + c^2$; quare $x = \frac{d^2 + 2cd + c^2 - b^2}{a}$

II. His præmissis permutationum regulis, quæ ex antea demonstratis facile intelliguntur, jam pioblema aliquod unius dimensionis solvendum ponemus. Et primo quidem, quæstionis propositæ distincta habeatur notio, et singulæ conditiones attente considerentur. Si alicujus problematis conditiones ita exprimantur, ut tot habeantur incognitæ, quot æquationes, poterit semper deveniri ad unicam æquationem, quæ unicam incognitam habeat. Nam sint E. G. 20 æquationes, et totidem incognitæ; poterit conferendo primam cum secunda, eliminari per regulas præscriptas una ex iis incognitis, inveniendo novam æquationem, quæ illa careat, tum idem præstari poterit conferendo primam cum tertia, et ita porro, ac habebuntur jam novem æquationes

nes cum novem incognitis, quæ eodem artificio ad octo reduci poterunt cum octo incognitis; et ita porro, donec perveniatur ad unicam æquationem cum unica incognita. Hinc si habeantur tot æquationes, quo incognitæ, problema dicitur *determinatum*; et unicam, vel finitas numero solutiones admittit. Si fuerint plures incognitæ, quam æquationes, problema dicitur *indeterminatum*, et solutiones habet infinitas: Æquatio

$$3x + \frac{1}{2}x = 20$$ est æquatio determinata,

sed $x+y=12$ est indeterminata; etenim si ponatur $x=1$, et $y=11$, vel $x=2$, et $y=10$, et ita porro, semper inveniatur $x+y=12$, ita ut infiniti sint valores, qui pro x et y positi numerum datum restituant. Regulas hactenus explicatas ad facile exemplum transferamus. Mercator quidam nummos quotannis triente adauget, demptis 100 nummis, quos annuatim impendit in sumptus, et post tres annos sit duplo ditior, quæruntur nummi. In hoc problemate plures latent conditiones sic evolvendæ, et enuntiandæ. Quantitates incognitæ ultimis alphabeti litteris designari solent. Itaque mercator habet certam nummorum summam.

An-

Anno primo expendit nummos 100. Ergo.	x $x-100$
Reliquum adauget triente, quare	$x-100+\frac{x-100}{3}=\frac{4x-400}{3}$
Anno secundo expendit nummos 100. Ergo.	$\frac{4x-400-100}{3}=\frac{4x-700}{3}$
Reliquum adauget triente. Quare.	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=\frac{16x-2800}{9}$
Anno tertio expendit 100. Ergo.	$\frac{16x-2800-100}{9}=\frac{16x-3700}{9}$
Reliquum adauget triente. Quare	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{6x-3700}{27}=\frac{64x-14800}{27}$
Tandem sit duplo ditior. Ergo.	$\frac{64x-14800}{27}=2x,$

Quæstio itaque ad æquationem reducitur, ex qua erui debent x. Utramque æquationis partem multiplica per 27, productum erit $64x-14800=54x$; auferas $54x$, residuum est $10x-14800=0$, seu $10x=14800$; dividas per 10, habetur $x=1480$.

Qua-

Quare habentur nummi sub intio, et ipsum lucrum.

III. Si in aliquo solvendo problemate perveniatur ad æquationem, quæ ipsum quantitatis incognitæ quadratum, et præterea productum ex ipsa quantitate incognita in aliquam datam quantitatem involvat, hæc æquatio dicitur *secundi gradus*, vel *quadratica*. In talibus autem æquationibus, hac regula utendum est. Singulos æquationis terminos, qui incognitam quantitatem continent, ad unam partem transferas, ita ut singuli termini cogniti ex parte altera maneant. Si quantitatis incognitæ quadratum coefficiente aliquo afficiatur, per hunc coefficientem singuli æquationis termini dividantur. Tandem dimidii coefficientis, quantitati incognitæ præfixi sumatur quadratum, quod ex utraque parte addatur. Jam pars æquationis, quæ incognitam quantitatem continet, ad perfectum quadratum reducta habebitur; ex qua proinde radix quadrata extrahi poterit, et deinde per regulas præscriptas, quantitatis incognitæ valor erve-tur. Ponamus $y^2 + ay = b$: addatur hinc, et inde quadratum dimidii coefficientis a; erit $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 = b + \frac{1}{4}a^2$;

extractaque radice fiet $y + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$, et tandem $y = \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} - \frac{a}{2}$. Diligenter observandum est, radici quadratæ præfixum fuisse signum $\pm$ hoc est $+$, vel $-$. Etenim radix quadrata cujuslibet quantitatis, ut a^2, potest esse $+ a$, vel $- a$, ideoque $y + \frac{1}{2} = + \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, vel $- \sqrt{b + \frac{1}{2}a^2}$ cum $- \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} \times - \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$ restituat quadratum $b + \frac{a^2}{4}$; non secus ac facit $+ \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} \times +$

b

$\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$. Quare æquationes quadraticæ duas admittunt solutiones. Sic in præsenti exemplo duo sunt valores radicis y, unus nempe $+ = \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$; alter autem

$y = -\sqrt{b + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}$. At quoniam positiva sunt omnium quantitatum quadrata, hinc patet, quantitatis negativæ radicem esse impossibilem; seu assignari non posse, quæ ideo dicitur *imaginaria*. Aliquando contingit, æquationes nullam solutionem admittere. Exemplo sit $y^2 - a\ y - 3a^2 = = 0$; erit $y^2 - ay = - 3a^2$ et $y^2 - ay = \frac{a^2}{4}$

$= = - 3a^2 = \frac{a^2}{4} = \pm \sqrt{\frac{11a^2}{4}}$; extrac-

 ta-

taque radice habebitur $y - \frac{a}{2} = \pm \sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$, et $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$. Ex quibus manifestum est, duos valores radicis y esse imaginarios, cum assignari non possit radix quantitatis $-\frac{11a^2}{4}$. Si ergo in solutione problematum deveniatur ad quantitates imaginarias, signum est admodum manifestum, vel problema esse impossibile, vel adibitam esse methodum, quæ aliquid impossibile involvit, prorsus ut fit in argumentatione, dum res ad absurdum reducitur.

IV. Radices imaginariæ, quæ eamdem sub signo radicali quantitatem habent, ut $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-a}$, per multiplicationem efficere possunt productum reale, in quo nullum supersit signum radicale, dummodo radices illæ numero pari semper multiplicentur. Etenim evanescere non potest signum radicale, nisi terminum hoc signo affectus multiplicetur per alium terminum, qui idem signum radicale habeat, et eam-

dem

dem quantitatem signo inclusam. Jam vero ita sublato signo radicali, si productum ex prima multiplicatione per idem signum radicale multiplicetur, novum productum afficietur quoque signo radicali; at si rursus multiplicetur per idem signum radicale, iterum evanescet signum radicale, et ita deinceps. Si polynomii terminus aliquis contineat radicem imaginariam, quale est polynomium $x - a - \sqrt{-b}$, evanescere non potest signum radicale, nisi polynomium datum multiplicetur per aliud, quod a primo differat, tantum quoad signum vinculo radicali præfixum. Ita in polynomio proposito solum productum ex $x - a - \sqrt{-b}$ in $x - a + \sqrt{-b}$ delere potest signum radicale, factaque multiplicatione habetur $xx - 2ax + aa + b$; in hoc enim solo casu producta singula ex uno quoque termino reali $\sqrt{-b}$ sese mutuo signis contrariis elidunt, atque hinc patet, terminum b, qui continet productum ex duobus radicalibus $+ \sqrt{-b} \times - \sqrt{-b}$, esse necessario positivum. Itaque quantitatum imaginarium frequens usus occurrere potest; ipsa enim impossibilitas non solum per multiplicationem aliquando tollitur, sed etiam summa binarum quantitatum, quæ ex realibus, et imaginariis sunt mixtæ, realis esse potest; ita quantitatum $3+\sqrt{-1}$, et $8-\sqrt{-1}$ summa est realis, nimirum 11, atque etiam realis est differentia, nempe 5.

V. Æquationes omnes secundi gradus repræsentari solent hac formula $x^2 - px = q$, in qua p, et q designant quantitates quaslibet vel positivas, vel negativas. Inde autem statim concluditur $x - \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$.

Hinc autem difficultates aliquæ suboriri possent ex præcedentibus facile explicandæ. Quæri etenim potest, cur quantitas positiva $x - \frac{p}{2}$ æqualis fiat negativæ $-\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$.

Re quidem vera duo quadrata æqualia præbent æquales radices, sed radices illæ ejusdem signi esse debent. Etenim ex eo, quod $4 = 4$, concludi non potest $2 = -2$.

Præterea $\frac{p}{2} - x$ tam est radix ipsius $xx - px + \frac{pp}{4}$, quam $x - \frac{p}{2}$. Quare scribenbendum videretur $+ x \pm \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Has difficultates facile solvemus, si observetur, hanc ultimam æquationem in quatuor sequentes resolvi posse, $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$, $x - \frac{p}{2} = - \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; $\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; $\frac{p}{2} - x = - \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Duæ ultimæ æquationes conveniunt omnino cum duabus primis; quare satis est duplex signum $\pm$ in una æquationis generalis parte adhibere, ut fieri solet. Præterea æquationis resolutio hoc modo institui posset. Radix quadrata æquationis $xx - px + \frac{pp}{5}$ est $x - \frac{p}{2}$, si x sit major quam $\frac{p}{2}$; fitque $\frac{p}{2} - x$, si x fit minor, quam $\frac{p}{2}$. In 1°. casu ha-

habetur $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$: in altero autem erit $\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hi ergo sunt duo casus distincte expressi, qui duplici signo in formula generali *implicite*, et obscure enunciantur hoc modo $x - \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Si haberetur $xx + px = q$, per ratiocinationem præcedentem invenitur $x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$, sola nempe radix positiva; tum vero inutilis est radix negativa, cum problematis solutionem non præbeat. Hæc tamen radix haberetur quoque, mutata æquatione per regulas explicatas: prodiret nempe $xx - px = q^2$ et $\frac{p}{2} - x$,

vel

vel $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hac igitur methodo radices positivas necessarias, a superfluis, veras a falsis separare liceret.

Æquationum quadraticarum doctrinam facili exemplo illustrabimus. Itaque hoc sit problema, invenire scilicet in linea, duo quæcumque luminaria conjungente, punctum tale, ut luminaria illa ex hoc puncto, æquali luce fulgeant. Distantia inter duo luminaria dicatur a, sitque illuminationis ratio, ut m ad n; præterea dicatur x distantia minoris luminaris a puncto quæsito; erit distantia luminaris alterius ab eodem puncto $a - x$. Jam ponatur, luminarium effectus, seu lucis intensitatem esse in ratione reciproca duplicata distantiarum a puncto lucido, ut vulgo statuitur a Physicis; sumptis distantiarum quadratis, erunt intensitates lucis ut $\frac{1}{xx}$ et $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$. Res ita se haberet, si æqualia forent luminaria. At quia (ex hypoth.) lucis quantitates absolutæ sunt, ut m ad n; erunt luminarium effectus, ut $\frac{m}{xx}$ ad $\frac{n}{xx - 2ax + aa}$. Itaque

ut

ut habeatur punctum quæsitum, instituenda est æquatio inter $\frac{m}{xx}$ et $\frac{n}{xx-2ax+a}$ ex qua per reductionum regulas, ervitur $xx + \frac{2amx}{n-m} = \frac{aam}{n-m}$, addito, ut moris est, dimidii coefficientis quadrato, habetur $x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{aamm}{(n\ m)^2} = \frac{aam}{n\ m} + \frac{aamm}{(n\ m)^2}$.

Hujus æquationis radices duæ sequenti formula exprimuntur, ut patet, nempe $x = \frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m} \sqrt{\left(\frac{mn}{n-m}\right)}$, vel $x = \frac{a}{n-m} \times -m \pm \sqrt{mn})$. Ex his evidens est, unius radicis valorem esse negativum, alterius autem positivum. Etenim si quantitas radicalis signo $-$ afficiatur, jam quantitas tota fit negativa; si autem afficiatur signo positivo $+$, jam quantitas $-m + \sqrt{mn}$ erit positiva, cum sit (ex hypoth.) n major, quam m; ideoque $\sqrt{mn}$ major quam m.

Superest ut radicis negativæ usum explicemus. In memoriam revocanda sunt, quæ de quantitatibus negativis jam dicta sunt, sci-

scilicet quantitates negativas secundum directionem positivis oppositam sumendas esse. In præsenti problemate quantitatis x valor negativus, facile intelligetur, si observabimus, punctum quæsitum, à nobis considerari tamquam inter duo luminaria constitutum. At si attendatur ad alterius casus possibilitatem, ponendo nempe punctum quæsitum in linea producta ultra luminaria, jam valor radicis prodit positivus. Et quidem si distantia puncti a minori luminari dicatur x, ut ante, erit luminaris majoris distantia $a + x$; quadrata autem distantiarum erunt xx, et $aa + 2ax + xx$, quæ per conditiones problematis in æquationem reducta præbent $maa + 2amx + mxx = nxx$; resoluta æquatione habetur $x =$

$$\overline{\frac{a \times m}{n-m} \pm \sqrt{mn}}\text{, valor } a\,\frac{\overline{\times m + \sqrt{mn}}}{n-m} \text{ erit}$$

positivus, hicque solus problemati satisfaciet in casu proposito. Alter autem valor

negativus $a\,\frac{\overline{\times m - \sqrt{mn}}}{n-m}$ significat, sumendam esse directionem oppositam, punctumque non in linea producta ultra luminaria, sed

sed in ipsa linea jungente constituendum esse. Problema ad casum particularem transferamus. Ponatur $n = 4m$: præcedens formula $x = \frac{a}{n-m} \times (-m \mp \sqrt{mn})$ in hanc abit $x = \frac{a}{3} \times (-1 \pm 2)$. Quare duplex valor radicis x erit $+\frac{1}{3}a$ et $-\frac{1}{3}a$, qui quidem duo valores determinant puncta duo, quæ problemati æque satisfaciunt. Punctum unum locatur inter duo luminaria, illiusque distantia à lumine vividiori duplo major erit, quam à debiliori. Punctum alterum constituetur in linea producta, illiusque à lumine debiliori distantia æqualis erit ipsi luminarium distantiæ. Facile autem sine ullo Algebræ auxilio intelligitur, utrumque punctum problemati satisfacere; cum duo illa puncta lumini debiliori duplo proximiora sint, quam vividiori, quæ vim habent quadruplo majorem. Hoc exemplo illustrantur, quæ de quantitatibus negativis breviter antea attigimus. Hæc sunt Arithmeticæ, et Algebræ elementa brevissima quidem, sed tamen rerum varietate copiosa, quantum ad nostras Institutiones Physicas satis esse judicavimus.

FINIS.

ELEMENTA GEOMETRIÆ

PROOEMIUM.

De definitione, et divisione Geometriæ.

I. G*Eometria* est scientia magnitudinum, *solidorum* nempe, *superficierum*, et *linearum*. Solidum est magnitudo in longum, latum, et profundum extensa. Quamvis autem nihil sit in rerum natura continuum, quod tres illas dimensiones simul non habeat; illæ tamen seorsim considerari possunt, vel etiam duas tantum concipere possumus, de tertia minime cogitantes; atque hinc intelligitur notio superficiei, et lineæ. Superficies est magnitudo tantum in longum, et latum extensa. Linea autem est magnitudo extensa tantum in longum. Et re quidem ipsa itineris longitudinem nobis repræsentamus, non attenta ejus latitudine: et planitiei latitudinem inteltelligimus, terrarum profunditatem nequaquam considerantes. Denique si concipiamus lineæ terminum, cujus nulla pars sit, nulla extensio, jam terminus ille *punctum* dicitur. Itaque ad explicandam Tyronibus Geometriæ definitionem, id primum ostendi debet, quommodo per varios abstractionis gradus ex corporis *physici*, et prout est in se, consideratione ad corporis *geometrici*, et simpliciter extensi contemplationem perveniamus, ac deinde ad superficiei, et lineæ notionem progrediamur, atque tandem notionem puncti formemus. Neque methodo satis philosophica utuntur, qui statim superficiem definiunt terminum solidi, lineam terminum superficiei, et punctum terminum lineæ. Ex præcedenti definitione nascitur divisio Geometriæ in Geometriam linearum, superficierum, et solidorum. Quare tres erunt Geometriæ sectiones. 1. De lineis. 2. De superficiebus. 3. De solidis. In prima sectione linearum positionem illarumque mutuam relationem expendemus. Porro linearum nomine non solum intelligimus lineam rectam, sed etiam lineam circularem, cujus utilitas est maxima, in consideranda linearum rectarum mutua positione. Quare ad Geometrica Elementa pertinent quoque circuli proprietates. In secunda autem sectione superficierum proprieta-

ta-

tates, et mensuram considerabimus. In tertia tandem sectione proprietates solidorum, illorumque mensuram demonstrabimus. At recta methodus postulat, ut rerum demonstrandarum varietatem in unaquaque sectione variis Capitibus distinguamus.

II. Lineam repræsentare solent Geometræ tamquam genitam motu puncti. Si punctum directionem non mutat, linea hoc motu descripta *recta* dicitur; *curva* autem appellatur, si punctum perpetuo mutet directionem. At fatendum est, ita simplicem esse lineæ rectæ, et curvæ notionem, ut ad clariorem ideam, magisque *elementarem* reduci vix possit. Rectam definiunt alii lineam omnium inter duos terminos ductarum brevissimam. Ceterum inde evidens est, datis in linea recta punctis duobus, datam esse hujus lineæ positionem, ita ut unica dumtaxat recta per hæc duo puncta transire possit. Ex his etiam intelligitur, quid sit superficies plana, scilicet omnium superficierum eosdem terminos habentium brevissima, vel cui linea recta undequaque adaptari potest. Circulus definitur figura plana, unica curva linea comprehensa, quæ *peripheria* dicitur, sive *circumferentia*, ad quam omnes rectæ lineæ à puncto medio, quod *centrum* dicitur, ductæ æquales sunt inter se; circumferentiæ pars quælibet *ar-*

cus

cus vocatur. Linea recta per centrum ducta, et utrinque in peripheria terminata *diameter* dicitur; rectæ autem à centro ad circumferentiam ductæ *semidiametri*, vel *radii* appellantur.

III. *Anguli* notio ope circuli facillime concipitur. Duæ lineæ rectæ in aliquo puncto concurrentes, angulum efficere dicuntur. Angulorum mensura est arcus, quem ipsorum latera comprehendunt, in peripheria circuli ex anguli vertice, tamquam centro, descripti. Porro dum dicitur, anguli mensuram esse arcum circuli, nihil aliud significatur, nisi æquales esse angulos, si æquales sint arcus ex angulorum vertice, et eodem radio descripti. Ita dum dicitur, angulum esse alterius duplum, nihil aliud intelligitur; nisi arcum unum, altero esse duplo majorem. Itaque anguli natura in majori, aut minori inclinatione unius lineæ ad aliam consistit. Igitur angulus cum sit mera linearum inclinatio, et apertura; extensio vel quantitas proprie loquendo dici non potest; ac proinde, abstractione facta ab omni extensionis consideratione, angulum alterius duplum dicere non possumus, cum id dici possit dumtaxat de quantitate, comparata cum alia quantitate homogenea. Quia vero mera linearum apertura partes non habet, angulus non est quantitas proprie dicta; atque hinc

hinc factum est, ut anguli mensuram cum circuli arcu comparaverint Geometræ. Circulus dividi solet in partes æquales 360, quæ *gradus* dicuntur; singuli gradus dividuntur in 60 minuta prima, quodlibet minutum primum dividitur in 60 secunda, et sic in infinitum. Gradus per o designari solent, minuta autem per lineolas numeris superimpositas. Ita si forte occurrant 35^{o}, $25^{\prime}$, $36^{\prime\prime}$, $42^{\prime\prime\prime}$, lege 35 gradus, 25 minuta prima, 36 secunda, 42 tertia.

IV. Ex angulorum notione pendet linearum mutua positio. Linea dicitur alteri lineæ *perpendicularis*, quando in ipsam incidens, facit angulos hinc et inde æquales; angulus hujusmodi dicitur *rectus*. At si recta una super alteram cadens duos angulos efficiat, ita ut unus sit recto major, alter autem minor, primus dicitur *obtusus*, alius autem *acutus*. Si talis sit rectarum positio, ut eandem semper à se invicem servent distantiam, evidens est, nullam esse linearum illarum mutuam inclinationem: ac proinde in infinitum etiam protractæ non concurrent, seu angulum non efficient; tales lineæ dicuntur *parallelæ*.

V. Ex lineæ rectæ definitione evidens est, duas lineas rectas, in unico dumtaxat puncto concurrere posse; cum enim omni careant latitudine, communis intersectio in unico tantum puncto fieri potest. Neque ad aliam deinde intersectionem transire possunt; alterutra enim linea directionem mutaret, ac proinde non forent ambæ rectæ, quod est contra hyp. Id pro axiomate habent Geometræ, et ita exprimi solet: *Duæ rectæ segmentum commune habere, nec spatium claudere possunt.* Itaque tres saltem lineæ requiruntur, ut spatium undique claudatur. Spatium undique clausum *figura* dicitur. *Triangulum* est figura terminata tribus lineiis, quæ ejusdem latera vocantur. Hæc autem latera si fuerint æqualia, triangulum dicitur *æquilaterum*; si duo tantum latera sint æqualia, triangulum vocatur *isosceles*; demum si latera omnia fuerint inæqualia, triangulum *scalenum* dicitur. Rursus autem triangulum ratione angulorum considerari potest; si unum habeat angulum rectum, triangulum *rectangulum* dicitur; *acutangulum*, si omnes habeat angulus acutos, et tandem *obtusangulum*, siangulum obtusum habuerit.

VI. Figura quatuor lateribus terminata, *quadrilaterum* generatim appellatur. Si autem æqualia sint figuræ latera, et ad angulos rectos juncta, *quadratum* dicitur; at simpliter rectangulum vocatur, si latera duo opposita reliquis duobus majora sint, manentibus tamen angulis rectis. *Parallelo-*

logrammum appellatur figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt mutuo parallela, etiamsi anguli lateribus comprehensi non sint recti. Si figura quadrilatera sit æquilatera, non tamen rectangula, *Rhombus* dicitur; et *Rhomboides* vocatur, si latera opposita dumtaxat æqualia habuerit. Tandem quodlibet quadrilaterum ab iis, quæ jam enumeravimus diversum, *Trapezium* appellatur. Sed figura *polygona* dicitur, quæ pluribus, quam quatuor, lateribus terminatur. Si latera fuerint quinque, sex, septem, cet. figura *pentagonum*, *hexagonum*, *heptagonum*, cet. dici solet. Figura autem polygona *regularis* est, quæ æquilatera, et æquiangula est.

VII. Axiomata, et postulata plurima præmittere solent Geometræ, quæ quidem nos omittimus. Quæ enim est axiomatum de toto, et parte utilitas, ut intelligamus, dimidiam lineam tota minorem esse? Ecquis statim non videt, rectam lineam produci posse; circulum dato intervallo posse describi, et reliqua hujusmodi? Verum inter axiomata unum de figurarum *superpositione* legitur, simplicissimum quidem, et in universa Geometria utilissimum, quod sine aliqua explicatione prætermittere nolumus. Dicunt nempe, *ea esse æqualia, quæ sibi mutuo super imposita, perfecto congruunt.*

unt. Principium illud *superpositionis*, non ita crassa intelligendum est, quasi in mutua figurarum applicatione consisteret, non secus, ac artifex mensuram aliquam datæ longitudini applicat; ut inde veram longitudinem concludat: talis demonstrandi ratio minime foret geometrica. In eo positum est prædictum principium, ut figuram alteri impositam imaginemur, et deinde concludamus. 1°. Ex partium datarum æqualitate, ipsam earumdem partium convenientiam, sive *coincidentiam*... 2°. Ex hac coincidentia, ipsam reliquarum partium coincidentiam, ac proinde et perfectam duarum figurarum æqualitatem, et similitudinem. Itaque *superpositionis* principio, intelligenda non est dumtaxat mutua figurarum applicatio, sed partis unius alteri parti impositio, ut deinde figuras illas inter se comparemus. Unde evidens est, idem valere principium ad demonstrandam figurarum inæqualitatem. Ceterum hoc unico principio cum angulorum mensura per arcus circulares conjuncto, demonstrari possunt propositiones omnes, quæ ad elementarem linearum Geometriam pertinent.

SEC.

SECTIO I.

De Geometria linearum.

CAPUT I.

De lineis rectis quoad mutuam positionem consideratis, nullum tamen spatium, seu nullam figuram terminantibus.

PROP. I. *Recta quælibet in rectam cadens vel duos angulos efficit rectos, vel duobus rectis æquales.* Etenim recta insistat perpendicuriter, ut GE, vel oblique, ut RE (Fig. 1.) In 1. casu patet (ex def.) angulos GEF, GEC esse rectos; in casu altero anguli duo CER, REF simul sumpti æquales sunt duobus angulis CEG, GEF, hoc est duobus rectis.

COR. I. Producta linea RE in O, simili ratione patet, angulos FEO, OEC duobus rectis æquales esse; ac proinde duæ rectæ sese invicem secantes efficiunt angulos, quatuor rectis æquales. Jam ex centro E describatur circulus; mensura angulorum quatuor erit integra circuli circumferentia, hoc est gradus 360. Igitur angulus rectus, erit quarta pars circumferentiæ, nempe 90. graduum.

COR. II. Rectæ GH, RO efficiunt angulos GER, HEO, qui dicuntur *ad verticem oppositi*. Illos autem angulos æquales esse, manifestum est, cum sit dimidium peripheriæ RFO æquale dimidio peripheriæ GFH; sublata autem communi parte GO, erunt arcus reliqui GR, HO æquales inter se.

COR. III. Recta GE ad alteram CF perpendicularis est, si pucta duo quælibet G, E. à punctis duobus quibuslibet, ut C, F æqualiter distent, hoc est, si GC = GF, et CE = EF. Etenim puncta duo E et G non magis inclinant versus C, quam versus F; ac proinde, cum duo puncta lineæ rectæ positionem determinent (ex def.), æqualis est rectæ totius GE hinc et inde ad rectam CF inclinatio; ideoque ob angulos utrinque æquales recta GE perpendicularis est ad CF. Patet autem, puncta C et F sumi posse pro arbitrio CE, et EF.

COR. IV. Ex puncto quolibet E in recta CF dato duci potest ad eamdem rectam perpendicularis GE. Etenim centro E, et dato quolibet æquali intervallo Ec, Ef describantur arcus circuli sese invicem secantes in g: recta per g, et E ducta erit perpendicularis quæsita ob distantias gc, gf, et Ec, Ef æquales.

Si

Si punctum h extra rectam CF datum sit, simili ratione ducitur perpendicularis hEf Etenim ex puncto h sumantur æqualia intervalla hc, hf, deinde ex punctis c et ,, tamquam centris, et eodem intervallo describantur arcus circuli se mutuo secantes in g, ducaturque hg, hæc erit perpendicularis ob æquales hc, hf, et gc, gf distantias. Evidens autem est, in utroque casu unicam perpendicularem duci posse. Unica enim est recta transiens per punctum E, vel h, quæ cum recta CF æquales hinc et inde efficiat angulos. Patet autem, lineam perpendicularem esse omnium, quæ ex puncto dato ad lineam datam duci possunt, brevisimam, cum recta perpendicularis non magis pendeat ex una parte, quam ex alia: ac proinde neque ad dexteram declinet, neque ad sinistram, ideoque brevissima est via à puncto dato ad lineam datam. Item evidens est, ex puncto dato ad lineam datam, unicam perpendicularem duci posse.

Eadem omnino est operatio, si recta cf in duas partes æquales dividenda proponatur. Ex punctis c et f tamquam centris, et eodem radio describantur arcus circuli, sese secantes in g; deinde ex iisdem punctis, et sumpto quolibet eodem intervallo describantur arcus, se invicem secantes in h, recta hg dividet cf æqualiter in E, ut patet;

tet ; cum singula puncta rectæ gh æqualiter distent à punctis c et f : ac proinde Ec = Ef.

PROP. II. Si lineæ AB , DC sint parallelæ (Fig. 2.) erit I. *Angulus* OFD , *qui externus dicitur , æqulis angulo* OGB , *qui internus , et oppositus vocatur.* II. *Æquales erunt anguli* BGF , GFC , *qui dicuntur alterni.* III. *Anguli interni , et ad eamdem partem positi* DFG , FGB *æquales erunt duobus rectis.* Cum lineæ parallelæ eodem inter se ubique distent intervallo (ex def.), evidens est , eamdem fore parallelæ utriusque BA , DC inclinationem ad rectam EO, ac proinde angulus OFD æqualis est angulo OGB : quod erat primum. Præterea cum angulus GFC æquetur angulo DFO ad verticem opposito (cor. 2. prop. 1.) ; erunt etiam æquales anguli BGF , GFC : quod erat secundum. Tandem cum anguli OFD, GFD æquentur duobus rectis (prop. 1.) ; æquales itidem erunt duobus rectis DFG, FGB ; quod erat tertium.

Viceversa si angulus OFD æqualis sit interno , et opposito FGB , erit eadem inclinatio rectarum CD , AB ad rectam EO; ac proinde rectæ illæ parallelæ sunt inter se. Rursus si æquales sint anguli alterni BGF, GFC; vel si duobus rectis simul æquales sint interni ad eamdem partem positi

BGF,

BGF, OFD; angulus externus DEO semper æqualis erit angulo interno, et opposito BGF; ac proinde rectæ AB, CD erunt parallelæ. Itaque ex ipsa parallelismi notione, facile colliguntur tres primariæ parallelarum affectiones, necessario nexu inter se conjunctæ, ita ut ex una qualibet inferre liceat, rectas illas esse parallelas. Porro in demonstrandis proprietatibus illis nimis laborare videntur quidam Geometræ.

COR. I. Si duæ rectæ AB, HK parallelæ sint eidem rectæ CD, erunt etiam inter se parallelæ. Etenim inclinatio rectarum KH, BA ad rectam EO eadem erit, ac inclinatio rectæ CD ad eamdem.

COR. II. Si per datum punctum F ducere oporteat rectam CD parallelam rectæ KH; ex quolibet hujus puncto O ducatur recta GFO, et fiat angulus GFD æqualis angulo KOF, descriptis nempe ex punctis O, F, tamquam centris, et eodem radio arcubus æqualibus FM, GN; erit recta FD parallela ipsi KO.

CAPUT II.

De linearum rectarum respectu circuli positione.

PROP. I. *Ducta recta* FM, *ad circumferentium utrinque terminata, quæ chorda dicitur* (Fig. 3.), *recta* EP *ex centro circuli ad chordam perpendiculariter ducta, eamdem secat in duas partes æquales.* Cum enim recta EP e centro ducatur, punctum E æqualiter distat à punctis extremis chordæ F et M (ex defin.). Præterea cum recta EP sit perpendicularis ad chordam, singula alia puncta æqualem habent ab iisdem extremis distantiam (cor. 3. prop. 1.) Quare punctum P, æqualiter etiam distat à punctis F et M.

Et viceversa recta quælibet EP per centrum transiens, et chordam FM æqualiter dividens, eam quoque perpendiculariter secat. Etenim cum recta EP chordam dividat æqualiter, punctum P æqualiter distat ab extremis F et M: quia vero recta EP transit etiam per centrum; punctum E æqualiter distat ab extremis F et M. Quare puncta P et E æqualiter distant à punctis F et M; ac proinde EP perpendicularis est ad FM.

Rur-

Rursus si recta EP perpendicularis sit ad chordam, eamque æqualiter dividat, recta illa transit per centrum. Cum enim chordam dividat æqualiter; punctum P æqualiter distat ab extremis F et M. Præterea cum sit perpendicularis, singula illius puncta æqualiter etiam distant à punctis F et M. Erit ergo centrum E hujus perpendicularis punctum aliquod.

PROP. II. *Si recta* EH *transiens per centrum dividat æqualiter chordam* FM, *æqualiter quoque dividet arcum* FHM. Etenim cum singula puncta rectæ EH æqualiter distent à punctis F et M; æqualis erit puncti H ab extremis F et M distantia. Quare si semicirculus GMH semicirculo GFH imponatur, congruet punctum M cum puncto F, et ob punctum H commune congruent et chordæ HM, FH, et arcus iisdem chordis subtensi.

COR. I. In eodem circulo, vel in circulis æqualibus, chordæ æquales, æqualibus arcubus respondent; inæquales autem, arcubus inæqualibus. Præterea chordæ æquales, æqualiter distant à centro, chordæ autem inæquales distant inæqualiter; quod evidens est, ex *superimpositionis* principio. Nam chorda æqualis cum æquali chorda semper congruet, nec cum chorda inæquali congruere umquam poterit.

COR. II. In eodem semicirculo, vel in se-

semicirculis æqualibus, quo majores sunt, vel minores arcus, eo majores, vel minores sunt chordæ, et centro magis, vel minus proximæ. Viceversa quo majores sunt, vel minores chordæ, et centro magis, vel minus proximæ, eo etiam majores sunt, vel minores arcus subtensi.

COR. III. Ducta chorda FM diametro AB parallela, intercipit æquales arcus AF et BM. Etenim, ceteris manentibus ut ante, arcus AH = arcui BH, et arcus FH = arcui HM: quare demptis arcubus æqualibus, remanet AF = BM. Evidens est, eamdem esse demonstrationem, si parallela NQ ad oppositas diametri partes jaceat; erit nempe arcus FN = arcui MQ.

COR. IV. Si ponatur, rectam NQ motu sibi semper parallelo à centro recedere, donec puncta duo N et Q coeant in G; chorda NQ abit in *tangentem*, quæ nempe circulum in unico puncto tangit; evidens autem est, in hoc etiam casu esse GN = GQ.

COR. V. Ex corollariis præcedentibus patet, qua ratione per tria data puncta, circulus describi possit, dummodo tamen puncta illa in eadem recta non jaceant. Agantur rectæ duæ, quæ jungant tria puncta data, hæ erunt chordæ circuli quæsiti. Quare ductis perpendicularibus, quæ chordas dividant æqualiter, utraque perpendicularis

tran-

transit per centrum; quod proinde erit in communi utriusque perpendicularis intersectione. Simili ratione, dato circuli arcu, centrum invenitur, totaque circumferentia describitur.

COR. VI. Hinc arcus circuli datus, in duos æquales arcus dividi potest. Ducatur enim chorda, arcum datum subtendens, hæcque æqualiter per rectam perpendicularem dividatur; eamdem perpendicularis etiam angulum, quem arcus metitur, æqualiter in duas partes dividet.

SCHOL. Ex hoc corollario patet, facile dividi posse angulum quemlibet in partes 2, 4, 8, 16, 32, et ita deinceps, secundum terminos progressionis geometricæ duplæ: sed per Geometriam elementarem angulus in tres partes æquales dividi non potest: atque hæc est anguli *trisectio* à Geometris per *circinum*, et *regulam*, ut dicunt, hoc est, per lineæ rectæ, et circuli construccionem frustra quæsita. Demonstrant enim Geometræ, problema illud ad tertii gradus æquationem necessario pertinere, quæ quidem æquationes, per solum circulum construi non possunt. Neque ob eamdem rationem per sola Geometriæ elementa, angulus dividi potest in partes 5, 6, 7, 9, cet. Talis enim divisio pro diverso partium æqualium numero ad altiores æquationum gradus

dus assurgit. Id autem, quamvis ad elementa non pertineat, breviter monuisse volumus.

PROP. III. *Radius* EG *in puncto contactus* G *ad tangentem perpendicularis est.* Etenim quoniam tangens circulum in unico puncto tangit (ex cor. 4. prop. 2. hujus), radius EG minima est tangentis à centro distantia, ac proinde ad tangentem perpendicularis (ex def.).

Viceversa recta RT perpendicularis ad extremitatem radii G circulum tangit in unico puncto G. Etenim cum sit EG minima rectæ RT à centro E distantia, alia quælibet puncta rectæ RT magis distant à centro, quam punctum G; ergo singula puncta præter G extra circumferentiam jacent.

COR. I. Recta circumferentiam tangit in unico puncto, cum ex centro E ad rectam datam unica perpendicularis duci possit (cor. 4. prop. 1. cap. 1.).

COR. II. Hinc facile ducitur tangens ad punctum datum G. Ducto scilicet radio EG erectaque in G perpendiculari RT.

COR. III. Ad punctum datum in circumferentia unica tangens duci potest (loc. cit.); ac proinde si per punctum contactus agatur recta quælibet, hæc coincidit cum tangente, vel circumferentiam secat.

COR. IV. Si duo circuli GNA GOQ eandem

dem habent tangentem : recta HG eidem perpendicularis per utriusque centrum, puta E et P, transibit. Jam vero si ducatur ES, jungaturque PS, quæ producta secabit in O circulum GOQ, et in R tangentem RT: erit semper in triangulo ESP latus PS minus duobus reliquis ES, EP (ex defin. lineæ rectæ). Quare cum radii ES, EG æquales sint, erit recta PS minor quam PG, sive PO. Ergo quodlibet punctum S circuli GSF erit intra circulum GOQ; ac propterea illi circuli se mutuo contingent in unico puncto G, in quo scilicet rectam RT tangunt.

SCHOL. Cum inter tangentem, et circulum nulla duci possit linea recta, angulus, quem arcus circuli efficit cum tangente, minor est quolibet rectilineo, licet hic in infinitum minuatur. Hujus propositionis utilitas est in Physica, ubi agitur de divisibilitate in infinitum. Id vero maximam admirationem, concertationesque maximas excitavit: nempe angulus contactus, quem facit arcus cum tangente, ab infinita circulorum serie in infinitas partes dividitur, licet ipse quovis angulo rectilineo minor sit. Hujus autem paradoxi geometrici causam, inde repetunt nonnulli, quod nempe anguli rectilinei natura diversa omnino sit à natura anguli curvilinei, in puncto contactus. Etenim

nim quemadmodum infinitæ lineæ numquam superficiem efficiunt, nec ulla inter has quantitates ratio potest assignari, licet in partes infinitas dividi possint; ita etiam infiniti anguli contactus, quovis rectilineo minores sunt, licet sint divisibiles in infinitum. Verum in hac lite geometrica, *Logomachia* aliqua latere videtur. Si anguli nomine intelligatur portio finita spatii curva, et tangente comprehensi; nullum dubium est, quin spatium illud comparari possit cum portione finita spatii rectarum duarum concursu intercepti. At si anguli rectilinei notio vulgaris adhibeatur, evidens est, notionem illam absolute consideratam angulo contactus convenire non posse, cum in hoc angulo latus unum sit curvilineum. Itaque hujus anguli afferri debet propria definitio, atque hac definitione, quæ arbitraria omnino est, semel constituta, et explicata, iam nihil difficultatis superesse potest. Et re quidem ipsa de solo nomine hic litigari demonstrat summa Geometrarum consensio circa anguli hujus proprietates. Sed quidquid sit, quicumque geometricarum demonstrationum vim percipiet, pro evidenti habebit, angulum contactus, et minorem esse quovis rectilineo, et in infinitos curvilineos dividi pose.

PROP. IV. *Angulus* BAD *tangente* BA, *et* *et chorda* AD *comprehensus habet pro mensura dimidium arcum* AFD. Etenim ducta per centrum C diametro EG chordæ AD parallela (Fig. 4.), ductaque alia diametro fF eidem chordæ perpendiculari; rectus erit angulus BAC tangente, et radio comprehensus (prop. præc.), itemque rectus est angulus FCG, ac proinde utriusque anguli mensura est arcus FG. Sed angulus $BAD = BAC - DAC$, vel $- ACG$ ob parallelas DA, et EG; quare cum ACG pro mensura habeat arcum AG, erit angulus $BAD =$

$$= FAG - AG = FA = \frac{1}{2} AD.$$

PROP. V. *Angulus* CAD (Fig. 5.) *ad circumferentiam habet pro mensura dimidium arcum* CD *lateribus* AC, et AD *interceptum.* Etenim ex anguli vertice A ducatur tangens EB, summa trium angulorum $BAC + CAD$

$$+ DAE = 180 = \frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} CD + \frac{1}{2} DA.$$ Sed angulum BAC metiur $\frac{1}{2}$ AC, et angulus $EAD = \frac{1}{2} AD$ (ex prop. præc.): ergo angulus $CAD = \frac{1}{2} CD$.

COR. I. Angulus DFC ad centrum duplus est anguli DAC ad circumferentiam, eodem arcu CD subtensi.

COR. II. Angulus rectus in circumferentia circuli semicircumferentiam lateribus suis comprehendit, totaque diametro subtenditur. Angulus acutus arcum semicircumferentia minorem, obtusus autem majorem intercipit, uterque chorda subtenditur.

COR. III. Angulus BAD (Fig. 6. 7.) vel intra, vel extra circulum pro mensura habet $\frac{1}{2}$ BD $+ \frac{1}{2}$ CE pro angulo intra circulum, vel $\frac{1}{2}$ BD $- \frac{1}{2}$ EC pro angulo extra. Per E agatur chorda EF (Fig. 6.) rectæ AD parallela; erit angulus BEF $=$ BAD (ob parallelas). Sed mensura anguli BEF est $\frac{1}{2}$ BF, et $\frac{1}{2}$ BF $= \frac{1}{2}$ BD $+ \frac{1}{2}$ DF, et DF $=$ CE (cor. 3. prop. 2.). Ergo $\frac{1}{2}$ BF $= \frac{1}{2}$ BD $+ \frac{1}{2}$ CE.

COR. IV. Angulus bAD (Fig. 7.) tangente

te Ab et secante AD interceptus $= \frac{1}{2}$ Db $- \frac{1}{2}$ bC. Si enim circa punctum A revolvi intelligatur recta AB, donec tangens evadat in b, puncta b et B convenient in b. Simili ratione angulus dAb inter duas tangentes Ad et Ab comprehensus pro mensura habet $\frac{1}{2}$ dFb $- \frac{1}{2}$ dCb.

CAPUT III.

De lineis rectis, quæ spatium claudunt, seu de figurarum rectilinearum proprietatibus.

PROP. I. *In triangulo quolibet summa trium angulorum æqualis est duobus rectis.* Etenim per tres angulorum vertices describatur circulus, (cor. 5. prop. 2. cap. 2), triangulum erit inscriptum circulo, cujus chordæ erunt tria latera; anguli autem habent pro mensura dimidium arcum lateribus oppositis subtensum (prop. 5. cap. 2.) Quare trium angulorum summa æqualis est di-

dimidiæ trium arcuum summæ, hoc est, dimidiæ circumferentiæ, seu gradibus 180.

COR. I. In triangulo unicus esse potest angulus rectus, vel obtusus, reliqui duo sunt acuti. Quare in triangulo rectangulo, angulus acutus est *complementum* alterius ad rectum.

COR. II. Datis duobus angulis in triangulo, datur et tertius, qui est differentia inter datam duorum angulorum summam, et gradus 180. Si autem unicus datus sit angulus, data est reliquorum duorum summa, quæ est *complementum* ad duos rectos, et *supplementum* simpliciter appellari solet.

COR. III. In triangulo quolibet ABC (Fig. 8.) producto latere CB in I, angulus externus ABI æqualis est duobus angulis internis oppositis ACB, CAB. Etenim summa anguli externi ABI, et interni contigui ABC æqualis est duobus rectis (prop. 1. cap. 1.): sed summa trium angulorum ACB, CAB, ABC æqualis etiam est duobus rectis: ergo angulus externus ABI æqualis est duobus internis oppositis ACB, et CAB, dempto scilicet communi angulo ABC.

PROP. II. *In omni triangulo majus latus opponitur majori angulo, minus autem minori: et viceversa angulus major majori lateri, et minor minori opponitur.* Triangulum circuculo inscribatur, majorem angulum metitur arcus major, et majorem arcum subtendit major chorda, et contra (cor. 5. prop. 2. cap. 2.)

COR. I. In triangulum æquilatero singuli anguli æquales sunt inter se, et viceversa si tres anguli sunt æquales inter se, triangulum est æquilaterum. Inscripto enim, ut ante, triangulo in circulo, tria latera æqualia sunt tres æquales circuli chordæ, quæ proinde tres arcus æquales subtendent, ideoque, et tres anguli æquales sunt. Evidens autem est, unumquemque angulum esse tertiam partem grad. 180, hoc est. grad. 60.

COR. II. In triangulo isoscele æquales sunt anguli lateribus æqualibus oppositi; et contra si duo anguli in triangulo æquales sunt, triangulum est isosceles. Patet ut in coroll. præc.

PROP. III. *Si in duobus triangulis tria latera æqualia sint, tota triangula erunt æqualia.* Sit AB = ab, AC = ac, BC = bc (Fig. 9.). Ex punctis A et B tamquam centris, describantur arcus FCG. DCE se invicem secantes in C. Triangulum abc ita imponatur triangulo ABC, ut punctum A conveniat cum a, punctum b cadet etiam in B; ob AB = ab, et ob ac = AC, recta ac terminabitur in aliquo puncto arcus FCG. Similiter ob bc = BC,

 rec-

recta bc terminabitur in aliquo puncto arcus DCE; quia vero rectæ ac, bc se mutuo jungunt in c, utraque terminabitur in puncto intursectionis C. Ergo ac congruet cum AC, bc cum BC, totumque triangulum abc cum triangulo ABC.

COR. I. Si sit angulus A = a, B = b, C = c, et latus AB = ab; erit triangulum ABC = triangulo abc. Latus ab imponatur lateri AB; ob angulum a = A, et b = B, cadet ac in AC, et bc in BC; quare latera duo ac, bc, et AC, BC in eodem puncto jungentur, hoc est, c cadet in C, totumque triangulum abc congruet cum triangulo ABC. Eodem modo computari inter se possunt latera duo ac, AC, quæ respondent angulis æqualibus, et dicuntur *homologa*. Quare æqualia sunt triangula duo, si anguli unius æquales sint angulis alterius; et præterea si triangula latus unum homologum æquale habeant.

COR. II. Si duo triangula latera duo habuerit æqualia, et angulos his lateribus interceptos æquales, tota triangula erunt æqualia. Sit AC = ac, AB = ab, et angulus A = a. Imponatur latus AB lateri ab, et latus AC lateri ac; ob angulos A, a æquales, latera illa congruent. Præterea cum sit AC = ac, et AB = ab, punctum c cadet in C, et b in B; ac proinde bc congruet cum BC.

PROP.

PROP. IV. *Si duo triangula inæqualia æquales habent angulos, ponaturque angulus unus supra alterum æqualem angulum, itemque sibi mutuo imponantur latera homologa, quæ æqualem in utroque triangulo angulum comprehendunt, erit tertium latus tertio lateri parallelum.* Ponatur angulus D (Fig. 10.) supra angulum æqualem B, latus DF supra latus homologum BC, et latus DE supra latus BA itidem homologum; erit latus FE, vel fe parallelum lateri AC. Cum enim angulus feB æqualis sit angulo CAB, erit recta fe rectæ AC parallela (prop. 2. cap. 1.) Si angulus F poneretur supra angulum æqualem C; simili modo demonstratur, rectam DE esse rectæ AB parallelam. Idem dicendum de rectis FD et BC.

Viceversa si per punctum f pro arbitrio sumptum in latere trianguli agatur recta fe parallela rectæ AC, æquales sunt anguli Bfe, BCA, et Bef, BAC (loc. cit.). Triangula illa, quæ angulos habent respective æquales, dicuntur *similia.*

PROP. V. *Quodlibet polygonum resolvi potest in tot triangula, quot sunt polygoni latera.* Etenim ex puncto C intra polygonum (Fig. 11.) ad singulos angulos duci possunt rectæ; evidens autem est, tot esse triangula, quot polygoni latera.

Alia ratione in triangula dividi possunt polygona (Fig. 12.): si nempe ex polygoni angulis ducantur tot rectæ, quod duci possunt, quæ tamen se mutuo non secent. Illæ autem rectæ, quæ ab angulo polygoni ad alium ducuntur, *diogonales* vocatur; patet, in hoc casu tot esse triangula, quot latera polygoni, demptis duobus.

COR. I. Summa angulorum polygoni æqualis est producto ex 180. grad. in numerum laterum, demptis duobus, hoc est, demptis 360. grad. Etenim anguli polygoni simul sumpti æquales sunt angulis omnibus triangulorum, in quæ reductum est polygonum, demptis angulis, quorum vertex est in C. Horum autem angulorum summa est 360. grad. (prop. 1. cap. 5.). Sed tot sunt triangula, quot latera; quare summa omnium angulorum polygoni æqualis est producto ex 180. grad. in numerum laterum binario mulctatum. Ita si polygonum habuerit septem latera, summa angulorum est =

180 gr. $\times$ 7 — 2 = 900 gr.

Idem quoque evidens est, si polygonum per diagonales in triangula dividatur; erit enim in his triangulis angulorum summa angulis polygoni æqualis; ac proinde summa illa æqualis est producto ex 180. gr. in numerum triangulorum, hoc est, in numerum laterum polygoni, demptis duobus.

COR.

COR. II. Polygonum quodlibet regulare circulo inscribi potest. Dividantur in duas partes æquales anguli polygoni (Fig. 11.) per rectas AC, BC, DC, EC, cet. rectæ illæ se mutuo secabunt in C, et erunt inter se æquales. Etenim rectæ AC et BC sibi occurrentes in puncto aliquo C efficiunt triangulum ACB, itemque rectæ BC et DC aliud efformant triangulum BCD. Sed triangula illa sunt æqualia, nam cum anguli polygoni regularis æquales sint, et bifariam æqualiter dividantur, æquales sunt anguli CAB, CBA inter se, et anguli CBD, CDB; præterea æqualia sunt latera AB, BD; ergo isoscelia sunt; et æqualia triangula ACB, BCD (cor. 2. prop. 3.) Quare AC = DC = BC; et propter latus commune BC punctum intersectionis C rectarum AC, BC cadet in punctum intersectionis C rectarum BC, DC. Idem valet de aliis rectis EC, FC, cet.

COR. III. Radii è centro polygoni regularis ad angulos ducti polygonum dividunt in tot triangula isoscelia et æqualia, quot sunt polygoni latera; et quodlibet polygoni latus fit chorda arcus, qui æqualis est quoto ex gradibus 360. per numerum laterum divisis. Ita latus decagoni est arcus grad. 36.

COR. IV. Latus hexagoni regularis circulo lo inscripti æquale est circuli radio. Nam si ex centro C in sex triangula dividatur hexagonum, æquilatera sunt triangula illa ob radios CA et CB æquales, et angulum ACB = grad. 60. Quare singuli anguli CAB, ABC sunt etiam 60. grad., ac proinde CA = AB.

COR. V. Quodlibet polygonum regulare circulo circumscribi potest, hoc est, intra polygonum regulare describi potest circulus, qui singula tangat polygoni latera. Etenim cum latera polygoni regularis circulo inscripti totidem sint chordæ æquales, chordæ illæ à centro æqualiter distant (cor. 1. prop. 2. cap. 1.). Quare si ex centro C agantur perpendiculares CI, CK, hæ chordas æqualiter divident, atque æquales erunt. Ergo per singulas perpendicularium extremitates describi poterit circulus, qui singula polygoni latera in puncto medio tanget (cor. 1. prop. 3. cap 2.)

COR. VI. Hinc polygono regulari dato, circulus circumscribi potest. Quæratur polygoni centrum: quo invento, circulus facile circumscribitur. Item polygono regulari, circulus facile inscribitur invento polygoni centro: ad latus aliquod demittatur perpendicularis, hæc erit circuli radius.

Viceversa polygonum regulare, circulo dato circumscribi potest. Dividantur 360.

grad.

grad. per duplum numerum laterum polygoni, sumptoque arcu iK, qui sit quoto æqualis, per extremitates K et i ducatur radius CK; agaturque recta indeterminata CB, ad punctum K erigatur perpendicularis DKB occurrens CB in puncto B, transferatur KB in KD; erit BD latus polygoni quæsiti. Simili modo inveniuntur alia latere. Vel etiam radio CB describatur circulus, et per totam circumferentiam transferatur chorda DB, atque inscribatur polygonum DBACFE, quod erit circulo dato circumscriptum, ut patet; cum per constructionem tot habeantur tangentes æquales, et æqualiter divisæ in puncto contactus, quot sunt latera in polygono quæsito.

Simili constructione, circulo dato polygonum regulare inscribitur. Dividatur numerus 360. grad. per numerum laterum polygoni quæsiti, sumatur in circulo dato arcus huic quoto æqualis; chorda hujus arcus erit latus polygoni: transferatur chorda illa per totam circumferentiam, habebitur polygonum quæsitum.

Hic autem diligenter observandum est, per Geometriam elementarem, circulo inscribi posse dumtaxat triangulum æquilaterum, quadratum, pentagonum, pentedecagonum, hoc est, figuram quindecim laterum, et polygona regularia, in quibus nu-

numerus laterum, se habet in progressione geometrica dupla. Ita triangulum æquilaterum præbet polygona regularia laterum 6, 12, 24, 48, cet. quadratum præbet polygona laterum 8, 16, 32, 64, cet. Ex pentagono oriuntur polygona laterum 10, 20, 40, 80, cet. Tandem ex pentedecagono oriuntur polygona laterum 30, 60, 120, 240, cet. Alia polygona, Eptagonum, Enneagonum, Endecagonum, cet. describi non possunt geometrice, nisi per constructionem æquationum, quæ ad sublimiorem gradum assurgunt.

SCHOL. Cum polygonum regulare circulo inscribi, et circumscribi possit, quo major est in polygono inscripto, vel circumscripto laterum numerus, eo magis polygonum ad circulum accedit. Itaque augeatur numerus laterum polygoni in infinitum, ita ut differentia inter polygonum, et circulum sit data quavis differentia minor; jam circulus considerari potest tamquam polygonum regulare, ex lateribus numero infinitis, et infinite parvis compositum. Hæc circuli consideratio, pendet ex principio omnino evidenti. Si nempe duarum quantitarum A et B differentia, sit qualibet assignabili minor, quantitates illæ velut æquales haberi debent. Etenim ponatur iter illas quantitates differentia aliqua data, jam

quan-

quantitatum illarum differentia non est qualibet assignabili minor, quod est contra hyp. Quantitas autem, quæ ad aliam accedit pro differentia qualibet data minori, hujus alterius quantitatis limes appellatur. Methodus autem illa vocatur methodus *Exhaustionum*, seu *primarum*, et *ultimarum* rationum. Hanc methodum, quam fusius explicabimus in prima parte Physices, ubi sermo erit de extensionis divisibilitate, in proximo Capite, quantum hactenus nobis satis est, breviter exponemus.

CAPUT IV.

De linearum ratione, seu de lineis proportionalibus.

PROP. I. *In triangulis similibus* acb, ACB (Fig. 13. et 14.) *latera homologa sunt proportionalia.* Ponatur ab pars dimidia rectæ AB; nempe sit Ab æqualis rectæ ab, agaturque cg parallela rectæ AB; erit cg = bA. Quod evidens est ex linearum parallelismo; ducta enim linea bg, erit ob angulos inter parallelas æquales, et ob latus commune bg, triangulum bcg æquale triangulo bgB, et latus cg = bB (cor. 1. prop. 3. cap. præc.) Ergo cg = bB = Ab.

Præ

Præterea triangulum Ccg æquale est triangulo cAb (loco cit.) Ergo Cc = Ac, et Cg = cb = gB. Quare Ac, vel Cc erit pars dimidia rectæ AC ; sicut cb est pars dimidia rectæ CB.

Si ab sit tertia, vel quarta, aut quælibet alia pars rectæ AB, simili modo evidens est, rectas ac et cb esse tertiam, quartam, cet. partem rectarum AC, CB. Etenim ex divisionum punctis b, f in recta AB ducantur bc, fh, cet rectæ BC parallelæ, et eadem ratiocinatione patet, triangula Acb, chg hCi, cet. æqualia esse triangulo acb, seu triangulo Acb.

Si recta ab accurate non contineatur in AB, sed cum fractione aliqua, E. G. bis cum dimidio ; simili ratione ac bis cum dimidio continebitur in AC, et bc in BC. Etenim factis duobus triangulis Acb, chg æqualibus triangulo acb, inter parallelas hf, et Cb construi poterit triangulum hCi, cujus latera erunt dimidia pars laterum trianguli cAb ; quod est evidens, cum sit fB pars dimidia rectæ AB (per hyp.), et recta ih æqualis rectæ fB ob parallelas hf et CB.

Tandem ponamus in triangulis ACB et hCi rectas AB et ih esse inter se *incommensurabiles*: divisa intelligatur recta ih in partes 100, jam recta AB certum continebit partium numerum cum aliquo residuo, cum lineæ il-

illæ sint incommensurabiles. Rursus recta ih divisa fingatur in partes 1000, certum earumdem partium numerum continebit recta AB, sed cum residuo, quod priori residuo minus est : atque ita deinceps minus perpetuo fiet residuum, quo plures erunt partes. Quare ponatur partium numerus infinitus, jam residuum fit nullum. Ergo generatim triangula quælibet similia, latera homologa habent proportionalia.

COR. Numerus quilibet partium in CB erit ad numerum partium in CA, inter easdem parallelas ; ut numerus quilibet alius partium CB ad numerum partium in CA inter easdem parallelas. Etenim Ch : hc = Ci : im, et Ch : Ci = hc : im. Item hc : cA = im : mB, et hc : im = cA : mB. Ergo Ch : Ci = hc : im = cA : mB. Quare CA est ad CB, ut numerus quilibet partium in CA ad numerum, æqualium partium in CB.

PROP. II. *Duo triangula, in quibus latera homologa sunt proportionalia, æquiangula sunt.* Si (Fig. 10.) ponatur AC : BC = FE : FD, et AC : AB = FE : ED, æquiangula erunt triangula ABC et EDF. Nam si super EF construatur triangulum FGE triangulo ABC æquiangulum, facto scilicet angulo GEF = BAC, et angulo GFE = ACB, et angulo FGE = CBA ; erit AC : BC = FE : FG : sed (per Hyp.) AC : BC = FE:

= FE : FD ; ac proinde FD = FG. Similiter ob triangula ABC, FGE similia, erit AC : AB = FE : EG : sed (ex Hyp.) AC : AB = FE : ED; ergo FE, EG = FE : ED ; ac proinde EG = ED. Quare triangula duo FED et FEG æquiangula sunt, et æqualia, ob latus commune FE, et latera FD, FG, et EG, ED æqualia (prop. 3. cap. præc.) Sed (per constr.) triangulum FGE triangulo ABC est æquiangulum ; ergo triangulum FED ipsi quoque est æquiangulum.

COR. I. Si in triangulis ABC et EDF sit angulus D = B, et præterea DE : DF = BA : BC; erit triangulum EDF triangulo ABC æquiangulum. Nam super AB capiatur Be = DE, ducaturque ef parallela rectæ AC ; triangula ABC et eBf sunt æquiangula, cum ob parallelam ef angulus feB = A, efB = C, et ob angulum B communem. Ergo Be : Bf = BA : BC. Sed (ex Hyp.) DE : DF = BA : BC, ergo Be : Bf = DE : DF ; at Be = DE; ergo Bf = DF ; ac proinde duo triangula Bef, DEF sunt æqualia, et similia ; sed Bef est triangulo BAC æquiangulum, ergo triangulum EDF est æquiangulum triangulo ABC, ac proinde generatim triangula, quorum latera duo homologa, circa æqualem angulum sunt proportionalia, sunt æquiangula.

COR.

COR. II. Si recta AD (Fig. 15.) angulum BAC bifariam, et æqualiter dividat in triangulo BAC; eadem recta latus oppositum BC dividit quoque in duas partes BD et DC lateribus AB et AC proportionales. Etenim producta recta CA in E, per punctum B agatur BE rectæ AD parallela: triangula ECB, DAC erunt similia (prop. 1.) ac proinde BD : DC = AE : AC, sed ob parallelas angulus BEA = DAC = DAB = ABE; ergo triangulum BAE est isoscele (cor. 2. prop. 2. cap. præc); quare AE = AB : ideoque BD : DC = AB : AC.

COR. III. Si ex angulo recto A trianguli rectanguli BAC demittatur perpendicularis AD in basim BC, quæ angulo recto imminet, et *hypothenusa* dicitur; hæc dividet triangulum in duo alia triangula BAD, DAC inter se, et triangulo BAC similia. Et quidem triangula BAD, DAC præter angulum rectum habent quoque cum triangulo BAC angulum communem: ac proinde similia sunt inter se, et toti triangulo. Hinc BD : DA = DA : DC, et BD : BA = BA : BC, ac tandem DC : CA = CA : CB.

COR. IV. Dum fit BD : BA = BA : BC erit $BA^2 = BD \times BC$ (ob productum mediorum æquale producto extremorum). Similiter cum sit $DC : AC = AC : CB$, erit $AC^2 = DC \times BC$: Ergo $CA^2 + AC^2 = BD \times BC + DC \times BC = \overline{BD + DC} \times BC = BC \times BC = BC^2$. Quare quadratum hypothenusæ in triangulo rectangulo æquale est quadratis laterum.

COR. V. Diagonalis quadrati est lateri *incommensurabilis*. Cum enim diagonalis, sit hypothenusa trianguli rectanguli, cujus latera sunt æqualia, quadratum diagonalis æquale est duplo quadrato lateris. Sed numeris exprimi non potest radix quadrati dupli (ex demonstratis in Arithmetica). Ergo si latus quadrati numeris exprimatur, exprimi non poterit diagonalis, et contra.

COR. VI. Perpendicularis EO (Fig. 16.) ex circumferentiæ circuli puncto quolibet in diametrum demissa, est media proportionalis inter duo segmenta CO et OL; nam si ex puncto E ad diametri extremitates agantur rectæ EC, EL; triangulum CEL est rectangulum in E, ac proinde $CO : EO = EO : OL$; et $EO^2 = CO \times OL$. Recta perpendicularis EO, dici solet *ordinata*; *abscisa* autem vocatur pars CO diametri inter perpendicularem, et circumferentiam comprehensa.

PROP.

PROP. III. *Si ducantur in circulo chordæ duæ* BC et DA (Fig. 17.) *se mutuo secantes in* E, *chordarum segmenta erunt reciproce proportionalia.* Si enim ducantur BA et CD, triangula BEA et DEC, sunt similia, ob angulos in E æquales, atque ob angulos C, A, et B, D iisdem arcubus subtensos. Quare AE : BE = CE : DE.

COR. I. Si duæ lineæ EB, EC (Fig. 18.) ex eodem puncto extra circulum ductæ, ad superficiem concavam terminentur, partes externæ EA, ED rectis integris EB, EC sunt reciproce proportionales. Ductis enim chordis AC, DB, triangula EBD, EAC similia sunt ob angulum E communem, et angulos B, C eodem arcu AD subtensos: Ergo EA : ED = EC : EB.

COR. II. Si recta EB sit secans, altera autem Ed tangens; erit EB : Ed = Ed : EA. Nam ductis dB, dA, similia erunt trangula EdB, EdA ob angulum E communem, et angulos EBd, AdE æquales, quorum communis mensura est dimidius arcus Ad (cor. 3. prop. 4. cap. 2.). Ergo angulus dAE = EdB, ac proinde EB : ED = Ed : EA, hoc est, tangens est media proportionalis inter rectam totam EB, et partem externam EA.

COR. III. Hinc facile dividitur recta data bifariam, ea conditione, ut major pars

 sit

sit media proportionalis inter totam rectam, et ejusdem rectæ partem alteram. Nam (Fig. 19.) super datæ rectæ AB extremitatem erigatur perpendicularis AE dimidiæ AB æqualis, et centro E, radio AE describatur circulus DAF. Deinde per B et E agatur recta BF, et centro B, radio BD describatur arcus DC; hic occurret rectæ AB in puncto quæsito. Etenim ob tangentem BA erit BF ; BA = BA : BD ; ac proinde BF — BA: BA = BA — BD: BD. Sed BE — BA = BD = BC; cum sit FD = BA utpote duplæ ipsius EA, quæ est dimidia rectæ AB. Simili modo BA — BD = AC ; ergo substitutione facta, BC : BA = AC : BC, vel BA : BC = = BC : AC. In hoc corollario continetur problema, quod his verbis proponere solent Geometræ : *rectam dividere in media, et extrema ratione.*

Alia etiam problemata proponi solent, qualia sunt. *Tribus datis rectis, quartam proportionalem invenire. Inter duas rectas, invenire mediam proportionalem.* Sed hæc manifesta sunt ex præcedentibus.

PROP. IV. *Si duæ figuræ Similes in triangula utcumque dividantur per diagonales ex angulis homologis ductas, triangula homologa erunt similia.* Etenim sint duo polygona ABCDE et FGHIK (Fig. 20.) in quibus an-

angulus A = F, B = G, C = H, D = I, E = K, sitque præterea AB : FG = BC : GH = CD : HI = DE : IK = EA : KF : ductis diagonalibus AC, AD, FH, FI; similia erunt triangula ABC, FGH, et ACD, FHI, atque ADE, FIK. Nam cum anguli B et G æquales sint, et lateribus proportionalibus comprehensi; similia erunt triangula ABC, FGH, et ADE, FIK. Itaque angulus BAC = GFH, DAE = IFK. Ergo BAE — BAC — DAE = CAD = GFK — GFH — IFK — HFI. Igitur angulus CAD = angulo GFI. Simili modo ostenditur, angulos ACD, FHI, et ADC, HIF æquales esse. Quare triangula ACD et FHI sunt æquiangula.

Viceversa duæ figura quælibet similes sunt, si in triangula æquiangula resolvi possint. Nam ob angulos æquales in triangulis æquiangulis æquales sunt anguli homologi in unaquaque figura. Quare cum latera figurarum sine triangulorum æquiangulorum latera proportionalia, figuræ similes sunt.

COR. IV. Si dividatur BC in L, latusque homologum GH in M in eadem ratione; ita ut sit BC : GH = LC : MH. Deinde si ducantur rectæ duæ ad arbitirium LN et MO, quæ angulos CLN, HMO æquales efficiant, vel quæ dividant latera homologa

ED et KI in eadem ratione ; ita ut sit ED : KI = DN : IO ; erit LN : MO = CD : HI = BC : GH , cet. Nam ductis NC et OH , triangula NCD , OHI similia sunt ob angulos D , I æquales lateribus proportionalibus NC , DC , et OI , IH comprehensos. Quare CD : HI = CN : HO , et angulus DCN = IHO. Si ergo anguli illi auferantur ex angulis æqualibus DCL , IHM, remanebunt æquales anguli NCL , OHM, ac proinde triangula NCL , OHM similia sunt : ideoque LN : MO = LC : MH = BL : GH = CD : HI , cet. Quare generatim si in duobus polygonis similibus ducantur lineæ , quæ dividant latera homologa, vel angulos homologos in eadem ratione, lineæ illæ erunt proportionales inter se , atque etiam eorumdem polygonorum lateribus quibuscumque homologis.

SCHOL. Linearum rationem jam consideravimus in quantitatibus finitis ; superest, ut pauca , quantum nobis necesse est , explicemus de ratione quantitatum , quas *infinite magnas* , et *infinite parvas* appellant. Et in primis quidem observandum est , nullam quantitatem in se spectatam , et sine nostro cogitandi modo aut infinite parvam esse, aut infinite magnam, sed magnitudo quælibet in se determinata est. Et quidem data quavis magnitudine , utcumque parva, vel utcum-

que

que magna, alia semper minor in primo casu, et alia semper major in casu altero haberi potest. Nobis enim licet quantitatem exiguam, vel ingentem considerare, primamque minuere, alteram augere, abstrahendo animum à quovis limite determinato; priorem quantitatem dicimus *infinitesimam*, vel *infinite parvam*, quantitatem alteram appellamus *infinitam*, vel *infinite magnam*; rationem, quam duæ quantitates finitæ habent ad se invicem, *rationem finitam* vocamus. Patet autem, diversos esse infinitorum, et infinitesimorum ordines; licet enim magnitudo aliqua concipiatur infinita, vel infinitesima: semper tamen quantitas manet, ac proinde ultra quoscumque limites augeri potest et minui. Si quantitatem aliquam finitam, ultra quoscumque limites minui concipiamus, hanc dicimus infinitesimam *ordinis primi*. Si autem quantitas alia ad hanc infinitesimam habeat rationem, quam ipsa infinitesima habet ad quantitatem hanc, dicimus infinitesimam *secundi ordinis*, et ita deinceps. Viceversa, si quædam quantitas sit ad finitam quantitatem, ut quantitas finita ad infinitesimam ordinis primi, eam dicimus infinitam *ordinis primi*; et ita deinceps superiores infinitorum ordines intelligere licet. Exemplum sit in circulo, cujus diameter est ad chordam, ut est chorda ipsa ad abscissam ; ac proinde si fingatur chorda infinite parva primi ordinis , erit abscissa infinitesima ordinis secundi.

Ex his patet , calculo subjici posse quantitates infinitas et infinitesimas. Infinitum hac nota exprimi solet ∞. Quare numerorum series infinita hoc modo repræsentari potest 0. 1. 2. 3 4. 5 . . . ∞. Pari modo quantitas quælibet finita concipi potest divisa in partes perpetuo decrescentes , donec perveniatur ad quantitatem infinitesimam. Talis est series , $\frac{1}{1} \; \frac{1}{2} \; \frac{1}{3} \; \frac{1}{4} \; \frac{1}{5} \ldots \frac{1}{\infty}$.

Evidens autem est , quantitatem infinitam finitæ quantitatis additione , vel subtractione majorem , vel minorem non fieri ; cum finita quantitas ad quantitatem infinitam rationem habeat qualibet data minorem : simili ratione , quantitas infinite parva quantitatem finitam augere , vel minuere non potest. Itaque $\infty = \infty \pm 1$, et $1 = 1 \pm \frac{1}{\infty}$.

Eodem modo si diversi infinitorum ordines per diversos exponentes designantur, erit $\infty^2 \pm a\infty = \infty^2$, et $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}$. Verum si quantitates ejusdem generis considerentur , sive *infinitæ* , sive *infinitesimæ* , ex no-

notione quantitatum illarum manifestum est, eas non secus ac quantitates finitas tractari debere; probe enim recordandum est, quantitates illas non absolute, sed relative dumtaxat, et secundum nostrum concipiendi modum esse infinitas, vel infinitesimas. Quare $\infty + \infty = 2\infty$; $1 \times 3\infty = 3\infty$; $\frac{3^{\infty}}{3\infty} = 3$; $\times 2\infty \times \frac{a}{\infty} = \frac{2a}{\infty}$; $\infty \times \infty = \infty 2$; $\frac{\infty 3}{\infty 2} = \infty$; $\frac{\infty 2}{\infty 3} = \frac{1}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty$.

Ex his multa colligere est.

Quantitates infinitæ vel infinitesimæ ejusdem ordinis adduntur, vel subtrahuntur non secus, ac vulgares quantitates. Quantitas infinita primi ordinis per quantitatem infinitam ejusdem ordinis multiplicata producit quantitatem infinitam ordinis secundi. At quantitas infinita ordinis cujuscumque per quantitatem finitam multiplicata producit quantitatem infinitam ejusdem ordinis. Et generatim quantitas infinita cujusvis ordinis per aliam quantitatem ordinis cujuscumque multiplicata evehitur ad illum infifiniti gradum, cujus exponens est ipsa exponentium summa. Contraria autem ratione, si quantitas infinita ordinis cujuscumque per quantitatem infinitam ordinis cujuslibet dividatur, habetur quantitas, cujus gradus designatur per ipsam exponentium differentiam. At si quantitas infinitesima cujuslibet gradus per quantitatem infinitesimam ordinis cujuscumque multiplicetur, aut dividatur; in primo casu quantitas infinitesima ad eum deprimetur gradum, qui per exponentium summam exibetur: in casu autem altero quantitas infinitesima ad eum gradum evehitur, qui per ipsam exponentium differentiam repræsentatur, ita ut quantitas infinitesima per divisionem fieri possit finita, atque etiam infinita. Hæc pauca dicta sint *de primarum, et ultimarum rationum* methodo, quam quidem ad methodum *exhaustionum* revocari posse intelligitur.

AP-

APPENDIX.

De proportionum usu in triangulorum resolutione, sive de Trigonometria.

I. Ex linearum proportione tota pendet *Trigonometria*, quæ est ars resolvendi triangula. In triangulo autem sex partes considerari possunt, nempe tres anguli, et tria latera. Huc autem refertur Trigonometriæ praxis, ut datis tribus ex sex partibus trianguli, partes reliquæ inveniantur: ac proinde tres partes datæ, constituere debent tres primos proportionis terminos, et terminus quartus erit pars quæsita. Verum quia latera trianguli expressam rationem non habent cum angulis, quorum mensura sunt arcus circuli; angulis, vel arcubus circuli substituuntur lineæ rectæ, quæ arcus illos exibeant, et trianguli lateribus proportionales sint. Harum linearum definitiones afferemus, et proprietates demonstrabimus.

Sit angulus quilibet ACB (Fig. 21.), ex cujus vertice C, tamquam centro, et radio ad arbitrium sumpto describatur circulus AHaG. Producatur AC in a, erigaturque

que in C perpendicularis CH; evidens est, angulum BCH, vel arcum HB esse *complementum* anguli ACB, vel arcus AB, angulus BCa, vel arcus Ba est *supplementum* anguli ACB, vel arcus AB, et viceversa BA est *complementum* ipsius HB, et *supplementum* ipsius aB. Recta BD ex radii extremitate B ad radium CA perpendiculariter ducta dicitur *sinus* arcus AB, vel anguli ACB. Recta AE ex radii extremitate A perpendiculariter ducta et radio alteri occurrens in E vocatur *tangens* arcus AB; recta autem BE ejusdem arcus *secans* appellatur. Pars AD radii inter arcum, et sinum comprehensa dicitur *sinus versus* arcus AB. Perpendicularis BI dicitur *sinus complementi* arcus AB; perpendicularis HK *tangens complementi*, et HI *sinus versus complementi* arcus AB. Compendii ergo sinus complementi, tangens complementi, cet. dicuntur *Cosinus*, *Cotangens*, *Cosecans*, *Cosinus versus*. Brevitas caus scribuntur R pro radio; sin. pro sinu; tang. pro tangente; sin. v. pro sinu verso.

II. Ex his definitionibus multa colliguntur 1°. Sinus, cosinus, tangens, cotangens, cet. anguli obtusi BCa sunt etiam sinus, cosinus, cet. anguli acuti ACB, qui est anguli obtusi supplementum. Nam ex radii alterutrius extremitatibus B, vel a demitmitti non potest perpendicularis, quæ non cadat in radium alterum productum; tales sunt perpendiculares DB, ad; similiter tangens alia esse non potest, quam ae: sed ob triangula aCd, BCD, et Cae, CAE æqualia, habetur ad = BD, et ae = AE. Cum autem sit arcus BH complementum arcus AB, evidens est, BI esse cosinum arcus AB et HK illius cotangentem. 2. Sinus BD arcus AB est dimidium chordæ BG, arcum duplum BAG subtendentis. (Prop. 1. cap. 2.) 3°. Sinus crescunt crescentibus angulis a 0° usque ad 90 gr., et eodem modo decrescunt a 90. gr. usque ad 180 gr. 4.° Sinus arcus 30. gr. dimidio radio æqualis est; est enim radius æqualis chordæ arcus 60. gr. (cor. 4. prop. 5. cap. 3.) et ejusdem arcus sinus est dimidia chorda arcus dupli. Itaque in triangulo rectangulo latus oppositum angulo 30 gr. est dimidia hypothenusa hujus trianguli. Nam si ACB = 30 gr., erit BG = BC, et BD = $\frac{1}{2}$ BC. 5°. Tangentes crescunt, crescentibus angulis a 0° usque ad 90 gr., ita ut tangens arcus gr. 90 sit infinita; nam radius CH in angulo recto HCA non potest concurrere cum tan-

tangente. 6^{o}. Tangens arcus 45 grad. æqualis est radio; nam si angulus ACB sit 45 grad. triangulum rectangulum CAE erit isosceles, et AE $=$ AC. 7^{o}. Sinus versus AD arcus, qui minor est 90. gr. æqualis est differentiæ inter radium CA, et cosinum CD $=$ BI. Præterea cosinus versus HI est differentia inter radium CH, et sinum CI $=$ BD, at sinus versus supplementi nempe Da æqualis est summæ radii, et cosinus. 8^{o}. Ob triangula rectangula similia CDB, CAE, CIB, CHK, erit CA: CD, vel BI $=$ AE : BD, nempe radius est ad cosinum, ut tangens ad sinum. Deinde hæc alia habetur analogia CH : CI, vel BD $=$ HK : IB, hoc est, radius ad sinum, ut cotangens ad cosinum. Tandem AE, CA $=$ CH vel CA : HK; hoc est tangens ad radium, ut radius ad cotangentem. 9^{o}. Ex præcedentibus analogiis derivantur formulæ, quarum ope sinus substituuntur tangentibus, et viceversa. Sit R $=$ 1; erit Sin. $=$ Cos. $\times$ Tang. $= \frac{\text{Cos.}}{\text{Cot.}}$; Cos. $=$ Sin. $\times$ Cot. $= \frac{\text{Sin.}}{\text{Tang.}}$; Tang. $=$

$= \frac{\text{Sin.}}{\text{Cos.}} = \frac{1}{\text{Cot,}}$; Cot. $= \frac{\text{Cos.}}{\text{Sin.}} = \frac{1}{\text{Tang.}}$; Cot. A $\times$ Tang. A $=$ 1 $=$ Cot. B $\times$ Tang. B. 10. In omni triangulo sinus angulorum sunt, ut latera angulis opposita. Etenim triangulum circulo inscribatur: singula latera sunt chordæ arcus dupli, qui est mensura anguli oppositi. Quare dimidium latus est sinus anguli oppositi. Sed semisses sunt inter se, ut tota; ergo latera sunt, ut sinus angulorum oppositorum. Hinc cum sinus anguli recti sit radius, et latus oppositum sit hypothenusa, erit in triangulo rectangulo radius ad hypothenusam, ut sinus anguli unius acuti ad latus eidem angulo oppositum. 11. In triangulo rectangulo cosinus anguli unius acuti est sinus anguli alterius; ergo sinus anguli unius acuti est ad suum cosinum, ut latus huic angulo oppositum est ad latus alterum; sed sinus est ad cosinum, ut tangens ad radium; ergo in triangulo rectangulo tangens anguli unius acuti est ad radium, ut latus huic angulo acuto oppositum est ad latus alterum. 12. In triangulo quolibet ABC (Fig. 22.) hæc semper habetur analogia: majus latus AC est ad summam duorum aliorum laterum AB $+$ BC, ut eorumdem laterum differentia AB $-$ BC ad differentiam segmentorum AE, et CE,

quæ

quæ fiunt ducta ex angulo majori B in majus latus AC perpendiculari BE. Nam si anguli vertice B tamquam centro, et radio, qui sit minori lateri æqualis BC, describatur circulus GCD, producto latere AB in G; erit $AG = AB + BC$, et $AP = AB - BC$; atque ob $CE = ED$, erit $EA - CE = AD$, ac tandem $AC : AG = AP : AD$.

III. Si in arcu quolibet AB (Fig. 21.) detur sinus, aut cosinus, sinusversus, aut cosinusversus, ex uno dumtaxat dato tria reliqua inveniuntur. Nam $CD = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{BD}^2}$ et $Cos. = \sqrt{\overline{R.}^2 - \overline{Sin.}^2}$. Præterea $DA = CA - CD$, et Sin. versus $= R -$ Cos. Tandem $HI = CH - CI$, et Cos. versus $= R -$ Sin. Initis calculis in arcu quolibet pro dimidio vel duplo arcu calculus facile institui potest. Nam (Fig. 23.) ducta chorda BA, et ex puncto C demissa perpendiculari CE, datisque BD, DA; erit $BA = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{DA.}^2}$ Quare FA, vel $Sin. \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\overline{Sin.}^2 + \overline{Sin.\ vers.}^2}$ Et $CF = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AF}^2}$. Ergo $Cos. \frac{1}{2} =$

$\sqrt{RR}$

$\sqrt{RR - \text{Sin.}^2}\ \frac{1}{2}$. Præterea si habetur AE tamquam arcus datus, similia erunt triangula FCA, DBA; quare CA : CF = AB: BD, vel R : Cos. arc = 2. Sin. arc : Sin. arcus dupli. Quod facile colligitur ex præcedentibus, sed tamen demonstratur. Datis enim sinubus BD, KL duorum arcuum AB, KB, habetur sinus KM illorum summæ (Fig. 24.), vel illorum differentiæ (Fig. 25.). Etenim datis CD, CL, erit CB : CL = BD : LP, vel OM; ergo OM

$$= \frac{\text{Sin. } AB \times \text{Cos. } KB.}{R}$$

Præterea ob triangula rectangula similia KOL, OLQ, CMQ, CBD (Fig. 24.) et KOL, KMQ, CQL, CBD (Fig. 25.) in triangulis KOL, CBD erit CB : CD = KL: KO

$$= \frac{\text{Sin. } KB \times \text{Cos. } AB}{R}$$

$$\frac{}{R}$$

. Hinc facto R = 1, erit KM, vel Sin. BK ± AB = Sin. BK × Cos. AB ± Sin. AB × Cos. KB. Sit arcus AB 30 gr. (Fig. 26.) et BF = BK; ob triangula rectangula similia SIF, SQG, erit angulus IFS = GQS = BCA = 30 gr. Ergo angulus KFS = 30 gr. Quare GK =

$= \frac{1}{2} FK = IK = FI$. Sed $FK^2 - GK^2 = FG^2$ vel $4IK^2 - IK^2 = FG^2$. Ergo $3IK^2$ vel $IK^2 \times 3 = FG^2$. Quare $IK \times \sqrt{3}$ $KM = FN$, et $IK \times \sqrt{3} + KM = FN$; hoc est, sinus MK arcus KA, minoris scilicet, quam 30 gr. et sinus KI, differentiæ scilicet inter hunc arcum, et 30 gr. per $\sqrt{3}$ multiplicatus simul sunt æquales sinui FN arcus FA, qui tanto major est arcu 30 gr quanto arcus KA minor est. Ob arcum $FI = GK$, erit $FT + GK = KO$, nempe sinus FT arcus HF minoris, quam 60 gr. et sinus FI, differentiæ scilicet inter hunc arcum, et 60 gr. simul æquantur sinui KO arcus HK, qui tanto major est arcu 60 gr. quanto FK minor est. Ita Sin. 55 gr. + Sin. 5 gr. = Sin. 60 gr. Itaque demonstravimus principia, quorum ope formari possunt sinuum, et tangentium tabulæ. Illæ autem tabulæ commoditatis ergo per logarithmos construuntur, cujus quidem constructionis ratio ex logarithmorum doctrina jam explicata intelligitur.

III. In omni triangulo ABC (Fig. 22.) summa duorum laterum quorumcumque AB

$AB + BC$ est ad illorum differentiam $AB - BC$, ut tangens semisummæ duorum angulorum A, et C, qui his lateribus opponuntur, ad tangentem semidifferentiæ eorumdem angulorum. Etenim sit P semisumma angulorum A, et C: et Q illorum semidifferentia. Erit angulus major $C = P + Q$, et minor $A = P - Q$. Jam (ex dem.) $AB : BC = \text{Sin. } C : \text{Sin. } A = \text{Sin. } \overline{P + Q} : \text{Sin. } \overline{P - Q} = \text{Sin. } P \times \text{cos. } Q + \text{cos. } P + \text{Sin. } Q : \text{Sin. } P \times \text{cos. } Q - \text{cos. } P \times \text{Sin. } Q$. Ergo $AB \times \text{Sin. } P. \times \text{cos. } Q - AB \times \text{cos. } P \times \text{Sin. } Q = BC \times \overline{\text{Sin. } P \times \text{cos. } Q} + BC \times \text{cos. } P \times \text{Sin. } Q$; vel $\overline{AB - BC} \times \text{Sin. } P \times \text{cos. } Q = \overline{AB + BC} \times \text{cos. } P \times \text{Sin. } Q$. Quare dividendo per $\overline{\text{cos. } P \times \text{cos. } Q}$, factaque reductione, habebitur $\overline{AB - BC} \times \frac{\text{Sin.} P}{\text{cos.} P} = \overline{AB + BC} \times \frac{\text{Sin.} Q}{\text{Cos.} Q}$. Sed $\frac{\text{Sin.}}{\text{cos.}} =$ tang. Ergo $\overline{AB - BC} \times \text{tang. } P = \overline{AB + BC} \times \text{tang. } Q$. Quare $AB + BC : AB - BC = \text{tang. } P : \text{tang. } Q = \text{tang. } \frac{A + C}{2} : \text{tang. } \frac{A - C}{2}$.

§ IV. His principiis universa innititur Trigonometria. Et quidem in triangulorum resolutione vel dantur tria latera, vel duo tantum, et angulus, vel duo anguli, et latus unum. Porro datis in triangulo tribus, quæ jam diximus, reliqua inveniuntur per hactenus demonstrata. At monendum est, datis tribus angulis dumtaxat, inveniri tantum rationem laterum, quæ sunt, ut sinus angulorum oppositorum; minime autem invenitur eorum valor, cum infinita possint construi triangula similia inæqualia. Neque etiam sine observatione prætermittendus est casus, in quo dantur duo latera, et angulus alterutri lateri oppositus. Casus ille est ambiguus, et duas solutiones potest admittere; cum (ex dem.) sinus anguli acuti sit quoque sinus complementi ad duos rectos. Quare, ut tollatur ambiguitas, nota sit, oportet anguli species, hoc est, notum esse debet, an angulus sit acutus, vel obtusus.

In omnibus Trigonometriæ libris reperiuntur sinuum, et tangentium tabulæ. Quamvis autem ex hactenus demonstratis manifestum sit, quo artificio construatur: id tamen breviter declarabimus. Dato sinu graduum 30 per antea demonstrata, inveniri possunt sinus gr. 15, deinde $7\frac{1}{2}$, postea

$2\frac{1}{4}$, et ita sinum semisses, progrediendo usque ad duodecimam operationem, nempe usque ad $52' \; 43''' \; 3'' \frac{1}{4}$; qui quidem sinus sine errore sensibili cum arcu confunditur; quia vero sinus illi minime sunt arcubus proportionales, dici potest: ut arcus ille minimus est ad suum sinum; ita arcus $1'$ est ad suum sivum. Dato autem sinu arcus $1'$, invenietur sinus arcuum $2'$ $3'$ $4'$, cet. et ita deinceps usque ad 30 gr. Tandem à 30 gr. usque ad 60 gr., et à 60 gr. usque ad 90 gr. progredi licebit: quo facto tangentes ad calculum revocare jam facile erit.

SECTIO II.

De Geometria superficierum.

CAPUT I.

De præcipuis planarum superficierum proprietatibus.

PROP. I. *Tria puncta, quæ in eadem recta non jacent, plani positionem determinant.* Id patet ex diffinitione ipsius plani. Et quidem per tria puncta duci potest planum, quod evidens est; illud vero planum unicum esse, manifestum est; ponamus enim, planum aliud, quod cum primo in tribus punctis congruat, in aliis autem ab ipso defectat: in eadem linea recta, quæ primo in plano jaceret; alteri plano aptari perpetuo non posset, neque secunda superficies illa foret omnium intra eosdem terminos ductarum brevissima; quod est contra definitionem plani. Ergo per tria puncta unicum planum duci potest; ac proinde constans est, ac determinata positio plani per data tria pucta transeuntis.

COR. I. Duæ rectæ se invicem secantes sunt

sunt in eodem plano. Nam punctum intersectionis, et punctum quodlibet aliud in binis lineis pro arbitrio sumptum, tria sunt puncta in directum non posita, quæ proinde determinant positionem plani, in quo jacent duo utriusque lineæ puncta ac proinde et totæ binæ lineæ (ex def.)

COR. II. Si duæ rectæ jacentes in eodem plano tertia recta secentur, recta secans in eodem quoque jacebit plano. Nam duo ejusdem lineæ puncta, duæ scilicet intersectiones, sunt in eodem plano. Si autem ponamus, duas rectas se mutuo secare, patet, in hoc casu demonstrationem non valere, nisi tertia linea secans extra punctum intersectionis transeat; alioquin unicum haberetur punctum, quod rectæ positionem non determinat.

COR. III. Duorum planorum intersectio est linea, cujus singula puncta jacent in utroque plano. Patet autem, tria puncta duobus planis communia esse non posse, nisi jacent in directum. Cum enim tria puncta, quæ non sunt in eadem recta, positionem plani determinent; si tria puncta in directum non posita duobus planis communia esse possunt, jam tria puncta positionem plani non determinarent. Quare planorum duorum intersectio est linea recta.

COR. IV. Recta ad planum perpendicularis, insistit quoque perpendiculariter ad rectas singulas in eodem plano jacentes et per extremitatem perpendicularis transeuntes. Etenim ponamus, rectam illam ad planum perpendicularem, non insistere perpendiculariter ad aliquam ex prædictis lineis; jam linea illa infra planum deprimitur, vel attollitur supra idem planum; ac proinde non jaceret in eodem plano (quod est contra hypoth.)

COR. V. Duæ rectæ ad idem planum perpendiculares, vel æqualiter inclinatæ, sunt inter se parallelæ, et contra. Etenim rectarum illarum extremitates communi recta in plano jungantur; duæ illæ lineæ ad planum perpendiculares, vel æqualiter inclinatæ erunt quoque perpendiculares, vel æqualiter inclinatæ ad eamdem lineam jungentem: est enim in eodem plano. Quare (ex parallelarum def.) rectæ illæ erunt parallelæ, et viceversa.

Prop. 2. Duo plana sibi mutuo inclinata easdem habent proprietates, quas de rectis ad se invicem inclinatis demonstravimus.

Ponamus, planum aliquod A immobile, in quo jaceat planum aliud B lineis rectis terminatum, qualia sunt polygona rectilinea: hæc duo plana, utpote omni crassitie destituta, in unum coalescunt planum. At si planum B revolvi intelligatur circa latus ali-

aliquod plani A, fixum perpetuo manens, totum plani motum sibi facile quisque repræsentabit. Et quidem 1°. ab ipso motus initio nihil duobus planis manebit commune præter rectam, circa quam planum B revolvitur; quæ proinde est utriusque plani intersectio. 2°. planum illud singulos percurret inclinationis gradus, si tandiu convertatur, donec ad oppositam plani A partem perveniat. 3°. Planum revolvens plano immoto fiet perpendiculare, ubi ad eum perveneris situm, in quo non magis pendeat ex una parte, quam ex alia. 4°. Singulos inclinationis gradus metietur arcus circuli, cujus centrum perpetuo manebit in communi planorum intersectione. Quia vero centrum in ipso circuli plano jacet necessum est, hujus arcus centrum esse in linea recta, cujus revolutione generatur ipsum arcus planum. 5°. Si concipiatur linea quædam sublimis, cui perpendiculariter affixa sit recta alia; hæc recta planum describet, interea dum linea sublimis, circa seipsam convertitur, in eodem perpetuo manens loco. Si autem duæ lineæ sibi invicem non forent perpendiculares, jam figura revolvendo descripta plana non foret; sed

sed ex una parte convexa, et ex altera concava, ut patet. Quare ex ipsa plani formatione evidens est, revolutione rectæ planum describi non posse, nisi recta revolvens sit ad lineam, in qua revolvitur, perpendicularis. 6°. Centrum arcus, in quo sumuntur gradus inclinationis plani unius ad aliud, positum est in perpendiculari ex puncto quolibet arcus ad planorum intersectionem ducta. Quare si describatur semicirculus, cujus centrum sit in linea duobus planis communi, et cujus planum sit ad planum immotum perpendiculare; per hujus semicirculi gradus metiri licebit omnes plani mobilis inclinationes. Quare generatim plana duo ad se invicem inclinata easdem habent proprietates, quæ in mutua linearum inclinatione demonstrantur.

COR I. Planum plano occurrens vel duos angulos rectos facit, vel duobus rectis æquales (Prop. 1. cap. 1.)

COR. II In planorum intersectione æquales sunt anguli ad verticem oppositi. (Cor. 2. Prop. 1. cap. 1.)

COR. III. Si plana quotlibet eamdem habeant communem intersectionem, summæ angulorum omnium est 360 gr. (Cor. 1. Prop. 1. cap. 1.)

COR. IV. Ex puncto dato extra planum, vel

vel intra planum, una perpendicularis ad planum duci potest. (Cor. 4. prop. 1. cap. 1.)

COR. V. Distantia puncti alicujus à plano dato, est perpendicularis ex puncto dato ad planum ducta (ex def.)

COR. VI. Planum secans duo, vel plura plana parallela, efficit angulos alternos externos æquales, item æquales angulos alternos internos. Præterea angulus internus alterius interni supplementum est, atque etiam angulus externus est supplementum alterius (Prop. 2. cap. 1.)

COR. VII. Si duo, aut plura plana parallela alio plano secentur, communes intersectiones erunt parallelæ. Si enim non sint parallelæ, sibi occurrere possunt, ac proinde et plana ipsa, in quibus hæ lineæ jacent; ideoque plana non forent parallela, quod est contra hyp.

CAPUT II.

De superficierum mensura.

PROP. I. *Superficies parallelogrammi rectanguli æqualis est producto ex basi in altitudinem.* Sit parallelogramum rectangulum ABCD (Fig. 26.) cujus altitudo AD certum contineat pedum numerum: E. G. 7;

ba-

basis autem AB contineat 8. Divisum intelligi poterit parallelogrammum in 7 superficies, ut DM, quæ singulæ continent octo minores superficies quadratas, sive octo pedes *quadratos*, ut vocant. Quare habebitur parallelogrammi totius superficies, si octo pedes quadrati, qui prima superficie continentur, toties sumantur, quot sunt æquales superficies, ut DM; ac proinde superficies tota parallelogrammi erit 7×8, nempe 56 pedum quadratorum. Evidens est, in hac demonstratione, fingi posse aliud quemlibet partium numerum, atque eadem valet demonstratio, etiamsi altitudo, et basis parallelogrammi ponantur *incommensurabiles*, ut patet ex Prop. 1. cap. 4.

COR. I. Si parallelogrammum BD per diagonalem dividatur, habebuntur triangula duo rectangula æqualia, quorum proinde superficies, utpote dimidia parallelogrammi, erit dimidium productum ex basi in altitudinem.

Eadem est demonstratio pro triangulo quolibet, etiam non rectangulo. Si enim triangulum CAB (Fig. 27.) non rectangulum. Ex puncto A demittatur perpendicularis AD, compleaturque rectangulum FCBE, erit triangulum CAD dimidium rectanguli FACD, et triangulum DAB dimidium rectantanguli DABE. Quare ut ante, superficies trianguli est dimidium productum ex basi in altitudinem.

Idem patet, etiamsi perpendicularis EB trianguli CED cadat extra basim. Nam triangulum DEB est dimidium rectanguli DAEB, et triangulum CEB est dimidium rectanguli CFEB; ergo triangulum CED,

$$\text{seu } CEB - DEB = \frac{1}{2} CB \times AD - \frac{1}{2} DB \times AD \times \frac{CB - DB}{2} \times AD \times \frac{1}{2} CD \times$$

AD; ac proinde trianguli cujuslibet superficies, æqualis est dimidio producto ex basi in altitudinem.

COR. II. Cum parallelogrammum quodlibet dividi possit in duo triangula æqualia, quæ ipsam habeant parallelogrammi basim, eamdemque altitudinem; patet generatim, superficiem parallelogrammi cujuscumque esse productum ex basi in altitudinem.

COR. III. Quotlibet triangula, ideoque etiam quotlibet parallelogramma inter easdem parallelas, et super eadem vel æquali basi constituta sunt æqualia. Ergo etiam triangula inter easdem parallelas cum parallelogrammis constituta, et super eadem

ba-

basi sunt parallelogrammorum dimidia, ac proinde etiam inter se æqualia. Ex hac propositione pendet vulgaris demonstratio theorematis, quod alio modo jam demonstravimus; nempe *quadratum hypothenusæ in triangulo rectangulo æquale esse quadratis laterum*. Hanc vero Geometriæ fœcunditatem, totiusque doctrinæ geometricæ conjunctionem, variis exemplis Tyronibus sæpe ostendere debet peritus magister.

COR. IV. Cum triangula sint, ut dimidium productum ex basi in altitudinem, erunt etiam, ut productum totum; hoc est, triangulorum superficies sunt in ratione composita basium, et altitudinum; ac proinde si bases fuerint æquales, triangula erunt inter se, ut altitudines; si autem altitudines fuerint æquales, erunt inter se, ut bases.

COR. V. Si altitudo trianguli unius, sit ad trianguli alterius altitudinem, ut basis secundi trianguli ad basim primi, hoc est, si bases sint in ratione inversa altitudinum, triangula sunt æqualia. In hoc enim casu habetur proportio, in qua productum extremorum æquale est producto mediorum, hoc est, productum ex altitudine primi trianguli in basim, æquale est producto ex altitudine secundi trianguli in suam basim, ideoque triangula sunt æqualia; et viceversa sa si triangula sunt æqualia, erunt bases in ratione inversa altitudinum.

COR. VI. In triangulis similibus, superficies sunt in ratione duplicata laterum homologorum. Etenim cum triangula sint in ratione composita basium, et altitudinum, atque (ex hyp.) sint similia, loco basis substitui poterit altitudo et contra. Quare triangula similia sunt, ut quadrata laterum homologorum.

Prop. 2. *Superficies polygoni regularis æqualis est dimidio producto ex perpendiculari per centrum polygoni ad latus unum demissa in polygoni circumferentiam.* Etenim triangula omnia, in quæ resolvitur polygonum regulare, sunt æqualia (Prop. 5. cap. 3.) ideoque eamdem habent altitudinem CI (Fig. 11.) Sed superficies polygoni regularis $= CI \times \frac{1}{2} AB + CI \times \frac{1}{2} BD + CI \times \frac{1}{2} DE$, cet. Quare cum $AB + BD + DE$, cet. sit tota polygoni peripheria; patet, superficiem totam polygoni æqualem esse producto ex altitudine CI in dimidiam polygoni peripheriam, vel dimidio producto ex peripheria polygoni in altitudinem.

COR. I. Superficies circuli, æqualis est di-

dimidio producto ex radio in circumferentiam.

COR. II. Si ex centro circuli ad circumferentiam ducantur radii duo, pars circuli duobus radiis, et arcu comprehensa *Sector* dicitur. Evidens autem est, hujus sectoris superficiem, æquaiem esse dimidio producto ex arcu in radium.

Prop. 3. *Figurarum similium superficies sunt in ratione duplicata laterum homologorum.* Etenim triangula homologa, in quæ reducuntur figuræ similes, sunt earumdem figurarum partes similes (Prop. 4. cap. 4.) ac proinde triangula homologa erunt, ut polygona tota, sed triangula similia sunt in ratione duplicata laterum homologorum; ergo in eadem etiam ratione sunt figuræ similes quælibet.

COR. I. Superficies circulorum sunt, ut quadrata radiorum: vel diametrorum.

SCHOL. Ex propositionibus præcedentibus nota quidem est ratio, quam habent variæ circulorum peripheriæ, atque etiam illorum superficies ad suos radios. At ratio accurata inter circuli circumferentiam, illiusque diametrum nondum definiri potuit, ita ut magnitudine diametri numeris expressa, numeris accurate exprimi non possit circuli circumferentia, ac proinde nec ipsa circuli superficies. In hoc sensu intelligi debet,

bet, quod vulgo dicitur, nondum scilicet inventam esse circuli *quadraturam*, quod quidem *quadraturæ* nomen adhiberi solet, eo quod *quadratum* sit cujuslibet superficiei communis mensura, ut jam demonstravimus. Eo igitur reducti sunt Geometrarum conatus, ut ad illam quadraturam proxime, et quantum voluerint, accedant; hanc tamen accurate non attingant. Qua ratione autem hanc *approximationem* tentare soleant Geometræ, et ex ipsis elementis licebit intelligere. Divisus concipiatur circulus primo in quatuor partes æquales, deinde in 8, in 16, in 32, in 64, in 128, cet. prout cuique libuerit: et concipiamus per ea divisionum puncta, tangentes et chordas respective ductas; habebuntur polygona duo, quorum unum *inscriptum* circulo, alterum autem *circumscriptum*; quæ quidem ambo constant triangulis æqualibus. Porro per methodos explicatas, in his triangulis haberi semper poterunt bases, quæ in primo casu sunt circulorum chordæ, in altero autem tangentes; ac proinde omnium quoque chordarum, et tangentium summa innotescet, hoc est, perimeter polygoni inscripti, quæ circuli circumferentia proxime minor est, et polygoni circumscripti perimeter, quæ proxime major est: ita ut defectus, vel excessus, quantum cuique placuerit, tenuis sit, et intra angustissimos limites contrahatur. Hac methodo Archimedes invenit, diametrum ad peripheriam esse in ratione 7 ad 22; ita ut exiguus omnino sit peripheriæ sic inventæ excessus supra veram. Hæc eadem ratio subtilius ab aliis quæsita est, et statuitur, ut 1 ad 3. 14159265, cet. perductis decimalibus numeris usque ad notas 127; quæ quidem *approximatio* est fere infinita. Sed omnium vulgatissima ratio diametri ad peripheriam ea est, quam exprimunt numeri 113 et 355. Quare data circuli diametro habebitur peripheria, si hæc fiat proportio 113 ad 355, ut diameter data ad peripheriam quæsitam, hæc multiplicetur per quartam diametri partem, habebitur superficies circuli, sive, ut vocant, *area*. Hæc pauca dicta sint de ratione diametri ad peripheriam, sive de quadratura circuli, quam audacter se invenisse non raro jactitant viri Geometriæ imperiti, qui ipsum quidem quæstionis statum, ut plurimum, non intelligunt.

Simili methodo figura quælibet curvilinea generatim dividi potest in partes rectilineas. Aliquando, per Geometriam sublimiorem, figuræ curvilineæ area accurate haberi potest; sed commodissima, et generalis est praxis, qua figuræ curvilineæ circumferentia in minimas partes, et *physice*

 rec-

rectilineas dividitur, et deinde figuræ totius area investigatur, ut fieri solet in polygonorum mensura.

Porro dum superficierum magnitudinem *pedibus quadratis*, aut alia qualibet mensura exprimimus, id nequaquam haberi debet tamquam contrarium iis, quæ de numerorum *concretorum* multiplicatione demonstravimus in Arithmetica: non enim pedes per pedes multiplicantur. Ita dum parallelogrammi superficies invenitur, multiplicando basim per altitudinem, hac operatione hoc unum significant Geometræ; si nempe habeantur parallelogramma duo, adhibeaturque quantitas *linearis* quælibet a pro communi basium, et altitudinem mensura, et sit B numerus integer, aut fractus, rationalis, vel irrationalis, exprimens, quoties basis parallelogrammi unius contineat quantitatem a; atque H exprimat, quoties altitudo ejusdem parallelogrammi eamdem contineat mensuram. Item sit b numerus exprimens, quoties mensura a contineatur in basi alterius parallelogrammi; h autem exponat, quoties altitudo parallelogrammi ejusdem contineat mensuram a; parallelogrammorum illorum superficies erunt inter se; ut productum ex duobus numeris B et H ad productum ex numeris duobus b et h. Hæc est genuina hujus operationis notio. Quare dum dicitur, parallelogrammi superficiem æqualem esse producto ex basi in altitudinem, *æqualitas* proprie dicta intelligi non debet; sed mera proportio. Hæc eadem observatio ad Physicam sæpe transferri debet, ubi de spatii, velocitatis, et temporis mensura sermo est.

SEC-

SECTIO III.

De Geometria solidorum.

CAPUT I.

De Solidorum genesi, et proprietatibus.

PROP. I. *Solidorum rectilineorum genesim explicare.* Si figura rectilinea AGR supra immotam rectam AE (Fig. 28.) motu sibi semper parallelo feratur; solidum AGROFE inde genitum *prisma* dicitur; et *rectum* vocatur, si AE describenti plano recta fuerit, sin minus, *obliquum.* Si planum describens fuerit parallelogrammum, solidum inde genitum dicitur *parallepipedum.* Si autem planum describens sit quadratum, solidum *cubus* nuncupatur. Basis solidi, seu planum describens potest esse polygonum quodlibet, et solidum inde genitum *prismatis* nomen retinet, si e singulis polygoni angulis extra planum consurgant lineæ æquales, et parallelæ terminantes rectilineam solidi faciem, at si rectæ lineæ in apicem coeunt, solidum *pyramis* dicitur (Fig. 29.)

COR. I. Prisma igitur opposita latera AGR, EFO æqualia habet, similia, et parallela; cum AGR fluendo per AE motu sibi semper parallelo tandem congruat cum EFO. Præterea dum planum AGR motu sibi parallelo describit prisma AGROFE, latera AG, GR, RA motu sibi semper parallelo describunt parallelogramma AEFG, GFOR, ROEA; ac proinde prisma tot parallelogrammis circumcirca terminatur, quot sunt latera plani describentis.

COR. II. Parallepipedum sex parallelogrammis terminatur; cubus autem sex quadratis æqualibus. Nam præter facies quatuor, parallelo laterum motu genitas, sunt etiam facies duæ oppositæ parallelo basis motu descriptæ. Illa autem basis in primo casu est parallelogrammum, in altero autem quadratum.

COR. III. In pyramide si omnia latera basis sunt æqualia inter se, et latera rectilinea ipsius pyramidis, pariter inter se æqualia, erunt omnes facies triangula isoscelia æqualia.

COR. IV. Quævis sectio prismatis, vel pyramidis facta plano basi parallelo est figura prorsus similis basi. Etenim sectionis parallelæ singula latera sunt singulis lateribus basis parallela; cum sint intersectiones planorum parallelorum cum iisdem planis.

Qua-

Quare singuli anguli homologi erunt æquales (Prop. 2. cap. præc.); ac proinde sectio basi similis est.

COR. V. In prismate, sectio basi parallela ipsi basi æqualis est; in pyramide autem latera sectionis homologa sunt minora, in ratione distantiæ sectionis à vertice, ad distantiam basis ab eodem. In prismate patet æqualitas, cum facies sint parallelogramma; ac proinde latera sectionis homologa æqualia sunt lateribus basis; ideoque sectio prorsus æqualis est basi. In pyramide proportio etiam patet; nam ob sectionem parallelam in unaquaque facie habebuntur triangula duo similia.

COR. VI. Omnia prismata collata inter se, atque etiam omnes pyramides inter se comparatæ, si super basibus æqualibus, inter eadem plana parallela constituantur, solida respective æqualia comprehendunt. Secentur enim quotcumque plana, quæ sint basibus parallela; sectiones unius prismatis, vel pyramidis æquales semper erunt sectionibus respondentibus alterius. Nam in prismate omnes erunt æquales eidem basi; in pyramide erunt ipsi basi similes, et singula latera in una pyramide erunt ad latera homologa in pyramide altera in eadem data ratione, nempe in ratione distantiæ basis à vertice ad sectionis distantiam ab eodem vertice, quæ quidem ratio eadem est, ut patet; cum pyramides terminentur plano basium, et sectionum planis parallelo. Porro solida illa concipi possunt, tamquam composita ex iis omnibus sectionibus, quarum singulæ cum singulis æquales sint; ergo erunt et ipsa solida æqualia.

COR. VII. Pyramides basium æqualium in eumdem apicem desinentes, vel eamdem utcumque altitudinem habentes sunt æquales. Nam per communem verticem ductum intelligatur planum basium planis parallelum; pyramides semper erunt super æqualibus basibus, et in iisdem planis parallelis. Similiter si bases in eodem plano constituantur, vertices in eadem altitudine, ad idem planum basibus parallelum terminabuntur.

COR. VIII. Si pyramides eamdem habeant altitudinem; erunt inter se, ut bases. Etenim basis major divisa intelligatur, si fieri possit, in partes basi minori æquales; concipi poterit pyramis major tamquam composita ex diversis pyramidibus, quæ basim habeant basi minori æqualem; sed pyramides illæ singulæ erunt minori pyramidi æquales; ergo pyramis major est ad minorem, ut pyramidum æqualium numerus in majori pyramide, ad pyramidem minorem, hoc est, pyramides illæ sunt inter se, ut bases.

At

At si basis major minorem basim non contineret accurate, sed tamen habeant aliquam communem mensuram; dividi fingantur bases in partes huic mensuræ communi æquales: jam pyramides duæ, tot alias continebunt pyramides æquales, quot sunt in utraque pyramide partes communes, ac proinde pyramides sunt etiam, ut bases.

Tandem si pyramidum bases forent incommensurabiles, adhibeatur aliqua mensura, quæ minuatur in infinitum, donec fiat utriusque basis mensura communis, quemadmodum dictum est de figurarum similitudine; eodem modo patet; in hoc etiam casu, pyramides esse inter se; ut bases.

PROP. II. *Solidorum curvilineorum genesim explicare.* Si recta sublimis motu sibi semper parallelo, circuli circumferentiam radat, figura solida hoc motu genita (Fig. 29.) *cylindrus* dicitur. At si recta per aliquod punctum fixum, et sublime perpetuo transiens, altera extremitate radat circuli circumferentiam, solidum AGM (Fig. 30.) hoc motu genitum, *conus* vocatur. Utriusque autem figuræ *basis* vocatur circulus, cujus circumferentiam recta percurrit. Patet, cylindrum duobus circulis, conum autem circulo unico terminari. Recta per utriusque circuli centrum in cylindro transiens,

siens, in cono autem per basis centrum, ipsumque coni verticem, *axis* dicitur. Si axis sit perpendicularis basi, cylindrus, vel conus *rectus*, solidum genitum appellatur; secus autem, *obliquus* vocatur. Si autem basis fuerit quævis alia curva, solidum dicitur *cylindricum* vel *conoidicum*. Fig. 29. refert cylindrum rectum, figura autem 30. conum rectum repræsentat. Si semiraculus AHB (Fig. 31.) circa immotam diametrum AB in orbem ducatur, donec ad pristinum situm redeat, solidum inde genitum *sphæra* dicitur.

COR. I. Si basis prismatis, vel pyramidis, aucto numero laterum, et imminuta magnitudine in infinitum, abeat in curvam continuam, prisma abit in solidum cylindricum, pyramis in conoidicum. Item prisma, cujus latera sunt perpendicularia basi, mutatur in cylindrum rectum; pyramis vero, in qua basis latera sunt æqualia, et distantiæ à vertice æquales, abit in conum rectum.

COR. II. Si sphæra plano quovis secetur, sectio erit circulus, qui erit omnium maximus, si sectionis planum transeat per centrum sphæræ, ac deinde erit major, vel minor, prout planum sectionis magis, vel minus recedat à centro sphæræ. Si enim sectio FIH, ad cujus planum ducatur diameter

ter perpendicularis AB, quæ plano secanti occurrat in E. Si punctum E congruat cum centro C: patet, rectas EI fore radios sphæræ. Si autem cadat extra in triangulis CEI, CEF, anguli ad E erunt recti, latus CE commune, et basis CI = CF; quare quodvis latus EI = EF, ac proinde in utroque casu sectio erit circulus, cujus centrum E; illud vero centrum, in primo casu coincidet cum centro sphæræ. Patet autem, ob angulum rectum in E, radium circuli EF semper minorem fore radio sphæræ CF, nisi radii illi congruant; abeunte E in C. Evidens etiam est, eo minorem fore chordam HF, nempe circuli diametrum, quo major fuerit distantia CE.

COR. III. Sphæra considerari potest tamquam composita ex pyramidulis æqualibus, numero infinitis, et infinite parvis, quarum bases sunt in ipsa sphæræ superficie, vertex autem communis est ipsum sphæræ centrum.

SCHOL. In Capite præcedenti, ubi prismata et pyramides inter se comparavimus, aliqua dubitatio suboriri posset, quod nempe solida è superficiebus composita habere videamur. Et re quidem vera linea producitur motu continuo puncti, superficies motu continuo superficiei; at linea non ex punctis, sed ex lineolis, superficies ex areo-

areolis, non ex lineis, solidum ex spatiolis solidis, non ex superficiebus componitur. Neque genuinam linearum, superficierum, et solidorum notionem Tyronibus proponunt nonnulli magistri, qui lineas tamquam è punctis, superficies ex lineis, solida ex superficiebus composita repræsentant. Itaque dum (in cor. 6. cap. præc.) ex sectionum æqualitate, prismatum, et pyramidum æqualitatem concludimus; id non debet intelligi, quasi prismata, et pyramides ex sectionibus planis componi velimus; nam loco sectionis unius, considerari possent sectiones duæ infinite proximæ, quarum (in cit. coroll.) eadem foret distantia sive altitudo, ut patet ex planorum parallelismo. Igitur minima solida duabus sectionibus infinite vicinis comprehensa, forent æqualia in casu proposito; quare communem altitudinem negligere licuit, solamque sectionum æqualitatem considerare; id vero facere numquam licet, nisi præter sectionum æqualitatem, ibi æquales etiam sint binarum quarumcumque indefinite proximarum distantiæ. Porro evidens est, hanc methodum, ad *exhaustionum* methodum sæpius explicatam reduci, ac proinde ad severitatem geometricam esse omnino compositam.

CA-

CAPUT II.

De Solidorum mensura.

PROP. I. *Prismatis, cujus latera rectilinea sunt basi perpendicularia, superficiem metiri.* Singulæ prismatis facies in hoc casu sunt rectangula sub singulis lateribus basis, singulisque prismatis lateribus rectilineis contenta; ideoque omnium hujusmodi rectangulorum summa, est tota basis perimeter, in latus rectilineum ducta. Quare prismatis superficies, demptis basibus, est productum ex perimetro basis in unum ex lateribus rectilineis. Huic producto addatur dupla basis superficies, habebitur superficies tota prismatis.

COR. I. Cum sex quadratis æqualibus terminetur cubus, habebitur tota cubi superficies, si quadrati unius superficies sexies sumatur. Quia vero parallepipedum sex terminatur superficiebus, quarum duæ quælibet oppositæ sunt æquales; inveniantur tres inæquales superficies, illarumque summa bis sumatur: habebitur tota parallepipedi superficies.

COR. II. Cum basis cylindri considerari post sit tamquam polygonum regulare, ex la-

lateribus numero infinitis, et infinite parvis compositum; cylindrus haberi poterit, tamquam prisma *infinitilaterum*: cujus proinde superficies habebitur, si tota basis perimeter, seu circuli circumferentia ducatur in altitudinem, et producto addatur dupla basis, sive circuli superficies.

PROP. II. *Pyramidis, cujus latera omnia sunt æqualia, et basis latera sunt etiam æqualia, superficiem invenire*: Cum facies omnes pyramidis in hoc casu sint triangula isoscelia æqualia; erit omnium triangulorum summa æqualis dimidio producto ex tota basis perimetro in perpendiculum ex vertice pyramidis ad latus quodlibet basis demissum; nam triangulum quodlibet æquatur dimidio producto ex latere basis ducto in suum perpendiculum. Hæc autem singula perpendicula sunt æqualia; habebitur ergo in hoc casu pyramidis superficies, dempta basi.

COR. I. Conus est pyramis *infinitilatera*, ac proinde coni recti superficies æqualis est dimidio producto ex circumferentia basis in longitudinem, sive latus coni, dempta tamen basi.

COR. II. Si pyramis plano basi parallelo *truncata* ponatur, facies omnes reliquæ pyramidis versus basim abeunt in trapezia æqualia; hæc autem trapezia singula dividi di possunt in triangula duo æqualia, quorum bases sunt sectionis, et basis latera, altitudo autem communis est ipsarum basium distantia perpendicularis. Quare singulorum triangulorum mensura est dimidium productum ex singulis basibus in ipsam basium distantiam, ac proinde superficies pyramidis truncatæ æquatur dimidio producto ex summa perimetri basis, et sectionis, in distantiam perpendicularem basium.

COR. III. Si conus rectus plano basi parallelo truncatus ponatur, coni hujus truncati versus basim superficies æqualis est dimidio producto ex peripheriarum summa, in coni truncati longitudinem, sive latus. Res autem facilius obtinetur, si inveniatur circulus DE (Fig. 30.), cujus peripheria æqualis sit semisummæ peripheriarum BC, GM. Sumatur nempe punctum D medium inter B et G, ducaturque recta DE parallela sectioni BC, hæc erit diameter circuli quæsiti. Etenim ductis perpendicularibus Bf, Dh; erit ob triangulorum DBf, DGh similitudinem Bf: Df = Dh: Gh, ac proinde, ob Bf = Dh, erit etiam Df = Gh: quare eadem est differentia inter diametros BC et DE, quæ est inter diametros DE et GM; illa nempe differientia est dupla rectæ Df, vel Gh; ideoque recta DE est media proportionalis arith-

me-

metica inter BC, et GM, seu quod idem est, diameter DE æqualis est semisummæ diametrorum BC, et GM. Sed circuli, utpote figuræ similes, suas habent peripherias diametris proportionales (Schol. cap. 3.); ergo circumferentia circuli, diametro DE descripti est media proportionalis arithmetica inter circumferentias diametris BC, et GM descriptas. Habebitur ergo coni truncati BCGM superficies, si multiplicetur circuli medii DE circumferentia per latus coni BG.

COR. IV. Si concipiatur cylindrus rectus KQTM (Fig. 32.) circumscriptus sphæræ, habens pro axe diametrum AB, pro basi circulum sphæræ maximum; superficies segmenti sphæræ HAF æqualis erit superficiei cylindri QNRK, et area totius sphæræ æqualis areæ totius cylindri, demptis basibus. Etenim concipiatur particula quævis Ff circuli *genitoris* ita parva, ut infinite accedat ad lineam rectam, productaque Ff usque BA in G, recta FfG generabit superficiem coni recti, et Ff superficiem coni truncati, cujus mensura erit ipsa Ff ducta in semisummam peripheriarum, quarum radii sunt EF et ef; ducta autem PO, ita ut peripheria radio PO descripta æqualis sit semisummæ peripheriarum prædictarum: erit coni truncati superficies, ut recta Ff ducta

in

in circumferentiam; cujus radius est OP. Jam vero ob triangula similia rectangula Gef, GEF, GPO, OPC, erit Ee vel Nn: Ff = GE : GF = GP : GO = PO: CO, vel EN, ob EN = BT = CO, ideoque Nn × BN = fF × PO, atque ideo cum peripheriæ sint, ut radii; erit productum ex Nn in peripheriam radio EN descriptam æquale producto ex Ff in peripheriam radio PO descriptam. Primum autem productum exprimit aream genitam ab Nn, alterum vero aream genitam ab Ff. Quare tota area genita à toto arcu AfF æquatur toti areæ genitæ à recta QN; et abeunte REN in MBT, tota sphæræ superficies totius cylindri superficiei æqualis est, demptis basibus.

COR. V. Superficies sphæræ æqualis est producto ex circumferentia circuli maximi in axem, sive diametrum sphæræ, ac proinde circuli maximi superficie quadruplo major est (Cor. 1. Prop. 2. cap. 2.)

COR. VI. Superficies tota cylindri circumscripti: inclusis basibus, est ad totam sphæræ superficiem, ut 3. ad 2. Nam superficies sphæræ id hoc casu basi cylindri quadruplo major est, superficies autem tota cylindri sua basi sexies major est.

PROP. III. *Prismatis soliditatem metiri.* Polygonum, quod prismatis basis est, in ipsam prismatis altitudinem ducatur: habebitur soliditas tota prismatis, ut patet ex genesi ipsius solidi, quod producitur motu parallelo basis, ac proinde basis, sive polygoni superficies, per altitudinem multiplicari debet.

COR. I. Soliditas cubi habetur multiplicando faciem quadratam basis, per ipsum quadrati latus. Parallepipedi soliditas invenitur, si parallelogrammi superficies per altitudinem multiplicetur; habetur autem soliditas cylindri, si basis circuli nempe superficies, in altitudinem cylindri ducatur.

COR. II. Eadem in solidorum mensura ratiocinatione instituta, quam in metiendis superficiebus adhibuimus, evidens est, cubum esse communem solidorum mensuram, non secus ac quadratum est mensura superficierum. Itaque pes solidus continet pollices cubicos 1728, nempe tres habet dimensiones, quarum singulæ 1 pedi, sine 12 pollicibus æquantur; et ita dicendum de alia qualibet mensura.

PROP. IV. *Pyramidis soliditatem invenire.* Si ad centrum I cubi GL fiat quadrata pyramis (Fig. 33.), cujus basis sit cubi facies quadrata; evidens est, totam cubi soliditatem dividi in sex hujusmodi pyramides quadrilateras æque altas et æqualium basium; ac proinde æquales. Igitur pyramis

mis quælibet erit sexta pars cubi ; sed cubi mensura æqualis est producto ex basi in altitudinem ; ergo illarum pyramidum quælibet erit æqualis producto ex basi in sextam partem altitudinis HP , vel , quod idem est, tertiam partem altitudinis IP. Ergo hujusmodi pyramidis soliditas æqualis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis , seu , quod idem est , æquatur tertiæ parti cubi ejusdem basis , et ejusdem altitudinis.

Generatim pyramis quælibet , æqualis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis , sive pyramis quælibet est tertia pars prismatis eamdem cum ipsa pyramide basim habentis , eamdemque altitudinem. Etenim sit pyramis quælibet , fingaturque cubus, cujus altitudo sit altitudinis pyramidis dupla. Jam si ex centro cubi alia exeat pyramis , cujus basis sit facies quadrata cubi; evidens est , hanc pyramidem habere eamdem cum proposita pyramide altitudinem, ac proinde pyramides illæ sunt inter se , ut bases (Cor. 8. Prop. 1. cap. præc.) Sed soliditas pyramidis cubi basi innixæ æqualis est producto ex tertia parte altitudinis in basim ; ergo ob altitudinem in utraque pyramide erit soliditas propositæ pyramidis æqualis producto ex tertia parte altitudinis in basim : ideoque generatim , pyramis quælibet est tertia pars prismatis ejusdem basis, et altitudinis.

COR. I. Cum cylindrus tamquam prisma infinitilaterum, itidemque conus tamquam pyramis infinitilatera considerari possint; erit conus tertia pars cylindri eamdem habentis basim, et eamdem altitudinem.

COR. II. Cum sphæra haberi possit tamquam composita ex infinitis pyramidulis, quarum vertex communis est in centro sphæræ, bases autem omnes simul sumptæ totam occupant sphæræ superficiem; singulæ illæ pyramides æquales sunt producto ex tertia parte radii in suas bases, ac proinde tota pyramidum summa æqulis est producto ex omnibus basibus simul sumptis, hoc est, ex superficie sphæræ in tertiam partem radii. Ergo tota sphæræ soliditas habebitur, multiplicando tertiam radii partem per circuli maximi superficiem quater sumptam.

COR. III. Cum soliditas cylindri sit productum ex diametro in circulum maximum, soliditas sphæræ æqualis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti.

PROP. V. *Solida duo similia sunt in ratione triplicata laterum homologorum.* Ex solidorum definitione, et ex præcedentibus propositionibus evidens est, corporis cujuslibet soliditatem esse semper, ut producductum ex aliqua superficie in aliquem axem, vel aliquam altitudinem; superficies autem ex duabus dimensionibus componitur, ergo solidum quodlibet est in ratione composita trium dimensionum homologarum, seu ejusdem nominis: sed solida similia ea dicuntur, quæ singulas dimensiones homologas habent proportionales; ergo solida similia sunt in ratione composita ex tribus dimensionibus proportionalibus; ac proinde in ratione triplicata unius cujuslibet dimensionis homologæ.

COR. I. Sphæræ sunt in ratione triplicata diametrorum. Etenim sphærarum soliditates sunt inter se, ut circuli maximi superficies in radium ducta (Cor. 2. Prop. præc.) Sed circulorum superficies sunt in ratione duplicata semidiametrorum (Cor. 1. Prop. 3. Sect. præc.): ergo sphæræ sunt in ratione tripllcata semidiametrorum, vel diametrorum. Idem facile patet ex sphærarum similitudine; cum enim sphærarum soliditates per circuli maximi superficiem determinentur, sintque circuli figuræ similes; evidens est sphæras esse solida similia, ac proinde in ratione triplicata diametrorum.

COR. II. Cubi sunt solida similia, itemque similes sunt cylindri sphæris circumscripti (Cor. 3. Prop. præc.) Ergo cubi sunt in ratione triplicata laterum, et cylindri sunt in ratione triplicata diametrorum.

COR. III. Prismata omnia, si inter se comparentur, ac pyramides omnes inter se; erunt ut producta ex basibus, et altitudinibus; quare si bases fuerunt æquales, erunt solida, ut solæ altitudines, si autem altitudines fuerint æquales, erunt ut solæ bases. Si ea solida fuerint æqualia, altitudines erunt basibus reciproce proportionales, et viceversa, si bases fuerint altitudinibus reciproce proportionales, solida erunt æqualia. Tandem si bases fuerint similes, et altitudines lateribus basium homologis proportionales, solida erunt in ratione triplicata laterum homologorum, vel altitudinum.

SCHOL. De solidorum rectorum superficiebus in Capite præcedenti sermonem habuimus; verum si solida fuerint obliqua, superficierum mensura sublimiorem Geometriam aliquando postulat. Quod spectat solida superficiebus planis terminata, res est nullius difficultatis. Cum enim solidorum illorum facies, sint polygona rectilinea, ad triangulorum superficiem reduci semper poterit illorum mensura. Prismatis cujusvis exemplo rem illustrabimus. Per punctum quodlibet in aliquo prismatis latere, traductum intelligatur planum ad latus illud per-

perpendiculare ; idem planum alia omnia prismatis latera, utpote parallela, perpendiculariter quoque secabit, atque sectio erit polygonum, cujus unumquodque latus ad duo parallela prismatis latera erit perpendiculare. Quare superficies uniuscujusque faciei æquabitur producto ex unoquoque sectionis latere, in prismatis latus quodlibet ob laterum omnium æqualitatem ; ac proinde prismatis superficies æquatur producto ex omnibus lateribus sectionis, hoc est, ex tota sectionis perimetro in prismatis latus quodlibet. Jam si prisma rectum ponatur, planum lateri perpendiculare coincidit cum basi, ideoque superficies prismatis æqualis est producto ex perimetro basis in altitudinem, ut ante ; quod idem valet in superficie cylindri, qui potest considerari tamquam prisma infinitilaterum. At si rectus non fuerit cylindrus, planum per cylindri axem, vel latus quodlibet perpendiculariter traductum, sectione sua cum cylindro obliquo generabit curvam, quæ *Ellipsis* vocatur à Geometris, de qua in Appendice mox addenda pauca dicemus. Erit autem cylindri obliqui superficies æqualis producto ex Ellipsis circumferentia in latus cylindri. Quod spectat coni obliqui superficiem, patet, eam ad sectoris circularis superficiem, ut fit in cono recto, reduci non posse, cum in cono obliquo æquales non sint lineæ omnes ductæ ex vertice coni in basim. Sed hæc pauca monuisse satis sit; hæc enim ad Geometriæ elementa non pertinent.

APPENDIX.

De lineis curvis.

Lineæ curvæ notionem ita simplicem esse jam observavimus; ut explicatione ulla vix clarior effici possit; quare prætermissa definitione, de lineis curvis generatim, et deinde de Parabola, et Ellipsi pauca exponemus; alia deinde, ubi necessitas occurret, demonstraturi.

In curva qualibet (Fig. 34.) recta AD, lineas parallelas, ut MM, NP, æqualiter dividens, *diameter* curvæ appellatur; *axis* autem vocatur, si easdem parallelas ad angulos rectos secet. Punctum A in axe *vertex* curvæ dicitur: rectæ autem parallelæ MM, NP dicuntur *ordinatæ*: pars diametri, vel axis inter punctum A, et ordinatam comprehensa, dicitur *abscissa*. *Æquatio* curvæ appellatur formula algebraica, quæ relationem inter semiordinatas, et abscissas exprimit. Ita demonstratum est in in circulo (Fig. 16.) quadratum rectæ EO æquale esse producto ex CO in OL. Jam diameter CL dicatur a, sitque $CO = x$, et $EO = y$. Erit $OL = a - x$; ac proinde

$y^2 = ax - x^2$ quæ est æquatio ad circulum. Ex his evidens est, ordinatas, et abscissas curvæ, esse quantitates indeterminatas; hæ autem determinantur, sumptis pro arbitrio alterutrius quantitatis valoribus. Ita si in æquatione ad circulum fiat $x = 0$, 2, 3, 4, cet. Et $a = 10$, invenietur $y =$ 0, 3, 4, $\sqrt{24}$, cet. Quare, si ex singulis punctis erigantur perpendiculares hoc modo determinatæ, et per singulas perpendicularium extremitates ducatur curva, hæc ad quæsitam curvam eo accuratius accedet, quo plures erunt hujusmodi perpendiculares. Ordinatæ non solum ad axem, sed ad quamlibet diametrum referri possunt, atque etiam initium abscissarum non à solo diametri, aut axis vertice computari potest, sed etiam ab aliis punctis. Ita in circulo abscissæ computari possunt vel ab ipso diametri vertice, vel etiam à centro, atque ita prodeunt diversæ ejusdem curvæ æquationes. Verum quocumque modo curva consideretur, probe distingui debent rectæ ad dexteram, vel ad sinistram jacentes, et ideo dicuntur *positivæ*, vel *negativæ*. Has qui-

quidem vel illas appellare licet positivas, vel negativas ; at ubi appellatio determinata est, hæc semper retineri debet : quare semiordinatæ, et abscissæ possunt esse vel negativæ, vel positivæ. Ratio autem facile patet ex iis, quæ de quantitatibus positivis, et negativis in Algebra observavimus.

II. Curva quælibet considerari potest vel tamquam curva *polygona*, vel tamquam curva *accurata*. Primus considerandi modus nihil aliud significat, nisi curvam esse polygoni inscripti, et circumscripti *limitem*. Unum autem probe observandum est in curvarum consideratione ; si nempe curvam aliquam velut polygonam quis tractaverit, cavere deinde debet, ne eamdem curvam velut accuratam habeat, et viceversa ; atque etiam eadem regula tenenda est, in duarum curvarum consideratione, ambæ scilicet vel tamquam polygonæ, vel tamquam accuratæ considerari debent ; inde enim in rebus physicis orti sunt errores aliqui. Rem exemplo demonstravimus. In circulo quocumque PQD (Fig. 35.) ducantur chordæ æquales, et infinitesimæ PD, DE, producaturque PD in O ; donec DO = PD. Præterea agatur per puncta O et E recta OQ, et per punctum D tangens DN rectæ OQ occurrens in N ; erit OE = 2NE. Etenim triangulum DOE est isoscele : præteterea anguli ODE mensura est dimidius arcus PDE ; anguli autem NDE mensura est dimidius arcus DE ; ergo recta DN æqualiter dividit angulum ODE , ideoque ob DO = DE , erit OE = 2NE. Jam ponatur corpus aliquod describere arcum circuli infinitesimum PDE , vi aliqua urgente secundum directionem datam , quæ in loco D corpus à linea recta retrahat. Si consideratur circulus tamquam polygonum, chorda infinitesima PD erit spatiolum, tempore præcedenti infinitesimo percursum, eritque DO lineola æqualis et in directum posita spatiolum alterum , tempore subsequenti æquali descriptum. Quare si ducatur OE , directioni vis in D agentis parallela, erit hæc lineola OE vis hujus effectus ; vi enim illa corpus ex O transit ad arcum circuli. At si consideretur circulus tamquam accuratus , tangens DN erit lineola vi urgente descripta , ideoque NE vis hujus effectus. Itaque in curva polygona vis effectus representantur per OE , et in curva accurata per NE. Quare in virium mensura retinenda est eadem curvarum consideratio, alioqui effectus duplo major æstimaretur. Verum quia in virium doctrina , ipsarum virium effectus dumtaxat comparamus , res perinde se habet , quæcumque adhibeatur curvarum consideratio ; eadem enim prodit

dit effectuum proportio. Hæc autem, quæ modo explicavimus, referuntur ad virium centralium doctrinam in Physica generali demonstrandam.

III. Hæc eadem doctrina ad curvam quamlibet transferri potest; quod ut intelligatur, curvarum descriptionem generatim considerabimus. Curva quælibet plana, considerari solet tamquam ex motu puncti, et perpetua directionis mutatione in plano genita: hic non agimus de curvis, quarum puncta singula in eodem non sunt plano, et ideo dicuntur *duplicis curvaturæ*. Itaque evidens est, curvam quamlibet ad lineas duas in plana positione datas, ordinatas nempe, et abscissas, referendam esse; ad determinandam nempe alicujus curvæ naturam, oportet puncti mobilis vestigia, secundum certam, eamdemque legem ad rectas positione datas referri, ita ut punctum illud secundum eamdem omnino legem, in quolibet infinitesimo mutatæ directionis angulo moveatur; alioqui non eamdem, sed plures curvas describeret (contra hyp.). Ex hac curvarum consideratione aliqua sane utilissima colliguntur. 1.° Recta curvam quamlibet in unico puncto tangit. Ponamus enim, rectam in duobus, tribusve punctis contiguis curvam tangere; jam

jam punctum mobile directionem perpetuo non mutaret, quod repugnat. 2.° Si descriptus intelligatur circulus, qui communem cum data curva tangentem in aliquo puncto habeat, ita ut cujuscumque circuli minoris, eamdem habentis tangentem, arcus aliquis utrinque circa punctum contactus sit intra curvam, cujuscumque vero circuli majoris arcus sit extra curvam; hunc circulum dicimus curvæ *osculatorem* in dato puncto, et curvæ ipsius *curvaturam* dicimus *circulari curvaturæ analogam*. Evidens autem est, ex Geometriæ elementis, circulis osculatoris centrum, positum esse in concursu duarum perpendicularium ad eamdem curvam, ubi puncta duo curvæ ad se invicem in infinitum accedunt; hæc enim est circuli proprietas, ut rectæ à centro ad peripheriam ductæ sint ipsi peripheriæ perpendiculares; talis autem recta è centro circuli osculatoris ad curvam ducta vocatur *radius osculator*. 3.° Quamvis inter tangentem, et arcum circuli, transire possint alii circuli innumeri, attamen inter arcum curvæ, et arcum circuli osculatoris nullus alius circulus transire potest; nam (ex def.) quicumque minor circulus est intra curvam; quicumque major est extra ipsam. Tota circulorum osculatorum utilitas

eo

eo reducitur, ut omnium curvarum arcus infinitesimus considerari possit tamquam circularis. Etenim arcus infinitesimus circuli osculatoris, et arcus infinitesimus curvæ easdem habent proprietates, cum radius sit ad circulum osculatorem, et ad arcum infinitesimum curvæ perpendicularis. 4.° Hinc definiri potest curvarum in quolibet puncto curvatura; satis enim erit diversas circulorum osculatorum curvaturas inter se comparare; quod quidem facile fieri potest. Etenim evidens est, diversorum circulorum curvaturas esse in ratione reciproca radiorum; quod ut intelligatur, fingamus, duas rectas æquales in circulum flecti, unam quidem in totam circumferentiam, alteram vero in semicircumferentiam duplo minus curvam esse, quam semicircumferentiam integram; et duplo major est radius circuli, ad quem circumferentia illa pertinet. Idem simili ratiocinatione patet, si recta eadem in arcum duplo, vel triplo majorem incurvetur; et ita deinceps. Sed rem generatim demonstravimus. Sint duo circuli inæquales C et c, quorum radii R et r, ponantur in data ratione m ad n. In his circulis capiantur arcus æquales, dicaturque A arcus in majori circulo, et a arcus in minori; arcus A curvatura minor erit curvatura ar-

arcus æqualis a in ratione R ad r. Jam vero in circulo majori capiatur arcus A, qui similis sit arcui a in minori circulo; erit A : a = C : c = R : r. Quare cum sit a = A, erit etiam A : a = R : r = m : n. Igitur si arcus A similis arcui a contineat partes vel gradus m; arcus A continebit partes vel gradus n; ac proinde curvatura arcus a est ad curvaturam arcus A, ut m ad n. Quare eadem manente arcuum A et a magnitudine, circulorum c et C curvaturæ sunt in ratione m ad n, hoc est in ratione reciproca radiorum. Comparari ergo inter se possunt diversæ curvarum curvaturæ, atque etiam variæ ejusdem curvæ in diversis punctis curvaturæ: inveniatur nempe in diversis punctis radius circuli osculatoris, hoc est, circuli, qui curvam in dato puncto tangens cum ipsa curva ita congruat, ut inter curvam, et circulum nullus alius circulus transire possit. Et quidem quum aucto, vel diminuto circuli radio, minuatur, vel augeatur per gradus illius curvatura, si nullus sit circulus, qui proprius, quam circulus osculator, ad curvam accedat, concludendum est, circulum cum ipsa curva in hoc puncto, eamdem habere curvaturam. Ex his patet, finitam esse curvæ alicujus curvaturam, si finitus sit radius osculator; ac si radius osculator sit inficitus,

cur-

curvatura est nulla ; tandem si radius osculator $= o$, curvatura est infinita. Ceterum hæc omnia facilius intelligentur, si revocentur in memoriam, quæ de methodo *exhaustionum*, et de *primis*, ac *ultimis rationibus* jam explicata sunt. Hæc pauca, quorum usus in Physicis institutionibus recurret, ex sublimiori doctrina delibasse satis sit. Superest, ut Parabolæ, et Ellipseos naturam breviter exponamus.

IV. Si axe AD (Fig. 34.) sumantur abscissæ quotlibet, et ad singula puncta erigantur semiordinatæ, ea lege; ut abscissæ semper sint, ut quadrata ordinatarum; curva per singulas ordinatarum extremitates transiens, dicitur *Parabola*. Jam abscissa dicatur x, et ordinata y, erit semper x, ut y^2; ac proinde ratio ordinaturam ad abscissas constans, et eadem manet; quare si p sit quantitas constans, erit $\frac{yy}{x} = p$, ac proinde $y^2 = px$, quæ est æquatio ad Parabolam: nempe in omni Parabola quadratum ordinatæ æquale est producto ex abscissa in quantitatem constantem; hæc autem quantitas constans *parameter* dicitur. Si in axe parabolæ abscindatur recta AF, quæ sit quartæ parametri parti æqualis, punctum

tum F Parabolæ *focus* appellatur.

COR. I. Quoniam crescente abscissa, crescit etiam quadratum ordinatæ, evidens est, Parabolam non esse curvam in se redeuntem, sed puncta illius singula, ab axe perpetuo recedere in infinitum.

COR. II. Data abscissa qualibet, ejusque ordinata, inveniri semper poterit parameter; cum sit tertia proportionalis ad ordinatam, et abscissam.

COR. III. Si abscissa ponatur $=o$, fit quoque ordinata perpendicularis $MM = O$, ac proinde puncta MM coeunt in A, nempe in axis vertice. Quare si per verticem Parabolæ ducatur recta ordinatis parallela, hæc erit tangens Parabolæ in puncto A.

COR. IV. Ducta intelligatur secans per punctum N; quæ Parabolæ accurrat in alio puncto t, ex quo demittatur perpendicularis tp, ad quam ex puncto N erigatur perpendicularis Nq axi parallela. Sit $PT = s$, $AP = x$, $PN = y$; erit PT

$$(s) : PN\ (y) = Nq\ (f) : \frac{fy}{s} = qt;$$ ac

proinde $pt = PN + qt = y + \frac{fy}{s}$, et

$Ap = x + f$. Jam sumatur æquatio ad

curvam, in puncto t erit $pt^2 = Ap \times p = x^2 + \frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2\,y^2}{s^2} = px + pf$: deletisque in hac æquatione terminis æqualibus $y^2 = px$, fiet $\frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2\,y^2}{s^2} = pf$ et dividendo per f, erit $\frac{2y^2}{s} + \frac{fy^2}{s^2} = p$. Jam puncta N et t ad se invicem accedant in infinitum, mutuoque coeant; secans abit in tangentem, fitque Nq, vel Pp $= o$: quare $f = o$, et $\frac{fy^2}{s} = o$, ac proinde æquatio præcedens abit in hanc $\frac{2y^2}{s} = p$, et $2y^2 = ps$, seu ob $px = y^2$ fiet $2px = ps$, $2x = s = PT$. Igitur in Parabola recta PT, quæ *subtangens*

gens dicitur, dupla est abscissæ AP.

COR. V. Recta FN ducta ex foco Parabolæ ad extremitatem ordinatæ cujuslibet, æqualis esse abscissæ AP, et quartæ parti parametri. Nam cum sit $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4}p$, vel $= \frac{1}{4}p - x$, prout ordinata jacet supra vel infra punctum F; erit $PF^2 = \overline{AP - AF}^2 = x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$. Præterea $PN^2 = px$, ergo $FN^2 = PF^2 + PN^2 = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}pp$, et $FN = x + \frac{1}{4}p^2 = AP + AF$.

COR. VI. Si per punctum contactus ducatur recta QS axi parallela, angulus GNS æqualis est angulo FNT; nam angulus GNS æquatur angulo FTN, præterea triangulum FTN est isosceles ob $FN = AP + AF = AT + AF = FT$, ac proinde angulus GNS æqualis est angulo FNT. Hæc est tangentis proprietas, quæ in Physicis institutionibus erit utilitatis maximæ.

V. Si in axe HI sumantur abscissæ quotlibet (Fig. 36.), et ad singula puncta erigantur ordinatæ FN et PM, ea lege, ut sit semper $FN \times FN$ ad $PM \times PM$ in ratione $LF \times FI$ ad $LP \times PI$, curva per singularum ordinatarum extremitates transiens vocatur *Ellipsis* quæ in circulum abit, si quadrata ordinatarum sint æqualia producto ex segmentis abscissarum. Jam dicatur axis major $HI = a$, ducaturque ex puncto axis medio C rect. BCD, quæ dicitur axis minor, sitque $BC = b$, $HP = x$, $PM = y$, $PI = a - x$ erit $\overline{a - x} \times x : y^2 = a^2 : b^2$ et $y^2 = \frac{ab^2 x - b^2 x^2}{a^2}$, quæ est æquatio ad Ellipsim, in qua si ponatur $a = b$, fit $y^2 = ax - xx$ æquatio ad circulum. Si abscissæ computentur a centro C, sit $CP = x$, $PM = y$, fiatque $HI = 2a$; erit in hoc casu $aa - xx$; $y^2 = aa : bb$, et $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$. Si ex mi-

no-

noris axis extremitate B, tamquam cetro; et intervallo $BF = CL$, tamquam radio describatur arcus circuli, axi majori occurrens in punctis F et f, puncta illa vocantur Ellipseos *foci*; evidens autem est, hæc puncta a centro Ellipseos æqualiter distare, nam ob BC axi perpendicularem triangula CBF et CBf sunt æqualia.

COR. I. Cum duo Ellipseos axes sint constantes, constans etiam est recta iisdem duobus axibus tartia proportionalis; hæc autem linea *parameter* dicitur. Quia autem duo sunt Ellipseos axes; duæ etiam sunt parametri; si nempe axis major sit primus proportionis terminus, tertia proportionalis parameter axis majoris dicitur, et contra. Jam si abscissæ ab axis extremitate computentur, sit axis major a, minor b, parameter p; erit $ap = b^2$. Si autem abscissæ computentur a centro, sit 2a axis major, et 2b axis minor, erit $2ap = 4b^2$, his autem valoribus in utraque æquatione ad Ellipsim substitutis, æquatio Ellipseos in primo casu fit $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$; in casu altero habetur $y^2 = \frac{1}{2}ap - \frac{px^2}{2a}$.

 COR.

COR. II. Ex Ellipseos æquatione evidens est, eam esse curvam in se redeuntem, et undique terminatam; crescentibus enim abscissis a centro, computatis decrescunt ordinatæ; ac tandem omnino evanescunt, si abscissa semiaxi æqualis sumatur. Manifestum est, mutua axium in centro C intersectione Ellipsim in quatuor partes similes et æquales dividi, quum eadem sit ad quamlibet partem curvæ æquatio; omnesque proprietates perinde se habeant. Quia vero ordinata perpendiculari Nn perpetuo decrescente, puncta N et n coeunt in H; patet, tangentem in H esse perpendicularem.

COR. III. Distantia focorum a centro facile invenitur, nam cum sit $BF = HC$, erit $FC^2 = HC^2 - BC^2 = \overline{HC - BC} \times \overline{HC + BC}$. Quare distantia foci a centro, est media proportionalis inter semiaxium summam; illorumque differentiam. Præterea ob triangulum BCF rectangulum erit $BC^2 = HC^2 - FC^2$, ac proinde $HC - FC : BC = BC : HC + FC$, seu $HF : BC = BC : FI$, nempe semiaxis minor, est medius proportionalis; inter foci unius distantias ab utroque axis majoris vertice.

COR.

COR. IV. Ex Ellipseos constructione, summa rectarum BF et Bf æqualis est axi majori; at ponamus, eamdem manere summam in quolibet puncto, sitque RF $+$ Rf $=$ HI. Dicatur HC $= a$, BC $= b$, ordinata RS $= y$, CS $= x$, fC $= c$; erit IS $= a - x$, HS $= a + x$, fS $= c - x$, FS $= c + x$, HF, vel If $= a - c$, Hf, vel IF $= a + c$. Jam vero cum sit (per hyp.) FR $+$ fR $= 2a$, si differentia inter FR, et fR dicatur $2z$, erit fR $= a - z$, et FR $= a + z$. Jam ob triangula FRS et fRS rectangula erit $fS^2 + SR^2 = fR^2$, hoc est $cc - 2cx + x^2 + y^2 = a^2 - 2az + z^2$. Præterea $FS^2 + SR^2 = FR^2$ hoc est, $c^2 + 2cx + xx + y^2 = a^2 + 2az + zz$, habentur ergo æquationes duæ, quarum prima si a secunda subtrahatur, fiet $4cx = 4az$, et $z = \frac{cx}{a}$, quo valore substituto in prima æquatione loco z, ideoque et $\frac{c^2 x^2}{a^2}$ loco z^2 erit $a - 2cx +$

$$xx + yy = aa - \frac{2xccc}{a} + \frac{c^2 \;\; x^2}{a^2}$$, facta-que, ut moris est, reductione, habebitur $a^2 \;\; c^2 + a^2 \;\; x^2 + a^2 \;\; y^2 = a^4 + c^2 \;\; x^2$ et $a^2 \; y^2 = a^4 - a^2 \;\; c^2 - a^2 \; x^2 + c^2 \;\; x^2$, factaque divisione per $a^2 - c^2$ habetur $\frac{a^2 \;\; y^2}{a^2 - c^2} = a^2 - x^2$; loco b^2 substituatur $a^2 - c^2$ fiet $\frac{a^2 y^2}{b^2} = a^2 - x^2$ et tandem $y^2 = \frac{a^2 \;\; b^2 - b^2 \;\; x^2}{a^2}$; quæ est æquatio ad Ellipsim ante inventa. Hæc ergo est Ellipseos proprietas, ut ductis ex utroque foco rectis, ad punctum perimetri quodlibet concurrentibus, rectarum illarum summa sit axi majori semper æqualis. Hanc eamdem proprietatem, ex æquatione Ellipseos derivare facile est; verum

ex

ex proprietate ipsa, æquationem elicere placuit, ut exemplum esset Tyronibus, qua ratione ad æquationem curvæ ex data aliqua proprietate pervenire liceat. Hinc evidens est, datis duobus Ellipseos axibus, Ellipsim facili manu describi posse; sumptis nempe in axe majori duobus punctis tamquam focis, his affixum retineatur filum, atque per fili longitudinem ita promoveatur arcus aliqua, ut filum perpetuo tensum maneat, arcus motu suo Ellipsis peripheriam percurret, ut patet ex perpetua partium fili, et axis æqualitate.

COR. V. Si ex puncto R in Ellipseos perimetro ad utrumque focum f, F ducantur rectæ FR, fR, et in linea producta FR sumatur RT = Rf, ducaturque Tf, ad quam per punctum medium E, et per punctum R agatur ER; hæc erit tangens in R. Etenim ponamus, rectam ER Ellipsi occurrere in alio puncto r. Ex hoc puncto r in recta RE agantur lineæ rT, rf, rF. Quoniam (per constr.) TR = Rf, et fE = ET, erit RE perpendicularis ad fT, ac proinde singula puncta rectæ ERr æqualiter distant a punctis f, T, ideoque rf = rT. Sed Fr + rT major est, quam FT; ergo etiam Fr + rf major est, quam FT; ideoque etiam major, quam HI; cum (per const.) sit FT = HI: quare punctum r

non

non pertinet ad Ellipsim ; ergo recta RE tangit Ellipsim in unico puncto R. Hæc est utilissima, in Physicis institutionibus, tangentis proprietas, quam quidem ex Ellipseos æquatione, non secus ac in Parabola fecimus, eruere licebat; sed diversas veritatis inveniendæ vias, Tyronibus demonstrare maxime convenit.

SCHOL. Parabolæ, et Ellipseos æquationem consideravimus, ordinatis ad axem relatis. At ex demonstratis facile erit curvarum illarum æquationes invenire, si ordinatæ ad diametrum quamlibet referantur; eadem est in singulis casibus curvarum illarum natura. Primarias dumtaxat proprietates demonstrasse satis sit, alias enim, ubi necessitas postulaverit, in Physicis Institutionibus explicabimus. Præterea etiam ad exercendum, cavendumque ingenium aliquid Tyronibus relinquere opportunissimum est, idque postulat recta docendi ratio. *Sectiones conicæ* appellantur Parabola, et Ellipsis, quibus etiam annumerari debet *Hyperbola*, de qua nullum verbum fecimus, utpotote nullius fere usus in nostris Physicis Institutionibus futura. Denominationis ratio facile patebit, si tres illas curvas in coni sectione consideremus.

Sit ABC conus (Fig. 37.) circulari basi insistens, et secetur plano quolibet IEM.

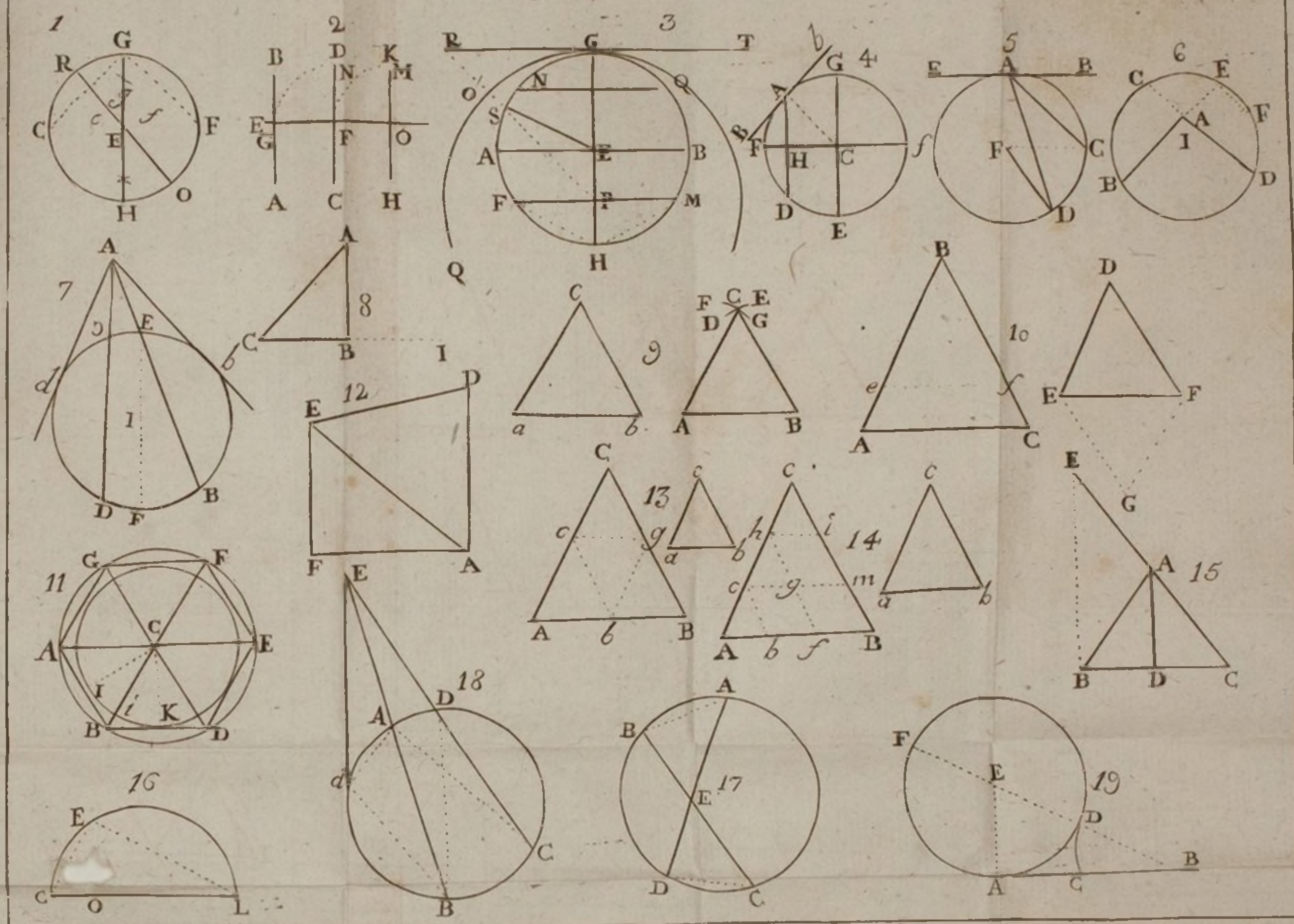
Po-

Ponatur sectio alia KILM parallela basi, et occurrens priori sectioni in HI, intelligaturque sectio tertia priores duas in EH, et KL perpendiculariter bisecans, atque etiam conum in triangulo ABC. Jam producto EH, donec ipsi AK occurrat in D, ductisque EF ac DG rectæ KL parallelis, et occurrentibus sectioni triangulari in F, et G, dicatur EF $= a$, DF $= b$, ED $= c$, EH $= x$, et HI $= y$, ob triangulorum EHL et EDG similitudinem, erit ED (c): DG (b) = EH (x) : HL $= \frac{bx}{c}$. Simili modo, ob triangulorum DEF et DHK similitudinem, erit DE (c) : EF (a) = DH (c--x) (Fig. 39.) vel $c + x$ (Fig. 38.): HK $= \frac{ac \pm ax}{c}$. Tandem cum sectio KIL parallela basi sit circulus, ut patet ex genesi ipsius coni, erit HK $\times$ HL $=$ HI^2 hoc est $\frac{abx}{c} \pm \frac{abxx}{cc} = yy$; at si ponatur, sectionem ita se habere ut ED non occurrat lateri AK, sed sit ipsi parallela; tunc erit HK $=$ EF $= a$, ideoque HK $\times$ HL $=$ HI^2 hoc est $\frac{abx}{c} = y^2$. Si æquatiotiones illas seorsim consideremus, evidens est, figuram 37 Ellipsim referre, cum quadrata ordinatarum semper sint, ut productum ex segmentis abscissarum. Figura 38 refert curvam, quæ *Hyperbola* dicitur, in hac autem curva non secus ac in Ellipsi, quadrata ordinatarum sunt, ut productum ex segmentis abscissarum; sed probe notandum est discrimen. Sectio conica est Ellipsis, si planum secans sectioni triangulari perpendiculare duobus coni lateribus occurrat; at sectio conica fit Hyperbola, si planum secans neque sit coni lateribus parallelum, neque duo secet coni latera: sed in hoc casu sectio ita se habet, ut planum secans productum cono ad verticem opposito occurrant in D, alteraque sectione generet Hyperbolam oppositam. Recta DE dicitur *axis transversus*, punctum hujus axis medium vocatur *centrum* Hyperbolarum, per quod si ducatur hinc et inde recta perpendicularis ea proportione, ut productum ex segmentis abscissarum sit ad quadratum ordinatæ, sicut est quadratum axis transversi ad quartum terminum proportionalem; habebitur quadratum axis, qui *conjugatus*, vel *secundus* axis appellatur. Igitur in æquatione ad Hyperbolam, punctum D sumitur in Hyperbola opposita, et productum ex segmentis abscissarum est

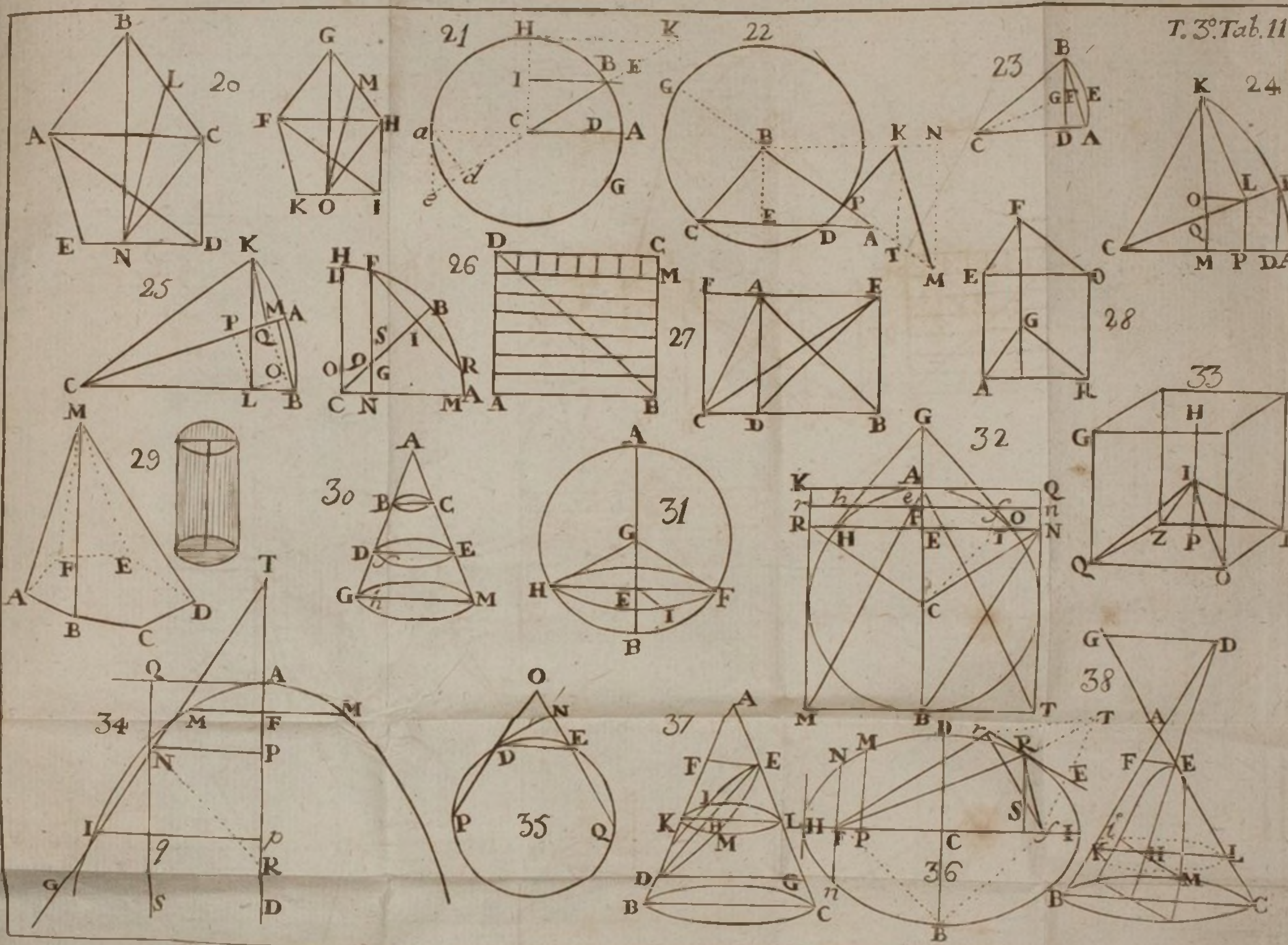
DH

DH$\times$EH (Fig. 38.). Tertiam æquationem $\frac{abx}{c} = y^2$ esse ad Parabolam, cujus parameter $\frac{ab}{c}$ ex antea demonstratis evidens est. In hac autem curva planum secans, est alterutri lateri coni parallelum. Itaque cum ex coni sectione natæ sint tres illæ curvæ, patet cur illis factum sit *sectionum conicarum* nomen. Sed hæc breviter dicta sint, ut Algebræ usus in Geometria Tyronibus ostendatur.

FINIS.



T. 3º. Tab. 11



INSTITUTIONES

PHILOSOPHICÆ.

INSTITUTIONES PHILOSOPHICÆ

AD STUDIA THEOLOGICA POTISSIMUM ACCOMODATÆ

AUCTORE

FRANCISCO JACQUIER

Ex Minimorum Familia, Primariarum per Europam Academiarum Socio, in Lyceo Romano, et in Collegio Urbano de Propaganda Fide Professore.

TOMUS IV.

SUPERIORUM PERMISSU.

Matriti: Ex Officina Ildephonsi à Lopez.

MDCCLXXXVII.

AUTOR LECTORI.

AD eam tandem pervenimus Philosophiæ partem, quæ *Physica*, seu *Scientia naturæ* appellatur, præstantissimam sane disciplinam. De hoc præclarissimo studio duas invenio omnino quidem injustas hominum opiniones. Alii huic studio unice addicti, totique, ut ita dicam, mancipati, in aliis disciplinis haud supra vulgus sapiunt, hanc solam, quam profitentur, et amant, scientiam summopere prædicant, cunctaque præterea doctrinæ genera fastidiose contemnunt. Alii Physices studium tamquam incertum, et inutile arrogantius, et temere traducunt, imo velut prophanum pcoscribunt, et Ecclesiasticis viris vix concedendum. Primam opinionem, quæ quidem error est perniciossisimus, necesse non est, fusius refellam. Et certe nemo nescit, ad tria capita generatim revocari omnes, quantum patent, humanas cognitiones. Dei enim, et animæ nostræ contemplatione, atque corporum, sive naturæ observatione studia omnia nostra continentur. Quod Dei contemplationem spectat, sacram scilicet Theologicam, ecquis æquus rerum æstimator divinam hanc scientiam, scientiarum omnium reginam, et magistram ceteris omnibus disciplinis infinita laude non anteponet? Ecquis etiam, nisi perditissimus homo, in cœlum non feret sanctiorem illam disciplinam, quæ circa nosmetipsos versatur, quæ de moribus agit, quæ certiori, castiorique doctrina præclaris virtutibus animum excolit, atque ad honestatis, ad officii, ad religionis amorem traducit?

Hæc quidem duo sunt divina omnino, et omnium longe utilissima studia, quibus ad purissimum omnis veritatis, scientiarumque omnium fontem D. O. M. et rerum majestate, et morum sanctitate propius accedere docemur, quoad humani generis patitur imbecillitas.

Nec

Nec tamen sua dignitate, et utilitate defraudiri debet vera, et solida Physicæ ratio, in qua non infinitæ de voculis, atque nugis controversiæ disceptantur, sed ut paucis multa complectar, quæ cœlo, terra, marique geri, atque administrari videmus, quantum pro ingenii nostri mediocritate licet, explicantur. Neque hæc nuda, et simplici mentis contemplatione, aut conjecturis innixa, sed accurata ratiocinatione, et captis sæpius experimentis demonstrata. Fructuosissimam esse accuratiorem hanc naturæ considerationem, eamque ad omnipotentis, ac perfectissimi auctori cognitionem nos evehere, et ad divinas laudes excitare, si quis negaverit, is statim ex S. Scripturæ auctoritate refelletur, atque hanc Isaiæ reprehensionem audire merebitur cap.5.vers.12.*Opus Domini non respicitis, nec opera manuum ejus consideratis.* Verum qui in contemplandis divinis operibus nullum tempus, nullam attentionem collocat; is sane Physicæ pretium omnino ignorat, divinarumque operum gloriam, et majestatem obscurius intuetur; atque ea de causa fit, ut aliqui rerum Physicarum nihil, aut parum studiosi alias quidem Philosophiæ partes commendent; Physicam autem aspernentur, in quo quidem non mediocritèr peccare videntur. Quam autem sinistra sit, et temere concepta hæc opinio, ex ipsa rerum explicandarum serie melius quam sermone ullo licebit intelligere; interim tamen singula harum institutionum capita percurrere, et doctrinæ utilitatem brevitèr, et digito, ut ita dicam, commonstrare non abs re erit. Ab *extensione*, et *impenetrabilitate* Physices generalis initium facere solent plerique hujus disciplinæ magistri; ego autem ab hac vulgari consuetudine aliquantulum deflectens, universales corporum vires, seu potius effectus primum explicabo, et vocabulorum, quibus nulla vis, nulla notio persæpe subjecta est, ambiguitatem omnem clara, nitidaque definitione amoveri, curabo diligentèr. Itaque vim *inertiæ*, vires *centripetas*, et

cen-

centrifugas, *gravitatem*, et *attractionem* accurate considerabo, utilissimum sane argumentum, quo cuncta prorsus naturæ effecta continentur. Hinc doctrinæ ordo postulat, ut effectus ipsos inde oriundos, æquilibrii scilicet, variorumque motuum leges contemplemur. Ex his tandem veluti gradibus deducimur ad universales corporum proprietates, quæ Physicæ generalis meta sunt, ac terminus. Maxima sane voluptate afficiuntur adolescentum animi, quum tot admiranda acutissimorum hominum inventa cognoscent, quibus Physica maximum cæpit incrementum, et quamplurima ad usus vitæ excogitata. Hæc autem tot, tantaque commoda fusius declarare supervacaneum est; singulis enim capitibus sua adjungitur appendix, in qua uno veluti intuitu observare licebit, non quidem utilitates omnes, sunt enim innumerabiles, sed aliquas tantum, atque etiam in rebus Theologicis, quem quidem usum vix suspicantur aliqui. Hanc vero tradendæ Physicæ rationem ne-

nemo, ut puto, improbabit; cum præclarissimi studii amorem studiosæ juventuti instillare possit, quantum unicuique pro vivendi instituto, et ratione licet; sua enim sunt diversis vitæ conditionibus officia, quibus deesse nefas.

Universalibus corporum proprietatibus in Physica generali explicatis, jam progrediendum est ad Physicam particularem, in qua varia specierum individua observantur, variæque species considerantur. Latissime quidem patet Physicæ particularis amplitudo, naturamque omnemque amplectitur; sed tot, tantaque scire datum non est mortalibus; in tam immensa rerum varietate Physicis pauca, ut ita dicam, delibare licet. A corporum *fluiditate* Physices particularis sumam exordium; corporum fluidorum *pressionem*, *motum*, *resistentiam* explicabo. Ad fluida *elastica* deinde progressum faciam, *aerisque* proprietates considerabo. Jam rectus docendi ordo exigere videtur, ut *luminis* doctrinam, variasque affectiones

nes

nes statim subjungam. Ex his autem ad corpora *cœlestia* assurgam, doctrinamque astronomicam, et varias illius partes sedulo explanare conabor. Neque prætermittam, quæ cum Astronomia necessario vinculo conjuncta sunt, *Chronologiæ*, et *kalendarii* elementa, variasque *Cyclorum*, et *Periodorum* rationes accurate demonstrabo. Ita autem tellus nostra cum cœlo colligata est, ut de *Geographia* sine Astronomiæ subsidio vix quidquam statui possit; itaque ex Astronomia ad Geographiam, et, ut ita dicam, è cœlo in terram pedem referam. Igitur cum Astronomia stricte connecti debent Chronologia, et Geographia, quas Astronomiæ *filias* merito appellant aliqui. Explicata Geographia, suadet ipsa rerum naturæque series, ut corpora illa, quæ in telluris superficie oculis nostris obversantur, primum consideremus; deinde vero ad ea, quæ in terræ gremio latent, descendamus: quare de *animalibus*, *arboribus*, *plantis*, *metallis*; *fossilibus*, aliisque id genus plurimis distinctæ sermo

ha-

habebitur. Tandem quia ex ipsis terræ visceribus perpetuo avolant plurima, magna quidem varietate, effluvia, quæ in aerem sublata, varias constituunt phænomenorum species; ea denique contemplabimur, quæ in aeris regione aguntur, *imbres* scilicet, *grandinem*, *nivem*, *ventum*, *tonitrum*, aliaque *meteora*, et Physicæ particulari, Deo juvante, finem imponemus. Singulorum capitum utilitatem suo loco opportune adjungemus, ut factum est in Physica generali. Interea tamen, ut alia plurima omittam hujus doctrinæ emolumenta, quæ omnibus obvia sunt: unum hic attingere satis erit, quod nostris auditoribus Thologiæ studiosis maxime convenit, Astronomiæ, et Chronologiæ doctrinam cum historia sacra, et prophana consociandam esse. Si quis in dubium vocaverit, excellentes de his rebus evolvat libros, suam in gravissimis etiam, magnique momenti controversiis, imperitiam, si ingenuus fuerit, fateri non dubitabit. Ceterum ex iis, quæ hactenus breviter attigi,

sa-

satis intelligitur, quos mihi lectores, velim; eos scilicet Arithmeticæ, et Geometriæ elementis probe imbutos esse oportet. Ut autem præ manibus ea omnia habeant, quæ ad nostras institutiones sunt necessaria, Arithmeticam, et Geometriam tali studio adornavi, ut nihil nimis, et nihil minus, quam necesse sit, contineant. Unum aliud à studiosis adolescentibus maxime exoptarem, ut Arithmeticam, et Geometriam Logicæ etiam studio præmitterent; etenim Arithmeticæ, et Geometriæ principia ob firmam et perpetuam veritatis possessionem aptissima sunt ad mentis aciem expoliendam, Logicam naturalem perficiendam, rectamque methodum conciliandam.

Nec me reprehendat aliquis, quod hac nostra ætate, his cultioris, sublimiorisque Physices temporibus, minus difficiles institutiones tradere, et proponere audeam. De me quidem modeste, ut par est, sentio, non tamen nimis demisse, quod quidem

fic-

fictæ, et affectatæ, quam abhorreo, fore? humilitatis. At in reconditori Physica me omnino peregrinum, et hospitem non esse, demonstratum confido; et iis, quæ jam edidi operibus, et aliis, quæ apud me premo, possem confirmare. Verum doctos quidem se probant illi Physicæ magistri, qui intricatissima Physices *theoremata* Tyronibus explicare laborant: mea tamen sententia, rem faciunt non valde utilem; præsertim si frequntior sit auditorum numerus, et adolescentum mentes doctrinæ difficultate magis obruere, quam erudire videntur.

Sed quidquid sit de nostrarum institutionum successu, meam saltem propenssissimam voluntatem benignè excipiant studiosi adolescentes, quorum utilitati hunc meum qualemcumque laborem sincerè, et ex animo consecravi. Porro ab iis hunc unum, solumque expetendum vehementer exopto operæ meæ fructum, ut nempe utilissimum studium alacriter susci-

ci-

cipiant, non quidem ad gloriam, et doctrinæ ostentationem; sed ad tuendam, insinuandamque Religionem. Neque tamen respuenda est doctrinæ fama, dummodo inde absit gloriæ, honorum, et lucri cupiditas. Persæpe enim feliciter contingit, ut vulgaris etiam, nec admodum sublimis rerum Physicarum cognitio apud gentes minus cultas, nominis splendorem, atque auctoritatem conciliet. Hac fortunatissima oblata occasione utendum est, et de religione sermones miscendi, hæ quidem honestæ sunt, et omnino licitæ artes; sed tamen præcedat morum, vitæque exemplar, atque enixe imploretur divinæ gratiæ auxilium; nam, ut ait S. Augustinus in epistola ad Sixtum: *restat, ut ipsam fidem, unde omnis justitia sumit initium, non humano tribuamus arbitrio, nec ullis præcedentibus meritis . . . . . sed gratuitum Dei donum esse, fateamur.*

Antequam ex hoc sermone ad Physicam transitum faciam, monendum superest, pro majore commoditate, mo-

modo telluris motum, modo quietem à me adhiberi. Ceterum me obedire profiteor Sanctæ Romanæ Ecclesiæ, quæ sapientissime omnino prohibuit, ne hypothesis Copernicana tamquam *Thesis* defenderetur.

INDEX.

PROOEMIUM.

ta-

AR-

AR-

IN-

INSTITUTIONES PHYSICÆ.

IN UNIVERSAM PHYSICAM *PROŒMIUM.*

CAPUT I.

De natura, et divisiones Physices.

I.

P*Hysica* dicitur illa Phylosophiæ pars, quæ corporis naturalis proprietates expendit. In hac autem definitione probe notari debent verva *corporis naturalis*, quæ quidem apposite omnino dicta fuere; ut quæstiones plurimæ, quæ in Sacra Theologia opportunius tractantur, ad hanc divinam scientiam reserventur. Itaque quidquid in in corporibus pratèr consuetum naturæ ordinem, et per miraculum contingit, Physicorum contemplationi, et disputationi subjacere non debet. Hinc Physica definiri etiam solet *Philosophia naturalis*, vel *scientia naturæ*.

II. Duplicis generis proprietates in corporibus generatim distinguuntur. Aliæ sunt proprietates omnibus corporibus communes, quæ nempe deprehenduntur in omnibus corporibus, quæ nostris experimentis, vel observationibus subjici possunt, atque ideo proprietates illæ dicuntur *universales*. Aliæ autem proprietates in certis dumtaxat corporum speciebus observantur. Rursus autem proprietates universales vel eædem in corporibus perpetuò manent, vel per gradus crescunt, atque decrescunt, hoc est, ut loquuntur Scholastici, *suscipiunt magis, vel minus*. Ad primam proprietatum universalium classem pertinent *extensio*, *impenetrabilitas*, *vis inertiæ*, *mobilitas*, *quietis*, *et figuræ possibilitas*, sive ut vulgo dicitur, *quiescibilitas*, *et figurabilitas*. Ad secundam classem referuntur *vis gravitatis*, *et vis attractionis*; has enim vires juxta certam legem decrescere, demonstrabimus. Quod spectat ad proprietates speciales, ad eas scilicet, quæ certis dumtaxat corporibus conveniunt, has enumerare non licet; tot enim

sunt,

sunt, quot diversæ corporum species. Ad proprietatum illarum ordinem pertinent *fluiditas*, *elasticitas*, *pelluciditas* cet. Hìc autem cavendum est, ne proprietates universales cum essentialibus confundantur; fieri enim potest, ut in corporibus certas perpetuò observemus qualitates, quæ tamen ad ipsam corporum essentiam non pertineant. Itaque monendi sunt Studiosi Adolescentes, ut corporum proprietates, illorumque effectus accuratè centemplentur; quæstiones autem Scholasticas, quæ de proprietatibus essentialibus agitari solent, non multum curent; ex his enim nihil, vel parum utilitatis sperandum est; hujus moniti rationem explicavimus in Logica.

III. Pro duplici proprietatum genere duplex est Physicæ pars. Alia est Physica *generalis*, quæ universales corporum proprietates considerat; alia autem est Physica *particularis*, quæ certas dumtaxat corporum species expendit. Ex hac divisione patet, amplissimum esse Physicæ campum, et ad omnes fere scientias naturales extendi. Quia vero tam multa scire datum non est Mortalibus pro temporis brevitate, et humani ingenii limitatione, vastissimum illud argumentum, intra justos limites coercere solent cultiores Physici. Itaque in Physica generali explicabimus universales corporum proprietates; deinde ad Physicam particularem gradum facientes, eas primum considerabimus præcipuas corporum species, quæ per experimenta nobis innotescunt, et tandem ad remotiora corpora assurgemus, quæ observationibus quidem, non autem experimentis subjici possunt. Sed hæc generatim dicta sint de Physices divisione, singula enim hujus divisionis capita suo ordine deinde rursus dividemus, et explicavimus.

IV. Physica sive generalis, sive particularis vel est *experimentalis*, vel *theoretica*. Physica experimentalis ea est, quæ corporum proprietates, et effectus experimentorum atque observationum ope ostendit. Physica autem theoretica ea dicitur, quæ non solum experimenta, et observationes adhibet, sed iis etiam ad inveniendos, vel explicandos naturæ effectus ratiocinando utitur. Probe autem distingui debent observationes, et experimenta; si nempe quidpiam attentius speculamur, quod natura nulla vi artis coacta demonstrat, ille speculandi actus non *experimentum*, sed *observatio* appellatur; contra autem physicum experimentum est tentamen, quo Artificis industria, atque opera exploratur, et ob oculos ponitur aliqua naturæ actio, quæ antea latebat, et lateret postea, nisi eadem à natura velut invita per artem exprimeretur;

E. G.

E. G. cœlum obducitur nubibus, nulla nostra opera interveniente; si ergo nubes præsentes attente intuemur, cœlum nubibus obductum *observare* dicimur; at si ope antliæ pneumaticæ ex globo metallico cavo aer educitur, ut deinde globus ad stateram appensus examinetur, *experimentum* facere dicimur. Quia vero *phænomenum* appellatur id omne, quod sensibus conspicuum est, patet experimentis, et observationibus commune esse phænomeni nomen.

V. Ex his intelligitur, quid intèr Physicam pure experimentalem, et Phisicam theoreticam intercedat. Experimentum *ratio* non est, sed *factum*, et vi experientiæ tantummodo cognoscitur, effectum aliquem ita se habere; at per Physicam theoreticam non solum effectus causa explicatur, sed etiam veritates universales colliguntur, et in re aliqua data in quolibet simili casu conclusiones statuuntur. Itaque Physica experimentalis est Physica *factorum*, Physica autem theoretica est *factorum* explicatio. Hinc ut sua laus unicuique juste tribuatur, Physica mere experimentalis commendari quidem debet, sed manus magis, quam ingenii dexteritatem postulat; atque optandum maxime foret, ut qui manuum industria pollent, solam experientiam tractarent; alii vero qui meliori nobiliorique sagacitate, ingenii scilicet, præditi sunt, partem theoreticam sibi assumerent, et ita conjunctis viribus ad Physices progressum conferrent.

VI. Quamvis Physica theoretica in effectibus explicandis occupata sit; cavere tamen maxime debent Physici, ne effectuum causas temerario proferant: igitur ut totus Physices scopus intelligatur, quod *causæ physicæ* vocabulo significari velim clarè exponam. Deus est prima et unica rerum omnium causa; verum antequam ad primam alicujus effectus causam perveniamus, plurimæ aliquando percurrendæ sunt intermediæ causæ, ita ut effectus alicujus causa non tam causa dici debeat, quam effectus alius, qui suam quoque habet causam, donec tandem perveniamus ad effectum, qui nullam agnoscat causam præter Deum, vel ipsam corporum naturam. Rem exemplo illustrabimus, gravium descendentium legem accurate demonstrant Physici, hujus descensus causa est *gravitas*, quam velut effectum ex alia causa oriundum considerant plurimi Physici. Itaque licet corporum descensus proxima causa nota sit, gravitas nempe; ignota tamen est causa remota, sive causa gravitatis: quare ut plurimum sistendum est in causis proximis, nec remotiores causæ afferri debent, nisi fuerint perspicue cognitæ; inde autem fit, ut in rebus physicis multa confufusio persæpe oriatur. Quæ cum ita sint, jam evidens est, in Physica theoretica confidentèr ostendendas non esse causas ultimas, sed satis esse proximas; vel remotas, quæ clare innotescere possunt; et quidam ulterior cognitio exiguæ admodum est utilitatis. Si enim descensus leges demonstraverit Physicus, si effectus gravitatis æstimare, et ad calculum revocare noverit, eadem in humanam societatem redundat utilitas, etiamsi gravitatis causa nos lateat. Itaque probe tenendum est, eum esse debere melioris Physicæ scopum, ut nempe varii effectus probe observentur, accurate æstimentur, et ad nostram utilitatem transferantur. Ut autem hunc scopum pro mea tenuitate attingam, singulis Physices capitibus in varios articulos juxta methodi regulas opportune dividendis appendicem adjungam de uniuscujusque capitis utilitate, vel in artibus, vel in aliis etiam disciplinis.

CAPUT II.

De regulis philosophandi.

QUatuor primariis regulis comprehendi solet universa philosophandi ratio, quas quidem regulas, utpote in rebus physicis utilissimas, fusius explicavimus.

REGULA PRIMA.

Effectuum naturalium causæ non plures sunt admittendæ, quam quæ et veræ sunt, et effectibus explicandis sufficiunt.

HÆC regula multas complectitur partes seorsim declarandas. Et 1. quidem oportet causam esse veram, ideoque excludi debent non solum causæ commentitiæ, quas existere repugnat, sed etiam causæ mere possibiles; itaque satis non est, ut causa aliqua possit existere, sed etiam oportet, ut revera existat: licet igitur philosophicarum hypotheseon absurditatem et repugnantiam demonstrare non possimus, si tamen nulla ratiocinatione, nullis experimentis, aut observationibus probari possint, eas è Physica longe exulare jubemus; ceterum hanc primam regulæ partem ex aliis sequenti-tibus regulis clarius licebit intelligere. 2. oportet ut causa sufficiat, hoc est, singulis effectus explicandi partibus, et circumstantiis debet satisfacere; alioquin tota non haberetur effectus causa. 3. tandem non plures admittendæ sunt causæ, quam quæ satis sunt; etenim receptum est in omnibus disciplinis principium: *entia non sine necessitate esse multiplicanda; nec fieri debere per plura, quod potest fieri per pauciora.* Ceterum evidens est, huic regulæ præmittendam esse certissimam effectus cognitionem, nec aggrediendam esse, quod tamen persæpe fit, effectus alicujus explicationem nisi effectum ipsum existere certo constitit. Ita Plutarchus olim hanc sibi proposuerat quæstionem: *cur pulli equini, si à lupis fuerint insectati, velocius currere soleant*: variis explicationibus quæsitis veram tandem solutionem proponit: *sed id*, inquit, *fortasse verum non est.*

REGULA SECUNDA.

Effectuum naturalium ejusdem generis eædem sunt causæ.

HÆC secunda regula, quæ *analogia naturæ* sollet appellari, ex prima facile derivatur: etenim per primam regulam, natura simplex est, et sibi semper consona, neque superfluis causis redundat. Porro effectus ejusdem generis, sive omnino similes, diversis causis tribui, naturæ simplicitati omnino repugnat. Ita gravium descensus in Europa, et America eidem causæ tribuendus est. Pari ratione cum in omnibus hominibus eadem respirationis instrumenta demonstrent observationes anatomicæ, eamdem esse in singulis respirandi causam, merito concludimus. Nulli exceptioni obnoxia esse potest hæc regula; quod autem incautos Philosophos in errorem aliquando inducat, id fit ex ipsius regulæ abusu, præcipiti nempe judicio persæpe credimus, similes esse effectus, qui tamen sunt intèr se diversissimi. E. G. Venti præseferunt analogiam quamdam, ventosque singulos tamquam effectus ejusdem generis facile sibi persuaderet, qui singulas circumstantias, variasque conditiones accurate non consideraret. Cavendum ergo est di-

diligentèr, ne ex characteribus mere externis de perfecta effectum similitudine audactèr pronuntiemus. Ita plantæ quædam lethales externam plantarum salubrium speciem imitantur, sed principio quodam interno, et non facile conspicuo inter se maxime differunt. Sæpe enim miramur improvisum alicujus causæ effectum, alium plane diversissimum expectantes. Hæc autem effectuum diversitas proculdubio tribui debet causarum varietati, et subtilissimæ conditioni nobis imperviæ. Itaque id summoperè curandum est, ut nempe certo compertas habeamus omnes effectuum partes, conditionesque singulas; si autem eò pervenire liceat, jam regula extra omnem dubitationem posita est. Immerito igitur hujus regulæ vim enervare conantur aliqui Philosophi. Re quidem vera si de effectuum perfecta similitudine vel minimum supersit dubium, errori obnoxia esse potest analogiæ regula, atque in hoc casu certissima veritatis norma haberi non debet. Quamvis autem analogia demonstrationis vim non sempèr obtineat, attamen tantam conciliat probabilitatem, ut non solum in rebus physicis; sed etiam in tota fere vivendi, agendique ratione sine stultitia rejici non possit: ita si domus hodiè stet firmissima, crastina die sine ullo timore eamdem domum ingredi possum, si nullum ap-

pa-

pareat ruinæ indicium; quamvis tamen fieri possit, ut ob causam aliquam latentem præceps ruat ædificium. Huic regulæ innituntur pleræque hominum actiones: etenim actiones suas secundum experientiam moderantur sapientes homines, in gravissimis negotiis experientia magistra utuntur, et quidem agendum sit in casu singulari, judicant ex eo, quod factum fuit in alio casu præterito, cui præsens similis est, vel apparet. Manifestum autem est, hanc agendi rationem nihil esse, nisi perpetuum hujus regulæ usum.

REGULA TERTIA.

Qualitates, quæ in omnibus corporibus, in quibus experimenta sumere licet, sine ullo eorumdem qualitatum incremento, vel decremento observantur, pro universalibus corporum qualitatibus haberi debent.

HÆC regula, qua universa Physica, tamquam fundamento innititur, ex analogia naturæ evidens est; at non sine maxima diligentia adhiberi debet. Et 1. quidem satis non est, experimenta in paucis corporibus haberi, sed in maximo corporum numero institui debent. Præterea etiam requiritur, ut qualitates illæ incerta lege non

non augeantur, neque minuantur: qua enim ratione decrescerent, possent quoque minui in infinitum, atque tandem omnino evanescere. At si qualitates certa lege crescant, et decrescant, quales sunt *gravitas* et *attractio*, jam qualitates illæ in omnibus corporibus observatæ pro universalibus corporum qualitatibus haberi debent, certis tamen gradibus crescentes, et decrescentes. Hinc patet, quodnam sit discrimen inter qualitates, quæ sine ulla lege augentur, atque minuuntur, et qualitates alias, quæ certa lege crescunt, atque decrescunt. E. G. calor in certis gradibus crescit, atque decrescit; verum gravitas, et attractio certam servant distantiarum legem, quam deinde consideravimus. 2. intèr proprietates universales aliæ distinguendæ sunt, quæ non solum per experimenta innotescunt, sed etiam ex ipsa corporis notione colliguntur; aliæ autem per sensus tantum, atque experimenta acquiruntur. Quod spectat primi generis qualitates, evidens est illas competere singulis corporibus, iis etiam, quæ sensuum potestatem, et vim omnem fugiunt. Quod autem attinet qualitates alias per sensus tantum acquisitas, haud pari jure ad corpora quælibet transferri possunt. Quod quidem monitum volui, ut altercationes omnes philosophicas effugerem; in nostris enim

ins-

institutionibus physicis nihil affirmare volo, nisi quod omnino negari non potest ab iis, qui rem probe tenent, atque intelligunt. Ita cum non desint Philosophi, qui simplicissima admittunt materiæ puncta, indivisibilia, inextensa, quæ omni carent figura; licet qualitates illas in omnibus observemus corporibus, quæ sub sensus cadere possunt, minus tamen accuratè easdem proprietates transferre liceret ad puncta materiæ, quæ sensuum nostrorum limites excedunt; nisi aliunde qualitates illæ ex ipsa corporis notione colligantur, methaphysicisque argumentis comprobentur. Sed hac de re fusius disserere ad præsentem locum non pertinent; interim monere satis sit, præsentem regulam eo, quem dixi, modo explicatam in dubium vocari non posse. Qua enim ratione affirmamus extensa, gravia cet. esse corpora, quæ in terræ gremio alte delitescunt, nostrisque experimentis subjici non possunt, nisi vi hujus regulæ. Et certe non sine summa insipientia aliquis negaret universales corporum proprietates, nisi eas in corporibus singulis manibus tractasset, suisque experimentis comprobasset.

REGULA QUARTA.

In Philosophia experimentali propositiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obstantibus contrariis hypothesibus, pro veris aut accurate, aut quam proxime haberi debent; donec alia occurrant phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur, aut exceptionibus obnoxiæ.

HAC ultima philosophandi regula statuitur, hypothesibus quibuscumque anteponendas esse propositiones ex observationibus, et experimentis collectas. Et quidem cum hypotheses mera sint ingenii figmenta, evidens est, propositiones, quæ aliqua observationum, vel experimentorum auctoritate nituntur, præferendas esse puris hypothesibus, quæ nullam habent nisi ipsius ingenii fingentis auctoritatem. Ex hac ratiocinatione manifestum etiam est inductionibus, quæ ex phænomenis derivantur, justam probabilitatem tribuendam esse; eo scilicet accuratior censeri debet inductio, quo plura sunt phænomena, quibus satisfacit; si consentiat cum plurimis, habenda est quam proxime vera; si cum omnibus, vera est accurate; si autem contraria occurrant phænomena, restringi debet inductionis

nis veritas. Ad hanc regulam referuntur ea omnia, quæ de opinionum probabilitate, et hypotheseon usu explicavimus in Logica; quare non est, quod hujus regulæ explicationi diutius immoremur.

PARS

PARS PRIMA PHYSICES,

SEU

PHYSICA GENERALIS.

SECTIO I.

De universalibus corporum viribus.

AB extensione, et impenetrabilitate Physices initium sumere solent plerique Philosophi. At cum virium doctrina ad universales alias corporum proprietates detegendas, atque explicandas breviorem, tutioremque viam aperire videatur, à vulgari Physicæ tradendæ methodo mihi deflectendum esse extimavi. Hìc autem de viribus rursus monendum est, quod de causis jam diximus, nempe *vis* nomine nihil aliud intelligimus, nisi effectum aliquem dato aliquo tempore productum. Nec levitèr quidem attingere volumus inanissimas quæstiones de virium natura, an sint *entitates* aliquæ corporibus inhærentes, an quodlibet aliud. Itaque ne profligatas veterum Scholasticorum qualitates occultas in scenam revocare videamur, hæc definitio nominis probe tenendam est. Et quidem unusquisque facile experitur, sibi nullam esse virium notionem, nisi effectum aliquem sibi repræsentet. Porro quamvis hæc Sectio de corporum viribus inscribatur; sæpe tamen, data occasione, per alias corporum proprietates excurremus, si nempe rerum perspicuitas, et doctrinæ ordo id postulaverint.

CAPUT I.

De vi inertiæ, plurimisque inde colligendis Physices principiis.

ARTICULUS I.

De vera notione, et existentia vis inertiæ.

I.

VIS *inertiæ* dicitur illa proprietas, qua corpora statum suum, vel motus, vel quietis perpetuò tueri conantur. Hujus definitionis partes singulas explicabimus. Non solum corpora statum suum quietis perpetuo

tuo servant, seclusis viribus quibuslibet impressis, quod quidem à nemine id dubium vocatur, sed etiam seclusis omnibus impedimentis statum motus perpetuò retinent, hoc est, si corpus moveatur, moveri perget in infinitum eadem semper velocitate, et in linea recta, nisi causa aliqua corporis directionem, et velocitatem turbaverit. Vim illam in corporibus non sentimus, nisi illorum statum mutare conemur; ille autem conatus ad mutandum corporis alicujus statum dicitur *actio*; ad conatus, quo corpus aliquod status mutationi resistit, vocatur *resistentia*, vel *reactio*. Itaque vim inertiæ, tamquam mere *passivam* habere possunt Physici, qui vis passivæ nomine eam vim intelligunt, quæ ex se nullum exerit effectum nisi à vi alia excitetur; sed res est levioris momenti, et de nomine minime litigandum est. At vis inertiæ confundi non debet cum vulgarissimo Scholasticorum principio de *indifferentia materiæ ad motum, et quietem*; hoc enim principio nihil aliud intelligendum videtur, nisi ad essentiam materiæ non pertinere; ut perpetuò moveatur, vel perpetuò quiescat; at inde nullatenus colligitur in motu; vel quiete perpetuò manere corpus, quod movetur, vel quiescit, seclusis omnibus impedimentis.

II. Ut tota hæc doctrina in bono lumine collocetur, pauca de motu præmittenda sunt, fusius deinde explicanda. Quamvis ita clara sit, ac perspicua motus notio, ut nulla definitione indigeat; à Physicis tamen definiri solet motus *continua, et successiva loci mutatio.* Hìc autem locum generatim consideramus, et abstrahimus à loco *absoluto*, vel *relativo*, ac proinde etiam à motu *absoluto*, vel *relativo*. Velocitas dicitur illa corporis affectio, qua datum aliquod spatium dato tempore percurrit. Rursus velocitas dicitur *uniformis*, sive *æquabilis*, si æqualibus temporibus æqualia spatia describantur; secus autem *variabilis* appellatur. Inde autem plurima fluunt consectaria, quæ quidem sunt per se manifesta. Si velocitas uniformis fuerit duplo, vel triplo major cet. erit spatium eodem tempore descriptum duplo, vel triplo majus cet. ac proinde velocitates sunt directe ut spatia. Contra autem si maneat idem spatium, existente velocitate duplo, vel triplo majori cet. erit tempus duplo, vel triplo minus cet. ideoque *velocitates sunt reciproce, ut tempora*: quare generatim si spatium dicatur S, velocitas V, tempus T, erit $V = \frac{S}{T}$ et $TV = S$, hoc est: *spatia sunt in ratione composita velocitatum, et temporum.*

His

His autem præmissis facile intelligitur, quid sit *quantitas motus* : si corpus aliquod moveatur, singulas ejusdem corporis particulas eadem velocitate moveri necessum est; si enim aliæ irent tardius, aliæ velocius, jam solveretur partium nexus, nec corpus maneret continuum, quod est contra hypothesim. Porrò quantitas motus nihil aliud est, quam aggregatum, seu summa omnium velocitatum; quare evidens est, quantitatem motus esse productum ex numero partium, sive ex quantitate materiæ in velocitatem. Si igitur duorum corporum velocitates dicantur V, v, quantitates materiæ Q, q, spatia iisdem temporibus percursa S, s, quantitates motus A, a; erit $A : a = QV : qv = QS : qs$; sunt enim velocitates, ut spatia iisdem temporibus descripta. Jam si quantitates motus ponantur æquales; erit $QU = qu$, et $QS = qs$, ideoque $Q : q = v : V = s : S$, hoc est: *quantitates materiæ sunt in ratione reciproca velocitatum, aut spatiorum.* Quantitas materiæ appellari etiam solet *massa*, et quantitas motus dicitur etiam *vis motrix.* At si nulla habeatur ratio quantitatis materiæ, solaque consideretur velocitas, aucta, vel retardata; tunc vis illa appellatur vis *acceleratrix* in primo casu; in altero autem *retardatrix.* His præmissis sit.

CONCLUSIO.

Demonstratur vis inertiæ.

I. Vim inertiæ demonstrat experientia. Et quidem quod spectat corpora quiescentia, ea in quiete perpetuò manere observamus, nisi vi aliqua ad motum concitentur. Si autem aliquando ignota vi corpus moveri contingat, id tamen non sine latente vi aliqua fieri, ex analogia naturæ jure optimo concludere debemus; et revera existit motus causa, licet sensus nostros fugiat, et nulla aliquando fortasse detur causa corporea; quod quidem probe notandum est: etenim quamvis sine alio corpore impellente corpora non moveri ut plurimum observemus, analogiæ tamen lege abuteretur, qui corpora nulla sine alterius corporis impulsu umquam moveri pronuntiaret. Et certe si gravitatis causam attentè quis meditatus fuerit, eam ab aliquo corpore repetendam esse non facile concedet, quinimo in contrariam Newtonianorum opinionem propensior erit. Sed hac de re data opera deinde sermonem habebimus.

Quod spectat corpora ad motum semel concitata, ea in motu diutius perseverare observamus, quo magis de medio tolluntur

im-

impedimenta : quare si ita removeri possint obstacula omnia, quæ sane sunt plurima, ut nullæ omnino sint vires retardatrices, merito asserere possumus, perpetuum futurum esse corporum motum. Pari ratione affirmare licet, motum perpetuò futurum esse uniformem, et rectilineum, diminutis enim impedimentis ad uniformitatem, et rectilineam directionem corpus magis tendere deprehenditur. Si globus aliquis eximie perpolitus in superficie plana probe lævigata incedat, in linea recta progredi videtur, neque ad dexteram declinans, neque ad sinistram; donec tandem motus extinguatur asperitate plani, aliisque impedimentis, quæ nulla vitari possunt hominum industria; at quo pauciora manent impedimenta, eo magis experimenta ad veritatem accedunt.

Doctrinam hanc variis exemplis illustrare non abs re erit. Corpus in navigii tabulato constitutum quiescit, manente navigii motu constanti, et uniformi; porro si corpus tenderet ad quietem, ad ipsum gubernaculum corpus illud fugere deberet, quod quidem non minus mirandum videretur, quam si, quiescente navi, idem corpus gubernaculum versus sponte recederet. Præterea si corpus directionem motus sponte muare posset, in prædicto casu, navigii scilicet motu uniformi, et rectilineo delati,

 cor-

corpus illud non quiesceret, quod est observationi contrarium. At si navigii motus subito sistatur, homines stantes in navi antrorsum præcipites ruent, quod facile experiri quisque potest stans in curru celerrimè delato, cujus motus statim sistitur, is enim in partem currus anteriorem sesę raptum sentiet. Si vas aqua plenum in tabula aliqua collocetur, et vi satis magna impellatur, aqua in vase sub initio motus versus partes motui vasis contrarias tendere videbitur non quod revera talis motus aquæ impressus sit, sed cum aqua in eodem quietis statu perseverare conetur, vas motum suum aquæ statim imprimere non potest, ac proinde aqua, ut ita dicam, à vase derelicta, et revera quiescens locum mutare videbitur. Tandem postquam vasis motus in aquam transit, et aqua una cum vase uniformitèr, et eadem celeritate progredi cœperit, si vasis motus subito cohibeatur, aqua tamen in eodem motu perseverare conabitur, et supra vasis latera assurgeret. Huic causæ tribuendum est, quod navi turbulento mari jactata in ipsa sedentes homines, doloribus nausea et vomitu afficiantur, præsertim si mari non fuerint assueti; etenim liquores in ventriculo, intestinis, vasis sanguiferis, ceterisque canalibus contenti navis jactionibus non statim obediunt; unde in corpore humano fluidorum

rum motus turbabitur, et morbi orientur. Ex his omnibus sic tandem argumentamur: vis illa tamquam universalis corporum omnium proprietas haberi debet, quam in singulis corporibus observamus; atqui vim inertiæ, quoad partes singulas, in omnibus corporibus experimur quantum ferre potest experimentorum diligentia: ergo cet.

II. Corpora mutationi status resistere demonstrant rationes metaphysicæ. Et quidem si corpora mutationi status non resistant, corpus quodlibet etiam valde magnum è quieti ad motum, vel è motu ad quietem non solum facili manu, sed etiam sine ullo conatu posset reduci; vis etiam minima motum quantumvis magnum posset producere, vel etiam sistere; nullaque foret intèr causam, et effectum proportio, quod repugnat Ontologiæ principiis, atque experientiæ.

Et certe hanc proportionem ostendunt quoque experimenta; si enim producenda, vel extinguenda sit eadem velocitas in corpore duplo, vel triplo majori cet. id fieri non posse experimur sine vi duplo, triplo majori cet. ac proinde *vis inertiæ est, ut quantitas materiæ*; si autem, manente eadem quantitate materiæ, producenda, vel extinguenda sit velocitas duplo, vel triplo major cet. adhiberi debet vis duplo, vel triplo major

jor cet, ac proinde *vis inertiæ est, ut velocitas producenda, vel extinguenda*: quare generatim *vis inertiæ est, ut quantitas motus producenda, vel extinguenda.* Hæc ratiocinatio accurate quidem demonstrat, corpora mutationi status resistere, ac proinde vi inertiæ prædita esse; at vis inertiæ partes singulas, perpetuam scilicet motus uniformitatem, illiusque rectilineam directionem non æque evincit. Argumentum aliud desumi solet ex principio rationis sufficientis. Si enim corpus sibi ipsi relinquatur, nullaque accedat vis contraria, in statu suo perseverare debet, cum nulla sit ratio, cur statum mutet. Id quidem facile concedunt Philosophi, si agatur de corpore quiescente; negant autem nonnulli de corpore moto, quod suapte natura ad quietem tendere affirmant: iis ergo ratio sufficiens est ipsa corporis indoles, et natura. Quamvis autem non raro utilissimum sit rationis sufficientis principium; quia tamen sæpius mortales latet rerum ratio, fateri debemus, principium illud caute admodum adhibendum esse. Quæ cum ita sint, patet, vim inertiæ, si partes ejus singulas consideremus, habendam esse tamquam principium experientia magis, quam accurata aliqua demonstratione innixum.

Objic.: si corpus aliquod in aere deseratur,

tur, sibique permittatur, sponte descendit sine ulla vi impellente: ergo corpus non perseverat in quiete, seclusa etiam vi qualibet impressa.

Resp. dist. ant.: sine ulla vi impellente, quæ sensibus conspicua sit. C. ant., sine ulla vi impellente, quæ sensus fugiat. N. ant., et cons. Imperita hominum multitudo sensuum erroribus assueta sibi facile persuadet, corpora sine ulla vi in terram descendere, cum nullam videant. Unde credunt plerique homines, corpora descendere; quia non sustentantur. Verum etiamsi nulla oculis pateat vis extrinseca, nullam tamen esse, temerario quis affirmaret. Fingere enim possumus fluidum quoddam subtilissimum omnen oculorum aciem longe fugiens; vel etiam, ut Nevvtonianis placet, vim quamdam internam sine ullo interveniente fluido possumus admittere, ut jam observavimus. Sed argumentum illud fuse, et accurate convenienti loco prosequemur. Hunc vulgi errorem quotidiano experimento depellere satis erit. Si corpus in tabula horizontali constituatur, qua de causa per tabulæ superficiem motu horizontali non incedit corpus illud, cum nihil impediat? Cur sursum non ascendit idem corpus cum nihil motui secundum hanc directionem resistat? Cum ergo corpus deorsum moveatur, necessum

est,

est, ut vi aliqua, quæcumque sit, urgeatur. Merito igitur Philosophi mirantur corporum descensum, quem sine ulla difficultatis suspicione negligentèr aspicit hominum vulgus. Ceterum ex hac responsione patet, vim inertiæ diversam omnino esse à vi gravitatis, qua nempe corpora deorsum urgentur. Et quidem vis inertiæ secundum quamlibet directionem sentitur; si enim corpus aliquod è quiete ad motum, vel è motu ad quietem reducere, quis tentaverit secundum quamlibet directionem vel horizontalem, vel perpendicularem, aut utcumque obliquam, fieri non posse, sentiet sine conatu aliquo, sine resistentia aliqua; imo si quis corpus descendens manu superne percutiat, resistentiam aliquam experietur; corpus nempe resistit accelerationi motus secundum ipsam descensus, seu gravitatis directionem. Itaque evidens est, vim gravitatis longe differre à vi inertiæ, et vires illas duas ab imperitis hominibus perperam confundi.

Instabis: 1. si corpus in plano etiam eximie lævigato incedat, sensim languescit motus, atque tandem omnino extinguitur: si globus filo suspensus agitatur, variosque itus et reditus perficit sensim breviores fiunt globi vibrationes, atque tandem evanescunt. In ludo *trudiculari* globulus eburneus

neus per aliquod tempus motu rectilineo in tabula progredietur, sed in certis casibus, veluti sponte, per eamdem lineam rectam ad partes contrarias recedere videtur. Tandem si corpus aliquod secundum directionem horizontalem, vel ad horizontem obliquam projiciatur, in terram recidit curvam describens. Itaque sic argumentari licet; corporibus tribuenda non est vis illa, quam negare videntur experimenta, atqui cet. ergo.

Resp. C. maj. N. min.: objecta experimenta explicabimus. Ad primum patet responsio ex dictis; nullo enim artificio removeri possunt omni impedimenta, ac proinde mirum non est, quod sistatur tandem penduli motus aeris resistentia, filique in puncto suspensionis impedimento retardatus. At si maxima industria filum suspendatur, per longum satis tempus perseverat illius motus. Quod autem in certis casibus globus eburneus in contrariam partem tendere videatur, it fit, quod globus motum aliquem circa axem in partes contrarias admiserit, qui quidem motus adhuc perseverat extincto motu rectilineo, ac proinde globulus in contrariam directionem recedere videbitur, donec asperitate plani extinguatur ipse quoque rotationis motus. Denique quod corpora horizontalitèr, vel oblique projecta per curvam relabantur, nihil repugnat ut inertiæ,

quæ

quæ vires alias quaslibet excludit. Porro in præsenti casu pratèr motum impressum agit etiam vis gravitatis, quæ corpus deorsum revocat. At si nulla adesset vis gravitatis, corpus recta, et uniformitèr abiret in infinitum secundum directionem motus impressi: Qua ratione autem compositis simul duobus motibus, motu scilicet impresso, et motu scilicet ex vi gravitatis oriundo, curva describatur, et quæ nam curva ex tali motuum compositione oriatur, deinde suo loco demonstrabimus.

Instabis 2.: si corpus nostrum moveatur, vel in obstaculum aliquod impingat, sensationum nostrarum testimonio acquirimus vis cujusdam majoris, vel minoris notionem, quam ex quiete nullatenus comparamus. Et quidem corpus quiescens nullum umquam motum producere poterit; contra autem corpus incurrens in corpus quiescens, illud mobevit. Ex his ergo sic concludere licet: vis illa in corpore quiescente saltem admitti non debet, quæ in corporum motu tantum sese manifestat; atqui cet.: ergo cet.

Resp. C. maj., N. min.: facile sibi persuadent homines meditationibus philospohicis non satis assueti, in corporibus motis adesse conatum quemdam, quo carent corpora quiescentia; inde autem originem habet error ille, quod inanimatis corporibus

ea

ea facilius tribuamus, quæ in proprio corpore observamus. Porro dum vis nomen ad inanimata corpora transferimus, levi etiam attentione patet, id fieri non posse, nisi in triplici dumtaxat sensu. 1. si corpori inanimato propriam sensationum tribuamus, quod est absurdum: 2. si vis nomine intelligamus metaphysicam quamdam entitatem à nostris sensationibus diversam; quam quidem nulla ratione intelligere, nec proinde definire pussumus. 3. tandem si vis nomine significemus effectum ipsum, vel proprietatem aliquam effectu manifestatam, cujus causam non investigamus. Hæc autem ultima significatio sola est rationi consona. At si *vis* nomini hanc significationem tribuimus, jam corpori quiescenti æque, ac moto competit, et quietis non minus, quam motus continuatio tamquam lex naturæ haberi potest. Tandem dum corpus incurrens corpori quiescenti motum imprimit, id facere non potest sine aliqua proprii motus jactura. Quæ quidem jactura oritur ex vi, qua corpus quiescens status mutationi resistit; ac proinde corpori quiescenti non secus, ac corpori moto tribuenda est vis ad conservandum statum suum, quamcumque notionem huic vocabulo jungere placeat.

Instabis 3.: si corpora prædita sint vi inertiæ, jam nulla est motus continuati

cau-

causa; atqui motum sine causa continuari repugnant: ergo cet.

Resp. N. maj. Frustra quidem Philosophi de motus communicatione tantas lites excitant. Continuati motus nulla alia agnoscenda est primaria causa præter Deum optimum Maximum, qui non motum duntaxat, sed res omnes conservat; secunda autem causa est ipsa vis inertiæ. Nec alia ratione perseverat motus, quam qua continuantur corporis alicujus figura, color, aut aliæ hujusmodi affectiones, quæ semper eædem permanerent, nisi vis aliqua eas turbaverit. Multo quidem rectius, et utilius se gererent Physici, si motus retardati, vel accelerati rationes, legesque investigarent. Hic autem observandum superest, nos minime definitum velle, an vis motricis actio *continuata* esse debeat, an satis sit actio *instantanea* nullo deinde impedimento turbata. Quæstio illa ad æstimandos effectus, quod in Physica unicè volumus, superflua omnino est, et ad Metaphysicam pertinet, stricteque conjuncta est cum disputatione, quam de rerum conservatione in Metaphysicis institutionibus tractavimus.

AR-

ARTICULUS II.

De principio actionis, et reactionis.

I.

ACtionem corporis definire solent plerique Physice *vim*, quam corpus aliquod in aliud corpus exercet, seu vim, qua corpus aliquod aliud corpus premit, vel percutit; at talis definitio ipsa re definita obscurior videtur; nos autem omnem ambiguitatem removere vel maxime studentes, recordabimur, in corpore, quod *actu* movetur, vel ad motum tendit, nihil aliud clare intelligi; nisi ipsam quantitatem motus quam habet, vel quam haberet, sublatis omnibus impedimentis; ac proinde actio corporis per ipsam motus quantitatem dumtaxat sese manifestare intelligitur. Itaque actionis vocabulo nullam aliam notionem subjici volumus, nisi ipsam quantitatem motus actu productam, vel producendam, si omnia removerentur impedimenta. Inde autem statim intelligere licet, quid sit *reactio*, nihil enim aliud est, nisi actio contraria, nempe quantitas motus in corpore agente amissa, vel amittenda.

II. Receptum est apud Physicos principium : *actioni semper æqualem esse , et contrariam reactionem.* Quid hoc principio intelligendum veniat , ex dictis evidens est; nempe in omni actione corporea tantum motus corpori *agenti* decedit , quantum corpori *patienti* , sive actionem suscipienti accedit. Illud autem utilissimum in universa Physica principium sequenti conclusione explicabimus.

CONCLUSIO.

Reactionem actioni contrariam , et æqualem esse , demonstratur.

I. Principium illud ex vi inertiæ facile deribatur ; etenim si corpus aliquod certam motus quantitatem in alio corpore producat, id fieri non potest , nisi mutationi status resistat corpus, quod datam motus quantitatem accipit. Necessum est igitur , intèr corpus *agens* , et corpus *patiens* mutuam veluti pugnam excitari , ita ut quantum motus accipit corpus patiens , tantum amittat corpus agens ; etenim ponamus , reactionem actioni æqualem non esse ; jam corpus patiens omni mutationi status non resisteret, sed alicui dumtaxat mutationis parti , quod falsum esse , demonstravimus in præcedenti conclusione. Itaque patet , actionis , et reactionis æqua-

æqualitatem necessarium esse vis inertiæ corollarium.

II. Idem principium experimentis, et exemplis demonstratur, atque illustratur. Si corpus unum in alterum quiescens impingat, quidquid motus quiescenti corpori imprimitur, tantumdem impingenti subtrahitur. Si corpora ambo moveantur, et ad easdem tendant partes; corpus, quod celerius movetur, in aliud, quod movetur tardius, incurrit, et tantum motus amittit, quantum acquirit corpus fugiens. Si corpora duo sibi obviam eant, sive in contrarias tendant partes; qualiscumque motus mutatio corpori uni accidet, eadem omnino corpori alteri continget; ita ut æqualis semper fiat in utroque corpore motuum jactura secundum propriam motus directionem. Casus singuli ad experientiam revocari facile possunt, si observentur spatia ab iisdem corporibus motu uniformi eodem tempore descripta: cum enim spatia illa sint inter se, ut velocitates, ob datas corporum massas, habebitur quantitas motus ante et post conflictum, ideoque instituta comparatione innotescet quantitas motus per conflictum acquisita, vel amissa. Hæc autem experimenta omnia actionis, et reactionis æqualitati sempèr consona deprehenduntur, quantum patiuntur inevitabiles superficierum asperitates, aliaque impedimenta plurima. Sed tota res multo magis perspicua fiet, ubi conflictum leges explicabimus. Actionis, et reactionis æqualitatem observare licet in attractionibus magneticis. Non solum magnes trahit ferrum, sed vicissim ab ipso ferro æqualitèr trahitur, ita ut æquales sint motus quantitates tum in magnete, tum in ferro productæ. Experimentum hoc modo institui solet. Imponitur magnes suberis frusto, et ferrum alio suberis frusto pariter imponitur, ut nempe hoc artificio tam magnes, quam ferrum æque libere innatare possint. Deinde manu retinetur magnes, ferrum videbimus ad magnetem accedere; si vero ferrum immobile teneatur, ad illud magnetem accedere observabimus. Sed si utrumque corpus aquæ innatare libere permittatur, magnes, et ferrum sibi mutuo obviam ire conspicientur, ita ut spatia à ferro, et magnete percursa semper sint in ratione reciproca massarum. Itaque æquales sunt quantitates motus hinc, et inde genitæ, ut patet ex demonstratis in articulo præcedenti.

Eadem lex variis exemplis confirmatur, atque illustratur. Si navigium remis agatur, aqua per remorum palmulas retrorsum versus gubernaculum propellitur, rursus aqua in remos æqualitèr agit, eosque una cum na-

navigio cui affixi sunt, versus partem contrariam impellit, et hac vi promovetur navigium. Aqua scilicet reactione sua tantum motus imprimit navigio, quantum ipsa remorum vi accepit; atque hinc intelligitur, eo celerius progredi navigium, quo majores sunt, vel numero plures remorum palmulæ, vel etiam quo celerius intra aquam agitantur. Hinc cum natatio nihil aliud sit, quam brachiorum, pedumque remigium, facile intelligitur, cur intra aquas promoveamur natando. Dum scilicet per manuum, pedumque palmas aqua retrorsum pellitur, illa iterum agendo in contrariam partem natantes propellit. Eodem artificio utuntur pisces, qui pro varia motus directione aquam repetitis, variisque caudæ ictibus feriunt. Idem etiam dicendum est de avium volatu; dum enim aves alarum impetu aerem deorsum verberant, aer avium alas sursum sublevat; si versus orientem pellatur aer, reactio aeris aves in occidentem impellit.

Actionis, et reactionis exemplum videre est in tormentis bellicis. Pulvis pyrius intra tormentum bellicum accensus rarefit, et vi sua æqualiter agit in globum missilem, et in tormentum, è quo exit globus; aer enim rarefactus in omnem partem sese expandens tam tormentum retrorsum, quam globum antrorsum urgebit, æqualem in utroque pro-

 du-

ducens motus quantitatem; atque ea de causa fit, ut tormentum bellicum sibi relictum ad distantiam satis magnam recedere videatur. Hanc reactionem experiuntur, qui sclopetis tractandis non sunt assueti; si enim sclopeti caput faciei, vel humero proximius non satis firma manu retineant, validissimum reactionis ictum sentient. Plurima alia et quidem utilissima exempla afferre possem; sed cum ad alias Physicæ partes pertineant, de his sermo deinde recurret. Ceterum ex dictis satis demonstratum est actionis, et reactionis principium.

Objic.: inter varia actionis, et reactionis exempla hoc primum à celeberrimo Nevvtono adhibetur: si equus lapidem funi alligatum trahit, æqua vi retrahitur equus in lapidem. Verum ex illa actionis, et reactionis æqualitate nullus umquam sequi posset motus. Si enim vis agens æquali resistentia absorbetur, atque retunditur, qui fieri potest, ut in prædicto exemplo equus lapidem trahat? Itaque sic argumentari licet: principium illud admitti non debet, quod perpetuam quietem, perpetuumque æquilibrium induceret; atqui cet.: ergo.

Resp. C. maj., N. min. Nonnulli Philosophi objectione præcedenti decepti de actionis, et reactionis æqualitate dubitarunt, sed tota objectio pura nominis ambiguitate

ma-

male fulcitur. Itaque confundi non debent *vis* et *actionis* nomina ; vis corporum non est actio ipsa , idque allato exemplo manifestum fit. Dum equus lapidem trahit, totam vim suam non impendit ad superandam lapidis resistentiam , sed aliquam dumtaxat vis suæ partem , quæ *actio* dicitur. Itaque per reactionem lapidis eam vis suæ partem equus amittit , quæ necessaria est ad vincendam lapidis resistentiam , vi autem reliqua equus lapidem trahit. Porro evidens est , legem æquilibrii longe differre à principio actionis , et reactionis ; duæ enim vires dicuntur in æquilibrio , si fuerint æquales , et oppositæ , nullusque , manente æquilibrio , contingere potest motus. Verum quamvis actioni æqualis , et contraria sit reactio , non tamen vi toti reactio semper æqualis est : dum autem id contigit , in hoc casu habetur æquilibrium , tumque vis tota æqualis est actioni.

Instabis 1. : si quis in navigio sedens, conto , vel alio quolibet instrumento navigium à litore repellat , id fit reactione ipsius litoris , ac proinde ex principio mox explicato eadem motus quantitas , qua navigium recedit à litore , in ipsum litus transferri deberet ; atqui hoc est absurdum : ergo cet.

Resp. C. maj. , N. min. Accurate distingui debet quantitas motus ab ipsa velocitate. Si quantitates motus fuerint æquales; erunt velocitates in ratione reciproca massarum ex demonstratis, ac proinde quo major est massa, eo minor est velocitas. Jam vero litus est firmissimus obex, et corpus immensum, si conferatur cum navi; ac proinde litoris velocitas erit minima, et physice nulla. Quamvis ergo nulla in magnis corporibus velocitatetem observemus, motus quantitas potest esse maxima.

Instabis 2.: omnia corpora in superficie terræ posita versus terram gravia sunt; hac vi gravitatis corpora ad telluris superficiem descendunt. Consentiunt Philosophi omnes, corpora descendentia à tellure attrahi, quæcumque sit hujus attractionis causa, de qua quidem maxime dissentiunt. Igitur si corpora à tellure trahantur, tellus vicissim trahetur à corporibus. Ita dum lapis ad terram descendit, terra vicissim ad lapidem assurget, et æquales erunt motus in lapide, tum in terra geniti; atqui hoc repugnare omnino videtur: ergo cet.

Resp. N. min. ex precedenti responsione facile solvitur hæc objectio. Re quidem vera æquales sunt motus quantitates tum in lapide, tum in terra productæ; cum vero quantitas materiæ in terra immensè superet quantitatem materiæ in lapide; velocitas la-

lapidis immense superabit velocitatem , qua terra ad lapidem tendit : ideoque , si physice loquamur , velocitas terræ nulla est, quod quidem calculo demonstrare non ab re erit. Ponamus lapidem centum pedum solidorum versus terram descendere , spatium à lapide tempore unius minuti secundi percursum erit circiter pedum parisiensium 15, ut ostendunt experimenta ; sed ex mensuris geographis tota globi terraquei moles continet pedes solidos 30, 000 , 000 , 000, 000 , 000 , 000 , 000 ; itaque ponamus , jam terram ubique esse ejusdem densitatis cum vulgaribus lapidibus, quamvis omnino credibile sit, eam esse multo densiorem; erit materiæ quantitas in terra ad materiæ quantitatem in lapide ; ut 3000000000000000000000 ad 1 ; proindeque dum lapis descendit per spatium 14 pedum , terra versus lapidem trahetur per unius pedis partes

$$\frac{15}{3000000000000000000000}$$

, quæ tantilla est quantitas , ut ipsam imaginandi vim longe effugiat ; ac proinde in Physica negligi potest , et pro nulla haberi, quam vis geometrice , et secundum veritatem loquendo terra ad lapidem accedat , et utrumque corpus æqualitèr se mutuo trahat. His paucis objectionibus respondisse satis sit ad explicandum

dum actionis, et reactionis principium. Ceterum hujus principii usus frequentissime recurret; præsertim in Astronomia.

ARTICULUS III.

De virium compositione.

I.

VIrium *compositio* dicitur virium plurium in vim unicam contractio; quia vero virium nomine nihil aliud intelligimus nisi motus ipsos dato aliquo tempore productos, hinc patet, virium compositionem nihil aliud esse, quam ipsam compositionem motuum. Itaque motus compositus dicitur is, qui ex pluribus motibus diversam directionem habentibus resultat; neque enim tamquam compositum habemus motum illum, qui ex pluribus motibus in eamdem directionem conspirantibus, vel directe oppositis oritur. Evidens enim est, in primo casu unicum esse motum summæ motuum æqualem; in altero autem casu motus æqualis est motuum differentiæ, quæ quidem differentia si nulla fuerit, hoc est si quantitates motus fuerint æquales, et directe oppositæ, habetur æquilibrium. Motuum compo-

si-

sitorum doctrina cum ipsa vi inertiæ necessario ordine conjuncta est, ut ex dicendis manifestum fiet.

Fingantur rectæ AB, AD (*Fig.* 1.) perpendiculares, et æquales, quæ exhibeant vires secundum directiones AB, AD; sive quod idem est, quæ repræsentent spatia datis viribus eodem tempore motu uniformi percursa. Corpus immineat motum angulo A, urgeaturque viribus secundum directiones AB, AD; dato quolibet tempore corpus vi unica secundum AD percurrat spatium AC; eodem tempore vi unica secundum AB percurret spatium AI spatio priori AC æquale, ex demonstratis de vi inertiæ. Jam ponamus, corpus illud viribus duabus simul urgeri, quo tempore progreditur per AC, ascendet quoque per AI, vel CE; sunt enim per constructionem rectæ AI, CE, itemque IE, AC æquales, et parallelæ; ergo corpus reperitur in directionum AB, et AD concursu; ac proinde in concursu rectarum IE, CE, hoc est in diagonali quadrati AIEC, atque ad punctum E perveniet eodem tempore, quo motibus sejunctis percurreret AC, vel AI, ut patet. Eadem ratiocinatio ad aliud quodlibet tempus transferri potest; cum enim spatia AI, IE, itemque AB, BF sint æqualia, erit AI: IE: AB; BF; ac proinde cum sint IE, AC,

item-

itemque BF, AD æquales, et parallelæ, erit recta AF diagonalis quadrati ABFD. In hac demonstratione velocitates non solum ponuntur uniformes, sed etiam æquales; at evidens est, totam demonstrationis seriem perinde se habere, etiamsi velocitates non fuerint æquales: etenim velocitates uniformes sunt, ut spatia iisdem temporibus descripta: ergo velocitas per AI est ad velocitatem per IE, ut AI ad IE, ut AB ad BF, ac proinde AI : IE : : AB : BF; ideoque eamdem manet demonstratio, quæ etiam valet, quamvis velocitates non fuerint uniformes, dummodo tamen in eadem data ratione semper accelerentur, vel retardentur. Puta, si velocitas per AD sit dupla, vel tripla cet. velocitatis per AB; res perinde se habet, quomodocumque acceleretur, retardetur velocitas per AB, et AD, dummodo velocitas per AD semper maneat dupla, vel tripla cet. velocitatis per AB; quod evidens est, cum perpetuo servetur triangulorum AIE, ABF similitudo.

Hoc ergo est universalissimum principium. Si corpus urgeatur duobus motibus, quorum directiones eumdem angulum semper contineant, corpus illud describet diagonalem parallelogrammi, cujus latera sunt spatia secundum utramque directionem eodem tempore percursa; dummodo tamen maneant

neant prædictæ motuum conditiones, si nempe directiones eædem maneant, et velocitates sint uniformes, aut similes. Adolescentum imaginatio in hac demonstratione sublevari potest exemplo normæ, quæ sibi semper parallela uniformiter moveatur, interea dum corpus aliquod uniformiter quoque progreditur secundum ductum normæ, quam corpus perpetuò radat.

In hoc autem exemplo, atque in precedenti demonstratione unum monendum est. In hoc scilicet exemplo, atque etiam in tota demonstrationis hypothesi vires duæ tamquam seorsim agentes perpetuò considerantur, quod quidem à statu quæstionis non nihil abluere videtur; cum primo motus initio vires duæ simul imprimantur, et deinde conjunctum agant. Itaque ut præcedens demonstratio ad severitatem geometricam sit omnino composita, ostendi debet; demonstrationem perinde se habere, sive vires considerentur seorsim, sive conjunctim, quodquod quidem facile præstari potest; nam ponamus vires duas dato aliquo tempore seorsim uniformiter agere in corpus A; et deinde corpus illud sibi relinqui, seu ab ipsis viribus deseri; evidens est, in hoc casu describi diagonalem, ut patet ex demonstratione præcedenti, et ex vi inertiæ; valet autem demonstratio, si vires duæ da-

dato quolibet tempore seorsim considerentur; itaque ex temporis conditione, vel limitatione nullatenus pendent corporis directio, et velocitas, ac proinde describitur diagonalis, etiamsi tempus ponatur minimum, vel nullum, dum scilicet vires duæ conjunctim agunt. Vulgari demonstrationi, quæ in omnibus Physicorum libris passim legitur, addenda est hæc ratiocinatio; quamvis enim verum sit principium, sive considerentur vires seorsim sive conjunctim, res tamen non ita est evidens, ut sine demonstratione prætermitti debeat.

Motus compositi exemplum præbet cymba, profluente amne, delata. Si quis è cymba interim progrediente in litus desilire voluerit, eum, quem sibi proponit, litoris locum non attinget. Motus enim ille componitur ex duplici motu, navigii scilicet, et hominis desilientis, ac proinde in hoc casu per motuum diagonalem homo ad litus perveniet. Idem est exemplum hominis præcipiti curru devecti, et interim sese in terram proripientis, quod quidem temere omnino fit; si enim satis magnus non sit desilientis hominis impetus, et currus ad saltus partem declinaverit, rotis ipsis imminere, et opprimi facile poterit imprudens homo.

II. Quamvis duas dumtaxat vires consideraverim; simili tamen ratiocinatione patet,

tet, vires utcumque numero plures in unicam diagonalem componi posse: etenim considerentur primum vires duæ, quarum inveniatur diagonalis, quæ proinde vires duas repræsentabit. Deinde diagonalis illa conferatur cum vi tertia, et iterum inveniatur diagonalis, et ita deinceps, donec perveniatur ad communem virium omnium diagonalem, quæ *media directio* appellatur, atque hæc erit via, quam corpus his omnibus viribus simul solicitatum percurret. Evidens autem est, vim quamlibet compositam inversa operatione in vires per latera resolvi posse, atque hæc operatio *virium resolutio* vocari solet. Cavendum tamen est maxime, ne vis composita cum viribus per latera confundatur; vis composita viribus componentibus æqualis non est, cum enim vires componentes exibeantur per latera trianguli, cujus tertium latus est ipsa vis composita, patet, vires componentes majores esse vi composita, quemadmodum latera duo trianguli sunt tertio quolibet majora. At vires illæ *æquipollentes* merito dici possunt, hoc est, motus perinde se habet, sive corpus urgeatur viribus duabus per latera, sive urgeatur vi unica per diagonalem ex duabus viribus composita.

III. Hactenus consideravimus vel motus uniformes, vel similes; at si motus neque uni-

uniformes fuerint, neque similes, ita ut spatia iisdem temporibus descripta datam inter se rationem non habent; evidens est, similia non esse triangula ex motibus componentibus, et ex diagonali formata; ac proinde singulis temporibus minimis directionem perpetuò mutat diagonalis, ideoque abit in curvam. E. G. recta CD (*Fig.* 2.) exibeat spatia motu uniformi descripta, rectæ autem perpendicularis, ut EI cet. exibeant spatia vi aliqua perpetuò acceleratrice percursa. Corpus motu uniformi solicitatum per CD recta abiret in infinitum, singulis temporibus æqualibus æqualia spatia describens per vim inertiæ; at ob vim acceleratricem per EI, corpus his duabus viribus solicitatum progreditur per curvam CI: etenim manentibus, CE, EF æqualibus, erit CG minor, quem GH ob motum perpetuò acceleratum secundum directionem EI. Igitur triangula CEI, CFK, CDB non sunt similia, ac proinde cum triangula illa utcumque minima concipi possint, evidens est rectas quascumque EI, FK, DB ad lineam rectam non pertinere, ac proinde diagonalis est curvilinea.

IV. Si recta CA consideretur tamquam axis curvæ, erunt CG, vel EI, GH; vel FK *abscissæ*, rectæ autem GI, vel CE, HK, vel CF cet. *ordinatæ*. Jam vero natu-

ra,

ra, sive *æquatio* curvæ definitur ex ratione abscissarum ad ordinatas; quare patet, curvam duabus quibuslibet viribus descriptam pendere ex ipsa virium natura, seu ratione. Ceterum ex demonstratis patet, vi unica curvam describi non posse; corpus enim per vim inertiæ vis impressæ directionem, seu lineam rectam perpetuò sequitur; quare dum corpus curvam aliquam describit, duabus saltem viribus illud solicitari, necessum est.

Curvam quamlibet considerant Geometræ tamquam polygonum constans ex lateribus rectis tangentibus numero infinitis, et infinitè parvis; quare dum corpus movetur in arcu curvæ infinitesimo, idem omnino est ac si moveretur per tangentem infinitè parvam. Si ergo statim desineret actio vis per EI, corpus abiret secundum directionem tangentis per vim inertiæ: hinc fit ut curva quælibet considerari possit, tamquam duabus viribus genita, quarum una dicitur *tangentialis*; altera autem, quæ corpus à tangente retrahit, *centripeta* appellatur; quod quidem nomen retinet, sive vis illa ad unum punctum perpetuò dirigatur; sive directionem perpetuò mutet. Vis autem contraria, qua curpus ab arcu ad tangentem conatur deflectere, vocatur vis *centrifuga*.

V. De viribus centripeta, centrifuga,

et tangentiali, data opera, quantum licet, deinde tractabimus. Hìc observare satis sit, vim tangentialem, et centrifugam ex vi inertiæ originem quidem habere; at cavendum est diligentèr, ne vis centrifuga expresse per lineolam IE confundatur cum vi tangentiali, quæ exprimitur per CE, in quem errorem mirum sane est, quam gravitèr in tanta rerum physicarum luce prolapsi sint viri doctrinæ fama celebres. Et quidem virium illarum nec conveniunt directiones, ut patet, neque etiam mensuræ, imo vis tangentialis infinities major est vi centrifuga. Sic AC (*Fig.* 4.) arcus circuli infinitesimus, erit AM, vel BC ad MC, vel AB, ut MC ad MD. Quia vera arcus AC est infinitesimus, erunt rectæ AB, et MC infinitesimæ, ac proinde MC erit infinitesima respectu MD, ideoque BC erit infinitesima respectu AB. Quare vis tangentialis AB est infinite major vi centrifuga BC. Alterum tandem monendum est, vim centripetam, et centrifugam per eamdem lineolam exprimi, ac proinde æquales esse; cum enim vires sint, ut spatia iisdem temporibus minimis descripta; evidens est, vim centripetam, et centrifugam, quæ per idem spatium eodem tempore minimo descriptum exibentur, æquales esse. Quamvis autem æquales sint vires illæ, longe tamen inter

se

se differunt; nam vis centrifuga est vis *passiva* dumtaxat, quæ nullum exerit effectuum, nisi cessante vi centripeta; hæc autem ultima est vis *activa*, quæ nempe perpetuo agit.

VI. Virium centripetæ, et centrifugæ exemplum præbet lapis funda circumactus. Manus lapidem retinens exhibet vim centripetam; vis autem, quæ funem tendit, qua scilicet lapis conatur recedere à circumferentia circuli descripti, repræsentat vim centrifugam. Et re quidem ipsa, si manus lapidem deserat, statim lapis abit per tangentem circuli antea descripti. Hæc autem pauca dicta sint; de hoc enim utilissimo argumento sermo deinde recurret.

Alteram, quam breviter attingimus motus compositi, speciem oculis demonstrant corpora per aerem horizontalitèr, vel oblique projecta: motu composito igneam curvam in aere delineant tubuli nitrato pulvere referti. In his casibus duæ considerandæ sunt vires, una scilicet *projectionis* ex manu, vel pulvere pyrio oriunda; altera autem est vis gravitatis, qua corpus motu accelerato descendit; sed hujus curvæ naturam demonstrabimus, ubi de corporum projectorum motû.

APPENDIX.

De quibusdam capitis præcedentis utilitatibus.

I.

MAteriam cogitationis expertam esse, invictissimis argumentis in Metaphysica jam ostendimus ; quamvis autem fide divina verissimum sit primarium illud Religionis dogma , varia tamen argumenta conquirere , et adversus incredulos congerere religiosos Phylosophos maxime decet. Vis suspicari quis statim posset , vim inertiæ aliud Philosophis suppeditare hujus dogmatis argumentum , quod tamen valide urgeri potest ; et quidem substantia cogitans vim , habet mutandi statum suum potest nempe cogitationem præsentem desere , et ad aliam transire , actionem aliquam velle, aut respuere ; quam quidem facultatem proprio conscientiæ testimonio experimur. Cum ergo vis inertiæ universalissima sit materiæ proprietas , ita ut nulla materiæ pars statum suum vel levitèr sponte mutare possit ; manifestum est , cogitandi facultatem ad materiam pertinere non posse. Neque est , quod objiciant , vim inertiæ locum habere dumtaxat in materia nullo principio intelligente informata; nam rursus, principium illud intelligens materiæ conjunctum vel est materiale, vel non. Si primum, jam eadem recurrit cogitandi impossibilitas; si secundum, principium illud facultatem cogitandi ex se habere necessum est sine ullo materiæ auxilio, quæ ipsa non habet cogitandi vim, quam proinde nullo modo conferre potest. Itaque ex duarum substantiarum, quæ cogitare non possunt, conjunctione oriri non potest cogitandi facultas. Præterea perversissimi homines, qui materiæ cogitationem non repugnare asserunt, si impiissimi Spinosæ sectatores excipiamus, non inficiantur, existere substantias spirituales, et intelligentes; cum ergo vim intelligendi habeant, principium intelligens nulla materiæ ope ad cogitandum indiget. Itaque hoc argumentum validissime propugnari potest contra eos, qui spiritus extra materiam existere fatentur, at contra Spinosistas alis agendum est argumentis, quæ in nostris institutionibus metaphysicis explicavimus, vel prius demonstranda est spirituum extra materiam cogitantium existentia. Neque est tandem, quod objiciant, Deum omnipotentem his duabus substantiis simul conjunctis tribuere potuisse vim cogitandi, quam materiæ convenire non posso, proprio loco ostendimus; ex præcedenti ratiocinatione id saltem evidens fit, universalissimis materiæ proprietatibus repugnare, ut materia vim cogitandi habeat. Nemo igitur nos tamquam ultra modum religiosos reprehendat, quod hujus ratiocinationis pondus argumentis metaphysicis adjungamus.

II. Actionis, et reactionis exempla avium volatu, piscium natatu, remorum actione afferre solent Physici. Idem vero principium ad eximiam utilitatem traduxit vir doctissimus Daniel *Bernoullius*, qui in egregio opere, cui titulus est *Hydrodinamica*, novum, et hactenus inauditum navigandi genus proposuit sine velis, et remis, quod quidem paradoxum omnino videvitur. Rem paucis exponam. Navigio versus puppim firmitèr alligari præcipit Bernoullius canalem utrimque apertum, et aquæ perpetuò plenum, quod quidem sine magno labore antliarum ope præstari potest. Jam aqua ex canali versus puppim effluens, in ipsam maris aquam agit, ipsa autem reagit, atque hac perpetua reactione antrorsum propellitur navis, et sine velis, ac remis gubernatur; quo quidem loquendi modo res impossibilis, et absurda exprimi solet. Hujus reactionis æstimandæ ratio ad subliniorem fluidorum doctrinam pertinet, neque tantam rerum physicarum difficultatem

præ-

præsens locus sustinet; quia tamen novus ille navigationis modus ex actionis, et reactionis principio natus est, in præsenti appendice hanc doctissimi viri cogitationem opportune interponendam esse, existimavi, neque deerunt fortasse imperiti homines, qui rem velut insulsam rideant; at Philosophi est magnorum virorum meditationes venerari, et tamen perpendere, atque, si fieri possit, ad experientiam revocare. Ego autem in navicula non sine successu rem tentavi, atque inito calculo invenitur, tantam hoc artificio obtineri posse prægrandis etiam navis velocitatem, quæ magna remigum manu vix ac ne vis quidem haberi potest. Calculo quidem subjici non possunt inordinatæ aquarum directionis, marisque jactiones, ac proinde minuitur inventi utilitas, non tamen omnino tollitur. Hæc maxima saltem haberi poterunt commoda; nempe naves bellicas in præliis navalibus, deficiente omni vento, quo lubet, agere licebit, atque etiam brevibus trajectibus serena tempestate, tranquilloque mari instituendis inservire poterit talis navigii usus.

III. In capite præcedenti de vi centrifuga brevem mentionem injecimus. Ex hujus vis doctrina innumeræ in societatem humanam derivantur utilitates, quarum unam hic seligere satis erit. Clarissimo viro *De-*

saguilierio debetur machina, quæ *rota centrifuga* appellatur; ex tympano ligneo parum alto constat hæc machina, cujus cavitas in duodecim cellulas distributa est, singulæ autem cellulæ ad tympani centrum protensæ, cum aere externo communicant ex parte circumferentiæ, quæ pro cellularum numero duodecim quoque foraminibus pertusa est. Tympanum hoc modo comparatum capsula majori parallelopipeda includitur, atque axe ita trajicitur, ut manubrii ope extra capsulam prominentis converti possit. Rebus ita dispositis, si tympanum velocissimè circumagatur, aeris particulæ in tympano inclusæ revolvuntur, ac proinde vim centrifugam acquirunt, et exitum quærunt: quare si in plano rotationis aperiantur foramina, quibus annectantur flexiles tubuli extra cubiculum protensi, aer in tympano conclusus, revoluta machina, exibit; aer autem in cubiculo contentus per foramen rotationis plane perpendiculare tympani civitatem ingredietur, aeri expulso statim succedet aer iterum quoque expellendus. Jam vero quantum aeris excluditur, tantum quoque advenit per fenestras, januas, vel etiam cubiculi rimas: quare patet, id tandem commodum nos lucrari, ut, repetitis motibus, nil fere pristini aeris supersit, quod quidem eximiæ

uti-

utilitatis esse potest in nosocomiis, in fodinis, aliisque locis impuro aere fædatis. Hujus machinæ utilitatem maximam testatam fecere peritissimi navium præfecti, qui in longinquis navigationibus hujus rotæ beneficio sese liberatos fuisse referunt à frequentissimo, perniciosissimoque morbo, qui *scorbutus* dicitur. Dolendum ergo est, quod utilissima inventa respuere soleant plerique homines haud satis æqui talium rerum æstimatores. Ceterum prædictæ machinæ usus oculis quoque fit conspicuus, si aeris loco crassiorem fumum ex sacchaaro excitatum in tympani cavitatem introducamus; hunc enim, circumacto tympano, velocissime extudi observabimus. Idem quoque alio experimento manifestum fiet; si nempe foramini in ipsa vis centrifugæ directione aperto objiciatur candelæ flammula, hanc extrorsum pelli, et statim extingui videbimus: contra autem introrsum urgebitur, et extinguetur, si alteri foramini, quod rotationis plano perpendiculare est, admoveatur; quod quidem manifestissimum est argumentum, pari ratione aerem ex una parte introduci, ex altera autem ejici. Hujus machinæ partes singulas explicare, et vim totam calculo æstimare, nec præscripta his institutionibus brevitas, nec rei difficultas patiuntur. Ex universa Physicæ serie

ma-

magis ac magis fiet manifesta capitis præcedentis utilitas, quam paucis exemplis indicasse satis sit, ut studiosæ juventuti instilletur præclarisimi studii amor, quantum unicuique pro vivendi justituto, et ratione licet.

CAPUT II.

De vi attractionis, variisque illius speciebus.

ATtractio generatim spectata dicitur vis, qua corpora in se mutuo, vel ad punctum aliquod tendunt, quod *centrum virium* ideo appellatur. Variæ sunt attractionum species, quarum aliæ certis dumtaxat corporibus competunt; talis est vis *magnetica*, *electrica* cet. sed speciales illæ attractiones ad Physicam particularem pertinent. Aliæ autem attractiones omnibus corporibus conveniunt, ac proinde in Physica generali considerandæ. Duplex autem est hujusmodi attractio universalis; alia inter magna corpora, et ad magnas exercetur distantias; alia inter minimas corporum particulas viget, et in minimis dumtaxat intervallis. De hac utraque attractionis specie tractabimus, et generalem attractionis doctrinam præmittemus.

ARTICULUS I.

De attractione generatim considerata.

I.

CORpus aliquod projectum fingatur vi impressa secundum directionem AF (*Fig.* 3.) et interim vi alia perpetuo tendat versus punctum S; tempore minimo corpus vi impressa per AF describere ponatur lineolam AB, tempusculo altero æquali percurreret æqualem lineolam BC, et ita deinceps. Jam vero dum corpus perveniet ad B, agat vis tendens ad centrum S, qua vi sola corpus describere possit lineolam BE; completo parallelogrammo EBCD, motu composito corpus describet diagonalem BD (ex articulo præcedenti.) Ex elementis Geometriæ evidens est, æqualia esse triangula ABS, SBD æqualibus temporibus descripta: etenim triangula ABS, SBC æqualia sunt, cum æquales habeant bases AB, BC, communemque verticem S. Præterea æquantur triangula BSD, BSC super eadem basi BS, et inter easdem parallelas BS, CD constituta. Igitur æqualia sunt trian-

triangula BSD, BSA, utpotu æqualia eidem triangulo BSC. Quod autem demonstravimus de minimis duobus triangulis ABS, BSD, idem facile intelligitur de alia qualibet triangulorum serie; et quidem seclusa vi tendente ad centrum S, corpus per vim inertiæ moveri pergit secundum BD; sed accedente vi versus S; eadem ratiocinatione patet tertio tempore æquali æquale triangulum describi. Igitur æqualibus temporibus æquales triangulorum areæ percurruntur, tempore duplo describitur area dupla, tempore triplo tripla; quare generatim areæ tempore quolibet descriptæ sunt temporibus proportionales. Jam ponamus, polygonum hoc modo descriptum ex lateribus numero infinitis, et infinite parvis compositum abire in curvam, manifestum est corpus circa centrum virium S perpetuò describere areas temporibus proportionales. Demonstratum ergo est præclarissimum theorema, quod Astronomiæ, et universæ fere Physicæ fundamentum est, nempe: *si corpus describat curvam quamlibet vi tendente ad punctum aliquod in curva datum; corpus illud describet areas circa idem punctum temporibus proportionales.*

Viceversa *si corpus moveatur in curva, et areas temporibus proportionales circa punctum aliquod describat; urgetur vi ten-*

den-

dente ad illud punctum : etenim si vis alia ad punctum extra S diversum tenderet, jam directio CD non foret directioni BE parallela; ac proinde triangula BSC, BDS super communem basim constituta non forent inter easdem parallelas, nec proinde æqualia, quod est contra hypothesim; ponimus enim, areas temporibus proportionales esse, ac proinde æqualia esse minima triangula temporibus æqualibus descripta. Itaque demonstratum etiam est, corpus, quod movetur in curva, et areas circa punctum aliquod temporibus proportionales describit, urgeri vi ad illud punctum tendente. Ex hoc theoremate universa pendet attractionis doctrina.

Ex hoc ipso theoremate evidens est, velocitatem corporis in diversis curvæ punctis eo majorem fore, vel minorem, quò minor est, vel major recta à centro virium ad tangentem perpendicularitèr ducta; nempe *velocitates sunt reciproce, ut perpendicula è centro virium in tangente demissa*: etenim velocitates utcumque variabiles tempore infinite parva tamquam uniformes considerari possunt, ob minimum, sive infinitesimum velocitatis incrementum, vel decrementum. Itaque velocitates uniformes per AB, BD sunt ut spatia AB, BD iisdem temporibus minimis descripta; sunt au-

autem spatia illa bases triangulorum æqualium ASB, BSD, quæ proinde sunt reciproce, ut perpendicula ex centro S in bases AB, BD demissa; sed polygono in curvam abeunte, latera AB, BD evadunt tangentes curvæ in punctis A, et B; erunt igitur velocitates in singulis curvæ punctis reciproce, ut perpendicula ex centro virium in tangentes demissa. Quod quidem corollarium eximiæ utilitatis esse, ex dicendis manifestum fiet.

II. Attractionem in variis curvis considerare solent, qui sublimiorem Physicæ doctrinam explicant; nos vero facilitati studentes in circulo dumtaxat rem considerabimus, atque hanc hypothesim ad physicam veritatem, quantum licet, accurate transferre conabimur. Revolvatur in peripheria circuli ACD corpus A (*Fig.* 4.) quod ubi ad A pervenit, sublata vi tendente ad centrum; qua in circumferentia retinetur, per tangentem AB in infinitum excurreret; itaque ut corpus in peripheria delineatur, necessum est, vim aliquam perpetuò agere, quæ corpus urgeat versus D per spatium BC; interea dum mobile vi impressa progrederetur per spatium infinitesimum AB; his enim viribus conjunctis mobile describet lineam AC. Hæc omnia facile patent ex demonstratis de virium compositione. Vis,

quæ

quæ exhibetur per BC, dicitur *attractio*, quam alio nomine vim *centripetam* appellavimus; vim autem, qua mobile ex arcu curvilineo transit ad tangentem, quæque exhibetur per CB, diximus, vim *centrifugam*; ambæ autem vires communi nomine *centrales* vocantur. Igitur lineola BC exprimet vim centralem. Jam vero in circulo ducta chorda infinitesima AC, erit ob triangulorum ACD, ACM similitudinem AM vel $BC : AC = AC : AD$, ac proinde AM,

$$\text{vel } BC = \frac{AC^2}{AD};$$

hoc est vis centralis in circulo est, ut quadratum chordæ divisum per diametrum: quia autem arcus infinitesimus, illiusque chorda æquipollent, loco cordæ substituere licet ipsum arcum, ideoque vis centralis est ut quadratum arcus divisum per diametrum, vel per radium; cum enim virium centralium rationem dumtaxat hæc formula exprimat; perinde est, sive diametrum, sive semidiametrum adhibeamus. Porrò vis centralis nomen retinet attractio, etiam si vis illa ad unicum punctum non dirigatur: singulis temporibus directionem mutare potest; ut enim mobile curvam describat, satis est, vis centralis directionem non congruere cum ipsa directione tangentis, quod quidem evidens est

ex

ex articulo præcedenti. His præmissis in proximo articulo fusius explicandis, sit.

CONCLUSIO.

Universalem inter corpora omnia attractionem demonstrant phænomena.

§ I. Circa Solem revolvi observantur stellæ quinque, *planetæ*, sive *erraticæ* ideo appellatæ. Harum nomina sunt: *Mercurius*, *Venus*, *Mars*, *Jupiter*, *Saturnus*. Planetas illos ita circa Solem revolvi, demonstrant observationes Astronomicæ, ut radiis ad Solem ductis areas describant temporibus proportionales. Lex illa, qua planetæ circa Solem areas describunt temporibus proportionales, ab inventore suo *prima lex Kepleri* solet appellari. Saturnum comitantur stellulæ quinque, quæ satellites dicuntur, et Jovem quatuor; illi autem satellites, qui *planetæ secundarii* etiam appellantur, eadem lege circa planetas primarios revolvuntur, areas scilicet circa suos planetas, et circa Solem ipsum describunt temporibus proportionales. Revolvitur quoque Luna circa terram nostram, radiisque ad ipsius centrum ductis areas describit temporibus, quam proxime proportionales. Igitur planetæ primarii vi centripeta tendunt in in Solem, et planetæ secundarii tendunt quoque in suos primarios, atque in Solem ipsum; Luna etiam vi centripeta urgetur in terram. Porrò actioni æqualis est, et contraria reactio; ergo mutua est attractio, nempe planetæ attrahuntur à Sole, et viceversa Sol trahitur à planetis; satellites tendunt in planetas primarios, et contra planetæ primarii in secundarios, ac proinde Luna tendit in terram, et vicissim terra in Lunam. Hanc mutuam Lunæ, tellurisque attractionem demonstrant astronomicæ observationes plurimæ, sed explicata Astronomiæ doctrina tota res deinde facilius intelligetur, quare mutuam planetarum attractionem nunc generatim ostendere satis erit. Cum inter planetas primarios, et secundarios, inter Solem, et planetas singulos actio sit reciproca, inter varios planetas actionem quoque mutuam esse, ex analogia naturæ colligi potest; hanc autem ratiocinationem, quæ non satis firma, fortasse videbitur, confirmant errores in Saturni, Jovisque motibus ex mutua illorum octione oriundi. Pro varia planetarum illorum distantia à Sole, et se invicem, pro diversa illorum mutua, et respectu solis positione, multæ in illorum motibus observantur inæqualitates, quæ nulli alteri causæ, quam mutuæ attractioni tribui posunt.

Qua enim ratione alia fieri posset, ut planetæ illi pro varia positione suos motus turbarent? nisi vi aliqua attrahente, quæ in minoribus distantiis major est, in majoribus autem minor. Errores in Jovis, et Saturni motibus sese facilius Astronomis conspicuos præbent; certum enim est, planetas illos esse reliquorum omnium longe maximos; ac proinde et major esse debet actio mutua; sed hujus attractionis legem in proximo articulo expendemus, et attractionis doctrinam magis, ac magis declarabimus.

II. Vim attractivam, qua sese mutuò petunt corpora cœlestia, inter corpora terrestria etiam vigere ostenditur exemplo Lunæ. Satis accuratæ ponunt Astronomi, Lunam motu uniformi circa terram revolvi in circulo, cujus radius æqualis est sexaginta semidiametris terrestribus. Itaque cum circulorum peripheriæ sint inter se, ut radii, erit orbis lunaris circumferentia circuli maximi terrestris circumferentia sexagesies major. Inventa autem est circuli maximi terrestris circumferentia pedum parisiensium 123249600, ac proinde nota est orbis Lunaris peripheria, quæ sexagesies major est. Jam vero tempus periodicum Lunæ, quo nempe Luna circa terram revolvitur, est dierum 27. horarum 7. minutorum primo-morum 43 quia autem motus ponitur uniformis, facile invenitur spatium dato aliquo tempore descriptum, V. G. minuti unius primi tempore. Sunt enim spatia velocitate uniformi percursa directe ut tempora, quare per *regulam trium* dicatur: tempus totum periodicum lunæ est ad tempus minuti unius primi, ut tota lunaris orbis peripheria ad ejusdem orbis arcum tempore minuti primi descriptum. Datis autem in proportione tribus terminis, datur et quartus, ac proinde invenietur arcus minuti unius primi tempore descriptus, cujus arcus quadratum dividatur per lunaris orbis diametrum, habebitur, ex demonstratis, lineola BC, hoc est, vis centripeta lunæ; hæc autem lineola inito calculo invenitur æqualis pedibus 15. $\frac{1}{12}$ parisiensibus; nempe talis est vis centripeta lunæ in distantia à terra semidiametrorum terrestrium sexaginta, ut luna, urgente vi illa, tempore minuti unius primi versus terram descenderet per spatium pedum 15. $\frac{1}{12}$ Jam fingamus, lunam accedere ad terram, erit velocitas lunæ sexagesies major; sunt enim velocitates reciproce, ut perpendiculares ex centro virium ad tangentes demissæ, hoc est in ratione semidiametrorum ex hypothesi orbis circularis. Itaque Luna prope terram tempore sexagies breviori, nempe minuto uno secundo describeret pedes $15.\frac{1}{12}$; dato enim spatio velocitates uniformes sunt inversæ ut tempora; sed hoc idem spatium eodem tempore percurrunt gravia terrestria; igitur vis centripeta lune, et vis centripeta terrestris sunt ejusdem generis, cum eamdem utraque mensuram habeat, eamdemque directionem: ergo luna graviaque terrestria tendunt in terram, atque etiam se mutuo trahunt corpora omnia terrestria, non secus ac faciunt cœlestia per legem analogiæ.

III. Non solum in se mutuo tendunt corpora, sed etiam eadem vi mutua pollent omnes corporum partes, alioqui tota dissolveretur corporum, tellurisque compages. Illa autem attractio non solum mutua est, sed etiam æqualis; etenim distinguatur terre moles in binas quascumque partes vel æquales, vel utcumque inæquales, jam si partium attractio mutua non foret, atque etiam æqualis, attractio minor cederet, majori, et partes conjunctæ recta moveri pergerent in infinitum: partes igitur sese mutuo æqualiter urgent, ita ut actioni semper æqualis sit, et contraria reactio,

tio, quæ quidem omnia allato jam antea magnetis exemplo illustrari possunt. Quod autem dictum est de binis utcumque terræ sectionibus, idem quoque intelligitur de aliis quibuscumque corporum partibus. Itaque attractionem universalem demonstrant phænomena cœlestia, atque terrestria; ita ut hanc naturæ legem in dubium vocare non possit ingenuus Philosophus, quæcumque sit attractionis causa, quam deinde variis in locis data occasione expendemus. Hæc doctrina mortalibus omnibus tamdiu ignota à Nevvtono tandem admirabili quadam felicitate in bono lumine collocata est. Extiterant sane, qui ante ipsum attractionem nominarent. Keplerus, qui motuum cœlestium leges felicissime detexit, earum causas per *magnetismum* quemdam explicare conatus est. Verum quæ hac de re protulit, tam incerta ratione deducta sunt, et plerumque etiam ita sunt absurda, ut cum iis comparata, quæ Nevvtonus certissima methodo invenit, pro nullis omnino haberi debeant. Hinc Nevvtonianæ doctrinæ parum doctos sese probant aliqui Philosophi, qui haud satis æqui rerum æstimatores inventionis gloriam hac in re Nevvtono eripere conantur.

Objic: attractionis universalis doctrina maxime innititur prima Kepleri lege, qua nempe statuitur, planetas primarios circa Solem, secundarios circa primarios areas temporibus proportionales describere; atqui lex illa nequaquam observatur, imo attractionis doctrinæ repugnat omnino; et quidem in motibus Jovis, et Saturni demonstrat observationes astronomicæ variationes plurimas, quæ areas temporibus proportionales maxime perturbant; tot mutationibus obnoxii sunt lunares motus ut nulli fere legi subjiciantur; easdem mutationes patiuntur Satellites Jovis; ergo cet.

Resp. dist. min.: lex illa non observatur *accurate*, C. min. *quam proxime*, N. min. et cons. Re quidem vera erroribus plurimis obnoxii sunt corporum cœlestium motus, sed errores illi attractionis doctrinam apprime confirmant, ut jam observavimus. Demonstratum quidem est, areas temporibus proportionales esse, verum in hac demonstratione unius dumtaxat corporis vim centripetam consideravimus, neque errores ex mutua aliorum corporum attractione oriundus æstimavimus. Porrò Kepleri legem aliquantulum perturbat mutua planetarum attractio, et præsertim in Jove, et Saturno ob majorum illorum massam. At aberrationes illæ in minoribus dumtaxat planetarum distantiis conspicuæ fiunt; quo magis autem à se invicem recedunt planetæ,

eo

eo minores deprehenduntur errores, atque tandem evanescunt. Eamdem est ratio, cur variationes plurimas experiatur Luna ob variam scilicet telluris Solisque positionem, variamque illorum distantiam. Tandem varia Satellitum jovialium positio, diversaque distantia aliquam in illorum motibus mutationem afferre debent. Sed omnes illos errores ad calculum revocare norunt Geometræ, quorum quidem diligentiam, et peritiam demonstrat calculorum cum observationibus astronomicis summa consensio. Itaque ex præcedenti objectione nihil aliud colligi potest, nisi pro varia corporum massa, variaque distantia diversam quoque esse attractionem. Addere jam satis erit, probatam quoque manere vim attractivam, etiamsi corpora cœlestia areas temporibus proportionales non describant, evidens enim est ex demonstratis de virium compositione, sine vi aliqua centripeta nullum fieri posse motum curvilineum, quæcumque sit vis centripetæ directio; igitur curvilinei planetarum motus vim aliquam centripetam, ac proinde attractionem demonstrant.

Instabis 1.: ex illa mutua attractione sequeretur universi systematis planetarii confusio, si enim planetæ se mutuò attrahant, progressu temporis in se mutuò præcipites ruere debent, atque tandem in eamdem cum Sole massam coalescere : ergo cet.

Resp. neg. ant. cujus probatio tota facile evanescit, si attendamus, planetas duabus viribus urgeri, una secundum directionem tangentis, altera autem centripeta. Et quidem sine virium illarum compositione nullum orbem curvilineum describi posse, sæpius demonstrabimus. Et certe sola vi centripeta in se mutuo ruerent corpora omnia, atque in rudem, indigestamque molem tandem rediret totus hujus universi ordo. At omnipotenti, divinaque manu ita inter se temperati fuerunt cœlestes motus, ut planetæ in orbibus suis circa Solem certa, et admiranda lege regantur, atque retineantur.

Instabis 2. : stellæ fixæ eamdem perpetuò à se invicem distantiam servant, suisque locis immotæ manent ; iis ergo nullus impressus est motus, ac proinde sola remaneret vis centripeta, qua stellæ fixæ in unum tandem coirent globum. Itaque sic argumentari licet : universam mundi compagem perturbaret attractio illa, qua stellæ fixæ in se mutuo tenderent, atque in unicam tandem coalescerent massam : atqui cet. : ergo cet.

Resp. neg. min. Etiamsi nullus stellis fixis impressus fuerit motus, tanta tamen esse potest stellarum à se invicem distantia, ut mutua attractio, quam ex distantia pendere re observavimus, omnino evanescat. Præterea certissimum est, stellas esse totidem Soles proprio lumine fulgentes, circa quos probabilissimum est revolvi non secus, ac circa Solem nostrum diversa planetarum systemata. Si autem hæc fiat hypothesis, jam facile intelligitur, stellas singulas in proprio virium centro quiescere, vel nihil fere moveri, atque ex systematum omnium conjunctione, et æquilibrio sua mundanæ machinæ constabit firmitas; luculentissimum sane divinæ intelligentiæ, et omnipotentiæ argumentum.

Instabis 3.: attractio universalis inter corpora terrestria sese conspicua præberet; globi duo in ipsa telluris superficie magno etiam dissiti intervallo ad se mutuo tenderent, atque tandem ad contactum pervenirent, non secus ac faciunt magnes, et ferrum; atqui mutuus ille accessus non observatur; ergo cet.

Resp. neg. mai. Corpora quælibet tendunt in se mutuo, sed tendunt quoque in terram. Porrò attractionem universalem ex quantitate materiæ pendere, jam observavimus; illamque attractionem ceteris paribus esse, ut quantitatem materiæ, in proximo articulo demonstrabimus. Itaque cum quantitas materiæ in terra immensè superet quantitatem materiæ in prædictis globis, patet at-

trac-

tractionem globorum versus terram esse fere infinite magnam, si conferatur cum mutua globorum attractione, quæ proinde tantilla est, ut sentiri nequaquam possit. At si tanta sit corporum massa, ut cum ipsa quantitate materiæ in terra satis magnam habeat rationem, jam sub sensus cadere poterit attractio. Magna observationum subtilitate hanc attractionem expertus est D. Bouguer unus ex doctissimis Parisiensisque Academicis, qui laboriosum æterna fama dignissimum iter aggressi sunt ad definiendam telluris figuram. Probè ingentem montem in Peruvio, qui dicitur *Chimboraco*, pendulum constituerat vir clarissimus; observavit autem, filum penduli septem minutis secundis cum dimidio à perpendiculo aberrare; ab ipso scilicet monte attractum. Quo autem artificio, et quanta diligentia usus fuerit. D. Bouguer, legere est in eximio opere de figura telluris. Quod autem spectat exemplum magnetis, et ferri, ad præsentem casum trahi non potest. Agitur enim de attractione universali, attractio autem magnetica est alterius plane generis, et ad magnetem, ferrumque dumtaxat pertinet. Hæc pauca dicta sint de attractione universali, quæ quidem ex tota hujus capitis serie magis ac magis intelligetur, sed confirmabitur maxime, dum suo loco astronomicum systema explicabimus.

AR-

ARTICULUS II.

De prima attractionis lege.

I.

AD investigandam attractionis legem virium centralium doctrinam in circulo considerabimus ; hanc facili ratiocinatione demonstravit Nevvtonus. Ponamus, corpora duo in circulorum peripheriis revolvi ; haberi possunt circuli illi tamquam polygona similia ex lateribus numero infinitis ; et infinite parvis composita : quare moveri intelligantur corpora in polygonorum suorum latere aliquo, seclusa vi centripeta , secundum hujus lateris directionem pergerent in infinitum ; dum ergo ex latere uno polygoni in aliud latus proxime contiguum transeunt , vi centripeta in polygoni angulum incurrunt. Vis autem qua polygoni angulum feriunt , est quantitas motus, nempe ictus magnitudo est , ut massa per velocitatem multiplicata , eritque vis centralis tota , ut magnitudo ictus , et numerus ictuum simul. At quo major est velocitas, et quo minor circumferentia circuli , eo major est ictuum numerus eodem tempore ; ergo numerus ictuum est , ut velocitas directe , et cir-

circumferentia inverse: quare vis centralis, quæ est, ut ictus magnitudo, et numerus ictuum conjunctim erit in ratione composita directa quantitatis motus, et velocitatis, atque inversa radii, sive quod idem est, ut productum ex massa in quadratum velocitatis divisum per radium. Plurimæ leguntur hujus principii demonstrationes, sed hanc anteponimus, quæ ex ipsa virium centralium natura facile derivatur. Jam corporum massæ dicantur M, m, circulorum circumferentiæ, C, c, velocitates V, v, tempora T, t, vires centrales F, f; circulorum radii R, r. Erit $F : f = \frac{M.\ V.}{R} : \frac{m.\ v2.}{r}$. Quia vero in circulo velocitates sunt uniformes, ac proinde ut spatia descripta, sive circumferentiæ directe, et tempora inverse, erit $V : v = \frac{C}{T} : \frac{c}{t} = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, ob circumferentias radiis proportionales: quare tandem habebitur $F : f = \frac{MR}{T2} : \frac{mr}{T2}$; jam ponantur massæ æquales, itemque tempora æqualia, erunt vires centrales, ut circulorum radii. Fingantur, vires centrales decrescere, ut crescunt quadrata distantiarum à centro,

hoc

hoc est, ponantur vires centrales in ratione duplicata inversa distantiarum; erunt F: f ut $\frac{M}{R^2} : \frac{m}{R^2}$, ac proinde in proportione præcedenti $F : f = \frac{MR}{T^2} : \frac{mr}{t^2}$, erit $\frac{M}{R^2} : \frac{m}{r^2} = \frac{MR}{T^2} : \frac{mr}{T^2}$ positisque massis M, m æqualibus, fiet $\frac{I}{R^2} : \frac{i}{R^2} = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$, ideoque $R^2 r^2 = T^2 t^2$, hoc est, cubi distantiarum sunt, ut temporum quadrata, si vires centrales fuerint, ut distantiarum quadrata inverse; et vice versa si ponantur cubi distantiarum, ut temporum quadrata; erit in precedenti analogia $F : f = \frac{R}{R^3} : \frac{r}{r^3} = \frac{I}{R^2} : \frac{i}{r^2}$. Nempe vires centrales sunt, ut quadrata distantiarum reciproce. Probe autem tenendæ sunt hæ duæ virium centralium leges, quibus tota innititur Astronomia. Prima: *si corporum in circulis revolventium vires centrales fuerint in ratione dupli-*

plicata inversa distantiarum à centro, *erunt temporum periodicorum*, *sive revolutionum quadrata*, *ut cubi distantiarum.* Secunda: *si temporum periodicorum quadrata fuerint, ut cubi distantiarum*, *erunt vires centrales in ratione duplicata inversa distantiarum.* Demonstratæ hactenus virium centralium leges virorum non Geometrarum oculis repræsentari solent ope machinæ, quæ virium centralium machina solet appellari. Hanc autem machinam utpote oculis melius quam explicatione ulla usurpandum prætermittimus.

II. Notissima est omnibus curva, quæ *ovalis* vulgo dicitur, à Geometris autem *ellypsis* frequentius appellatur. Si per duo puncta, quæ in ellypseos circumferentia à centro magis distant, ducta intelligitur recta, quæ per ellypseos centrum transeat, hæc dicitur *axis major*, ad quem si perpendiculariter erigatur recta per centrum transiens, et ad circumferentiam utrinque terminata, hæc vocabitur *axis minor*. Jam vero si ex duabus axis minoris extremitatibus hinc et inde ad partes centri oppositas ducta intelligatur recta ad axem majorem, quæ recta æqualis sit dimidio axi majori, habebuntur in axe majore puncta duo, quæ ellypseos *foci* appellantur. His præmissis definitionibus ex observationibus astronomicis

no•

notum est, planetas revolvi in ellypsibus, quarum focum unum communem Sol occupat. Quamvis autem hæc sola curva cœlestibus motibus accuratissime respondeat, quia tamen circularis planetarum orbita non multum ab astronomicis observationibus aberrat, imo nihil fere in quibusdam planetis, in re præsenti sine errore hanc hypothesim, quæ ad veritatem proxime accedit, facere licet. His explicatis sit.

CONCLUSIO.

Attractionis universalis lex est, ut corpora omnia sese attrahant in ratione directa massarum, et duplicata inversa distantiarum.

Demonstratur 1.: planetæ revolvuntur in ellipsibus circa Solem, quarum focum unum communem Sol occupat. Hæc autem curva à planetis circa Solem descripta prædictam attractionis legem omnino postulat; demonstrat scilicet Geometræ, corpus aliquod in ellypsi revolvi non posse vi tendente ad focum, nisi vis centripeta decrescat in ratione duplicata distantiarum ab eodem foco. At cum hæc demonstratio pendeat ex ipsa ellypseos natura; de qua nihil tradidimus, satius est planetarum orbitas

tas velut circulares considerare, quod quidem satis accurate fieri pose, jam observavimus. Porrò demonstrant observationes astronomicæ, temporum periodicorum quadrata in planetis esse, ut cubi distantiarum à Sole; ergo vis planetarum in Solem decrescit in ratione duplicata distantiarum à Sole. Hæc temporum periodicorum, et distantiarum ratio, quæ celeberrimo *Keplero* debetur, appellari solet: *lex secunda Kepleri.* Hanc autem legem non solum servant planetæ primarii circa Solem, sed etiam planetæ secundarii circa primarios. Mutuam planetarum perturbationem, lunaresque inæqualitates laboriosissimo, et fere insuperabili calculo in hac attractionis lege nuperrime investigarunt doctissimi viri, et calculum cum observationibus astronomicis accurate consentire, testantur diligentissimi Astronomi; imo eò pervenit, quod sperare vix fas erat, doctissimus mihique amicissimus dominus *Clairaut*, ut Cometarum reditum prædicere Astronomos docuerit; neque celeberrimi viri laborem fefellit eventus, cum anno proxime elapso 1759. paucorum dierum intervallo à calculis aberraverit reditus Cometæ, qui anno 1682. apparuerat. Quæ cum ita sint, Nevvtonianam attractionis legem demonstrant observationes astronomicæ, neque eam in dubium

vo-

vocare possunt, quia demonstrationis vim sentiunt.

II. Eamdem attractionis legem terrestribus quoque corporibus convenire ex analogia naturæ colligi potest; at rem ipso corporum terrestrium exemplo ostendamus. Quod ut fiat, in memoriam revocandum est, vim centripetam lunæ esse ejusdem generis cum gravitate terrestri; vi enim centripeta describeret luna pedes $15.\frac{1}{12}$ minuto una secundo, non secus ac faciunt corpora terrestria. Jam vero investigari poterit spatium vi eadem centripeta lunari prope terram descriptum tempore minuti unius primi, seu minutorum secundorum sexaginta; etenim compertum est experimentis, gravia terrestria hac lege descendere, ut nempe spatia descripta semper sint, ut quadrata temporum, quare per regulam trium dicatur $1'' : 15\frac{1}{12} = 60 \times 60'' : 15\frac{1}{12} \times 60 \times 60''$; in hac proportione virgulæ'' designant minuta secunda quemadmodum virgula designare solet minuta prima. Itaque spatium minuti unius primi tempore prope terram à luna descriptum erit $15\frac{1}{2} \times 60 \times 60''$;

sed spatium à luna eodem tempore descriptum in distantia à terra semidiametrorum 60 est $15\frac{1}{12}$. Quare cum vires sint, ut spatia iisdem temporibus descripta, erit vis centripeta lunæ in telluris superficie ad vim centripetam in distantia semidiametrorum terrestrium sexaginto, ut $15\frac{1}{12} \times 60 \times 60$ ad $15\frac{1}{12}$; seu ut 60×60 60×60 ad I; quare si semidiameter terrestris repræsentetur per I, erit distantia mediocris lunæ à terra ut 60, ac proinde 60×60 erit hujus distantiæ quadratum: quare cum quadratum unitatis sit I, erit vis centripeta lunæ in superficie telluris ad vim centripetam lunæ in distantia mediocri à terra, ut mediocris distantiæ quadratum ad quadratum semidiametri terrestris, hoc est, in ratione duplicata inversa distantiæ: itaque eadem lex obtines quoque in corporibus terrestribus. Porrò observandum est, attractionem considerari posse vel in corpore, quod attrahitur. Si primum, vis illa *attractionis* nomen retinet; si secundum, *gravitas* appellatur. Quia autem omnis attractio mutua est, patet, hanc esse univer-

sa-

salem gravitatis legem, ut nempe se habeat in ratione directa massæ, et duplicata inversa distantiæ.

Objic.; prædictam attractionis legem demonstrare non possunt Astronomorum calculi, atque observationes, nisi connitæ sint planetarum massæ; ita enim componi potest massarum, et distantiarum ratio, ut eadem prodeant phænomena; atqui cognita non est planetarum massa; qua etenim ratione corporum remotissimorum massæ explorari, atque, ut ita dicam, ponderari possunt? ergo cet.

Resp. neg. maj. et min. Et 1. quidem ut definiri possit lex attractionis, satis est ex observationibus astronomicis innotescere curvilineas planetarnm orbitas, illorumque tempora periodica, ut ex præcedentibus demonstrationibus patet; sed hæc duo certissimis observationibus constant, ergo ad determinandam generalem gravitatis legem necessarium non est, perspectas esse planetarum massas. 2. quamvis imperito hominum vulgo res absurda videatur planetarum massas ad calculum revocare, Geometris tamen non desunt methodi, quibus id obtinere possunt. Methodum ex præmissis principiis facile colligendam hic explicare non abs re erit. Sint planetæ duo, M, m, quos comittentur satellites ad distantias

A, a revolventes, temporibus T, t; erunt satellitum vires centripetæ $\frac{M}{A2}$, $\frac{m}{a2}$; sunt enim attractiones versus M, m in ratione directa corporis attrahentis, et duplicata inversa distantiæ. Præterea vis centrifuga æqualis est vi centripetæ, et satellitum vires centrifugæ sunt $\frac{A}{T2}$ $\frac{a}{t2}$: quare erit $\frac{M}{A2} : \frac{m}{a2} = \frac{A}{T2} \frac{a}{t2}$. Hinc data ratione A ad a, et T ad t, dabitur quoque ratio M ad m, nempe ratio massarum in duobus planetis primariis. Itaque hoc modo innotescere poterit ratio massarum in Jove, Saturno, Terra, et Sole ipso; illi enim planetæ suos habent Satellites, ne excepto quidem Sole, circa quem planetæ tamquam Satellites revolvuntur; præterea etiam datur ratio distantiarum Satellitum à planetis primariis, atque eorumdem Satellitum tempora periodica. Ex his principiis innotuit quantitas in Sole, Jove, Saturno, et Terra esse inter se, ut numeri sequentes $1 \frac{1}{1067}. \frac{1}{3021}. \frac{1}{169282}$. Verum hæc metho-

dus

dus valet dumtaxat in planetis, qui Satellites habent; hinc in Mercurio, Venere, et Marte, cum Satellitibus careant, quantum hactenus per observationes judicium ferre licet, non ita accurate innotescit massarum ratio. Hanc quidem methodum explicare placuit, tum ob rei ipsius utilitatem, tum ut vobis demonstretur superba quorumdam hominum imperitia, qui velut absurdum, ridiculumque traducunt, quod ipsi non intelligunt, à quo quidem gravissimo errore vos longe alienos volo.

Instabis 1, : lex attractionis in ratione distantiarum duplicata decrescentis contraria omnino est gravitatis terrestris legi: etenim experimentis constat, vim gravitatis in eodem terræ loco, et in diversis à tellure distantiis eamdem manere; si corpus aliquod manu sustineamus, sive in summa turri, sive in ima eamdem pressionem sentimus: crassior quidem est hæc æstimatio, at res accuratius definiri potest, si in summa turri stateræ brachiis imponantur corpora duo, quæ sint in æquilibrio, deinde corpus alterutrum è lance ipsa filo suspendamus, ac paulatim demittamus, æquilibrium manere experimur in diversis etiam à terra distantiis: quare sic argumentari licet: attractio illa non decrescit in ratione distantiarum duplicata, quæ in diversis à tellure distantiis eadem observetur; atqui cet. ergo cet.

Resp. dist. maj. si distantiarum differentia fuerit satis magna, C. maj. secus, N. maj., dist. min. N. cons. Quamvis gravitas terrestris decrescat in ratione distantiarum duplicata à centro telluris, in exiguis tamen à terra distantiis gravitatem terrestrem, velut constantem, et perpetuò eamdem considerare licet: etenim tantilla est distantiarum, in quibus experimenta sumi possunt, differentia, ut pro nulla omnino haberi debeat, si cum integra telluris semidiametro conferatur, quod exemplo patebit. Ponamus, haberi experimentum in vertice montis omnino altissimi insularum Canariarum dicti *Pico de Tenerif*, cujus altitudo sit trium milliarium. Jam vero semidiameter telluris ponatur circiter quatermille milliarium; sumptis quadratis erit gravitas in montis vertice ad gravitatem in montis radice, ut 16000000 ad 16024009, quæ quidem ratio est quam proxime ratio æqualitatis, ita ut gravitatis differentia nullo experimento sentiri possit. Ceterum de gravitate constante, illiusque directione tractabimus in capite sequente; quare hæc pauca dicta sint.

Instabis 2. ad demonstrandam gravitatis legem hac ratiocinatione utuntur plerique

Phy-

Physici. Sit A (*Fig.* 5.) punctum, à quo undique emanet qualitas quælibet secundum rectas AB, AC, AD cet. per totum spatium indefinite protensas. Jam vis hujus qualitatis decrescit in ratione duplicata distantiæ, nempe erit vis illa in D ad vim in G, ut quadratum distantiæ AG ad quadratum distantiæ AD: etenim cum (ex hypothesi) qualitas undique in orbem per lineas rectas diffundatur, evidens est, qualitatis hujus vim, seu intensitatem eo majorem esse, quo majori copia, confertiusque accumulantur ejusdem qualitatis radii; sed cum idem sit in unaquaque superficie HDB, KGE, radiorum numerus, patet radios illos eo confertiores esse, quo minor est circulorum superficies, ita ut spissitudo, sive densitas radiorum semper sit in ratione reciproca superficierum; sed circulorum superficies sunt in ratione duplicata radiorum; ergo virtus è centro propagata, quæ est, ut circulorum superficies reciproce, erit, ut quadratum distantiæ à centro inversæ. Hoc argumentum utuntur Physici fere omnes, et ad Solis, planetarumque actiones allatam demonstrationem transferunt; quod quidem quam perperam faciant, facile patet, fingunt enim attractionem efluviorum instar propagari; ergo cet.

Resp. Ad totam hujus argumenti seriem

frustra nobis objici præcedentem demonstrationem, quam non solum non adhibemus, sed contra longe rejicimus; et quidem reprehendi omnino debet talis hujus demonstrationis usus, qui tamen in plerisque Physicorum libris legitur. Præcedens demonstratio transferri quidem potest ad propagationem luminis, cujus intensitas decrescit in ratione duplicata distantiarum à puncto radiante; verum procul dubio errant Physici, qui de omnibus qualitatibus à dato puncto in sphæram diffusis eamdem legem pronuntiant. Et certe id verum non est, nisi addatur, qualitatem illam progredi motu uniformi, et nullam ejus partem sisti, vel dissipari. Si enim celeritas mutetur, radii, qui dato aliquo tempore in orbe uno concluduntur, non continebuntur in orbe altero; sed magis, vel minus, prout vel retardabitur motus, vel accelerabitur. A vero igitur aberrant, qui ad æstimandam quantitatem odoris è dato globo emissi, assumunt odoris intensitatem decrescere in ratione duplicata distantiarum. Neque enim verisimile est, motu uniformi recta progredi odoriferas particulas, quarum plurimæ circa ipsum corpus, à quo emanant, hærent ipsi aeri admixtæ; aliæ autem spirante vento inde evelluntur, et longius abeunt; sed multo minus ad definiendam

at-

attractionis legem trahi potest præcedens demonstratio : et quidem attractio considerari non potest qualitatis instar per radios diffusæ. Præterea intelligi nequaquam potest, quid ad attractionem conferre valeat illa corpusculorum emissio. Hanc objectionem afferre placuit, ut moneantur studiosi Adolescentes, philosophicis ratiocinationibus temere, et non sine examine credendum esse.

ARTICULUS III.

De altera attractionis specie.

I.

IN præcedenti articulo illam dumtaxat consideravimus attractionem, quæ inter magna corpora, et ad distantias satis magnas exercetur, at inter minimas corporum particulas in ipso contactu, et minimis intervallis vigeat potentissima attractio, cujus legem investigavimus. Sed præmittenda sunt experimenta aliqua. Inter minimas fluidorum particulas mutuam attractionem exerceri, demonstrat ipsa guttarum fluidarum tenacitas, atque rotunditas ; duæ guttæ fluidæ in minima distantia sese attrahunt, et in majorem guttam coalescunt : eamdem mutuam attractionem inter corpora dura, et fluida ostendunt etiam experimenta. Si lamella vitrea superperficiei aquæ admoveatur, ita ut ipsam aqua lambat, non sine conatu aliquo lamellam ab aqua distrahi posse sentiemus, nempe per totam lamellæ superficiem minimæ aquæ columnæ adhærescunt, quæ tandem aucta vel tantisper distantia, proprio pondere relabuntur. Neque prætermittenda sunt præclarissima de lucis inflexione, et attractione experimenta. Si in cubiculo undique clauso, et satis tenebroso per foramen exiguum admittantur solares radii, qui deindè prope corporis alicujus aciem transeant, radius aciei proximior vi maxima à corpore attrahetur, atque inflectetur, et postea reflectetur; ordine succedent radij alii, qui attrahentur minus, donec crescente paululum distantia, oculorum aciem fugiat attractio. Inter corpora dura eamdem attractionis speciem vigere demonstrant vulgatissima experimenta. Si duæ lamellæ vitreæ sibi invicem arcte approximantur, lamellas illas non sine magno conatu à se mutuo avelli posse, experiemur, atque etiam attractionem quamdam sentimus, licet subtilissimis filis separatæ sint lamellæ; sed crescente tandem filorum crassitie, attractio omnis evanescit. Probè notari debent hæc experimenta, illorumque conditiones. In omni corporum specie inter corpora quælibet hæc attractio exercetur, sed ea conditione, ut in contactu, tu, et prope contactum sit maxima, in distantiis autem etiam valde exiguis evanescat.

II. Demonstrata in articulo præcedenti attractionis lex descriptis experimentis satisfacere non potest: etenim intelligantur coni similes PAEa, PMBm, quorum vertex communis P, (*Fig.* 6.); ponantur, singulæ conorum partes attrahi versus P in ratione duplicata inversa distantiarum, fingaturque, conos illos dividi in superficies innumeras sphæricas; erit atractio superficiei Mm, ad attractionem superficiei Aa, ut superficies ipsæ directæ, et quadrata distantiarum inversæ, ex hypothesi. Sunt autem superficies, ut quadrata diametrorum, et ob triangula PMm, PAa similia diametri sunt, ut distantiæ; ergo attractiones sunt, ut quadrata distantiarum directæ, et earumdem distantiarum quadrata inversæ, nempe attractio superficiei Aa erit ad attractionem superficiei Mm, ut $\frac{PA^2}{PA^2}$ ad $\frac{PM^2}{PM^2}$ hoc est, ut $\frac{PA^2}{PA^2}$ ad $\frac{PA^2}{PA^2}$ scilicet in ratione æqualitatis: quare si attractio, quæ in distantia qualibet eadem manet, dicatur A, erit attractio coni truncati Mm Aa ad attractionem coni PMm, ut $A \times MA$ ad

A

A × PM, sive ut MA ad PM, ac proinde si fuerint PM, MA æquales, attractio in contactu P haud erit validior, quam in qualibet à contactu distantia, quod quidem manifeste repugnat recensitis experimentis.

III. Prima attractionis species, de qua in articulo præcedenti sermonem habuimus, pendet ex quantitate materiæ; at præsens attractio in minimis dumtaxat exercetur intervallis, ac proinde ad eas non extenditur ejusdem etiam corporis particulas, quæ sunt à contactu longius positæ. Itaque licet hæc attractio certam quoque distantiarum legem servare debeat, illæ tamen distantiæ non à corporum centro, sed ab ipsa superficie computandæ sunt; atque hoc alterum est discrimen inter utramque attractionis speciem: etenim dum in præcedenti capite diximus, attractionem esse in ratione duplicata inversa distantiæ, hanc distantiam ab ipsa corporum superficie æstimare non licet, nisi corporum diametri cum mutua corporum distantia comparatæ rationem valde exiguam habuerint, quod quidem in præcedenti capite ponebamus. Jam vero mutuam sphærarum attractionem considerabimus. Intelligatur corpusculum aliquod extra sphæram positum, et à singulis sphæræ particulis attractum in ratione distantiarum duplicata inversa. Fingatur, sphæ-

sphæram illam condensari, ita ut tota cœat in centrum, partes anteriores à corpusculo recedentes aliquam vis attractivæ partem amittunt, in ratione scilicet duplicata semidiametri; sed hanc mutuam attractionem lucrantur partes aliæ oppositæ, ita ut attractionis decrementum ex una parte incremento ex parte altera compensetur: quare eadem manet attractio tota, sive partes circa centrum dispergantur, sive in centro colligantur. Quia vero quælibet materiæ particula aliam quamlibet attrahit in ratione duplicata inversa distantiæ, evidens est, corpusculum in utroque casu eadem lege à sphæra attrahi, nempe in ratione duplicata inversa distantiæ à centro. Cum eadem ratiocinatio de sphæris duabus institui possit, patet, sphæras duas sese mutuo attrahere in ratione duplicata inversa distantiarum à centro, non vero ab ipsa superficie. Hanc attractionis legem ratiocinatione magis geometrica demonstrant Philosophi, qui attractionis doctrinam sublimiori modo explicant. Nobis vero, quibus difficiliora tractare non licet, rem indicasse satis sit. Jam vero utriusque attractionis constituto discrimine, sit.

CON-

CONCLUSIO.

Præter attractionis legem in ratione distantiarum duplicata decrescentem admittenda est lex altera in ratione plusquam duplicata decrescens.

Demonstratur 1. attractio illa satis non est, quæ omnibus attractionis effectibus non satisfacit; atqui cet. ergo cet. Major est evidens. Minor autem patet ex phænomenis modo recensitis, et ex aliis jamjam declarandis. Si vis attractiva decresceret in sola ratione duplicata distantiarum, paulo major foret vis illa in contactu quam in exiguis à contactu distantis, quod repugnat experimentis. Harum virium rationem ex radiorum lucis inflexione calculo æstimavit Nevvtonus, et invenit, in minimis à contactu distantiis attractionem esse ad vim gravitatis, ut 1000000000000000000 ad unitatem, quæ quidem tanta virium differentia eidem attractionis legi tribuenda non est. 2. quoniam hæc vis attractiva in contactu dumtaxat, vel prope contactum exercetur, evidens est corporis attrahentis massam ad majorem attractionem nihil conferre, sed contactus magnitudini attractio illa proportionalis est. Quia tamen minimæ particu-

læ

læ non longe à contactu, neque extra ipsos attractionis limites sunt possitæ, attractionem auget minimarum particularum densitas. Hinc si marmora duo jungantur, et oleo, vel pice, aut etiam aqua perfundatur, validius inter se cohærent, ob auctam contactus magnitudinem. Augetur cohæsio, si calefiant liquores, quibus superficies imbuuntur; hoc enim artificio poros altius penetrant liquorum particulæ, minima interstitia facilius subeunt, augetur minimarum partium densitas, ideoque et attractio. En alterum utriusque attractionis discrimen; prima enim attractio quantitati materiæ proportionalis est, non autem contactus quantitati. Itaque in minimis particulis attractio est, ut densitas particularum, et superficies simul, ceteris paribus; quia vero superficies sunt, ut quadrata diametrorum, soliditates autem ut earumdem diametrorum, cubi evidens est, minimas particulas, quæ ratione soliditatis majorem habent superficiem, fortius cohærere; contra corpuscula, quorum minor est contactus, quales sunt minimi globuli eximie perpoliti, facilius à se invicem distrahuntur; atque hinc fluiditatis rationem reddunt aliqui Physici; sed hac de re in Physices progressu sermonem habebimus.

Si quis autem à nobis requirat talem attractionis legem, quæ in minimis, magnisque distantiis possit phænomenis satisfacere, haud difficile erit demonstrare, innumeras esse posse hujus attractionis leges; quænam vero in rerum natura obtinent, nulla experimentorum subtilitate definiri potest. Legem unicam in exemplum afferre satis erit. Ponamus, legem attractionis ex duobus terminis esse compositam, quorum primus sit, ut quadratum distantiæ inverse, alter autem, ut distantiæ cubus etiam inverse. Jam distantia dicatur D, erit in hac hypothesi lex attractionis $\frac{A}{D2} + \frac{B}{D3}$ litteræ A, et B designat quantitates quaslibet finitas. Fingamus distantiam minimam seu infinitesimam, erit D2 quantitas infinitesima ordinis secundi, et D3 quantitas infinitesima ordinis tertii; quare evidens est quantitatem $\frac{B}{D3}$ esse infinitam, si conferatur $\frac{A}{D3}$ cum hac; proinde in distantiis minimis evanescit ratio duplicata inversa distantiæ. Rursus si distantia ponatur valde magna, erit D3 quantitas maxima, si conferatur cum D2. Igitur $\frac{B}{D3}$ erit quantitas mininima respectu $\frac{A}{D^2}$, ideoque distantiis maximis sola valebit ratio duplicata inversa distantiæ: quare si talem fingamus attractionis legem ex duobus terminis compositam, quorum unus exprimat rationem duplicatam inversam distantiarum, alter autem inversam triplicatam, evidens est, talem legis compositionem ita se habere, ut in contactu, minimisque distantiis sola vigeat attractio in ratione triplicata inversa, in distantiis autem paulo majoribus sola supersit attractio in ratione inversa duplicata. At diligenter observandum est propositam attractionis legem exempli loco dumtaxat habendam esse; infinitæ enim hujusmodi leges excogitari possunt. Præterea si proposita lex accurate servaretur, attractio in contactu tanta foret, ut corporum cohæsio nullo pondere frangi posset; foret enim cohæsio respectu gravitatis infinita, quod est absurdum. Igitur patet, hanc attractionis legem considerari posse tamquam exemplum, quo intelligatur, minime repugnare talem attractionis legem ex ratione duplicata inversa distantiarum compositam, et ex alio termino, ita ut in contactu, vel prope contactum secundus legis terminus habeat ad primum rationem valde mag-

magnam, non tamen infinitam; contra autem in distantiis paulo majoribus primus terminus ad secundum habeat rationem valde magnam, sed tamen finitam; verum ut jam supra observavimus, legem hanc licet reipsa existentem, et minime commentitiam nemini divinare hactenus licuit, neque umquam fortasse licebit.

Objic.: admittenda non est lex illa, quæ analogiæ naturæ repugnat; atqui cet. ergo cet. Probo minorem: universalissima naturæ lex est attractio decrescens in ratione duplicata distantiarum: repugnante ergo analogia naturæ, alia fingitur lex omnino ignota, et mere arbitraria.

Resp. Neg. min., ad cujus probationem dico, optimam quidem philosophandi regulam esse naturæ analogiam, sed ea abutendum non esse; neque enim contra hanc philosophandi regulam peccatur, si alias admittamus leges, quas phænomena omnino postulant. Præterea simplicitati, et analogiæ naturæ minime obstat prædicta lex ex duobus terminis composita; hæc enim tamquam simplicissima, et unica naturæ lex haberi debet. Sed quidquid sit, supremo rerum omnium Creatori leges quis audebit præscribere? Deus optimus maximus eas, quas et quot voluit, leges ad consequendos in creatione præstitutos fines sapientissime constituit.

tuit. Et certe vis magnetica, et electrica ad generalem attractionis legem revocari nequaquam potest. Itaque analogia naturæ perperam abuteretur, qui omnia attractionis phænomena ad unicam legem reducere tentaret. Natura quidem simplex est; sed simplicitatem hanc solus novit supremus naturæ Auctor, qui res omnes, illarumque relationes unico intuitu perspicit: naturæ simplicitatem intueri datum non est nobis mortalibus, qui facta dumtaxat seorsim consideramus, sed rerum causarumque nexum ignoramus.

Instabis 1.: demonstrant Geometræ, singulares sphærarum particulas, ipsasque etiam sphæras attrahi in ratione dup'icata inversa distantiarum. Ita telluris globus suam attractionem exercet in ratione duplicata inversa distantiæ, et singulæ globi terrestris particulæ eamdem servant attractionis legem; at si lex attractionis ex duobus componatur terminis, jam attractio particularum, et sphære totius eadem non est: ergo cet.

Resp. C. maj. N. min. Eamdem quidem legem attractionis in sphæeris, et sphærarum particulis demonstrant Geometræ, et nos quoque facili ratiocinatione ostendimus. At corporis totius, singularumque partium eamdem esse legem in solis sphæris dumtaxat invenerunt Physici; minime vero in sphæroidibus, aliisque corporibus, quæ in rerum natura occurrunt. Et quidem si ponamus, singulas materiæ particulas, quæ corpus aliquod componunt, ttrahere punctum quodlibet datum ad distantiam quamlibet; evidens est singulas corporis attrahentis particulas respectu puncti attracti diversè positas esse, ac proinde particularum vires diversam habere directionem, diversamque mensuram: quare cum attractio tota versus punctum aliquod nihil aliud sit, quam vis unica ex viribus singulis resultans, et in datam directionem unicam composita, patet, in diversis corporibus pro varia partium positione diversam quoque esse posse attractionis legem. Et re quidem ipsa hæc attractionis lex in ratione scilicet directa massæ, et duplicata inversa distantiæ in paucissimis dumtaxat corporibus obtinet, E. G. in sphæris quotcumque magnis, quod jam demonstratum est. Tandem hæc objectio ad nostræ conclusionis sensum minimè accommodata est, re quidem vera singulæ sphærarum particulæ, et sphæræ ipsæ à puncto aliquo attrahuntur in ratione duplicata inversa distantiarum; sed in hac conclusione sermo est de mutua particularum attractione inter se, et in minimis distantiis, vel in contactu.

Instabis 2.: ex præcedenti responsione

sequeretur, nulla corpora, vel saltem paucissima sese attrahere in ratione distantiarum duplicata; etenim hanc attractionis legem in solis sphæris invenerunt Geometræ; atqui id repugnat alteri conclusioni, in qua prædictam attractionis legem constituimus; ergo cet.

Resp. N. min. Hanc quidem attractionis legem in corporibus cœlestium vigere, ex observationibus astronomicis demonstrabimus. Nec minus invicte in corporibus terrestribus eamdem attractionem ostendimus. Corpora scilicet trahuntur à terra in ratione duplicata inversa distantiarum, et viceversa. Neque obstat corporum terrestrium figura; si enim corpora illa conferantur cum tota telluris massa, velut corpuscula, minimæque particulæ haberi debet, illorumque proinde negligenda est figura. Quod autem spectat terræ, corporumque cœlestium figuram, eam velut proxime sphæricam considerare licet. Quamvis ergo paucissima sint corpora, in quibus lex illa accuratissime servari possit, hanc tamen legem physicè obtinere certissimum est.

Instabis 3.: ex attractionis lege in ratione triplicata inversa distantiæ id colligeretur, corpora duo quælibet in minimis distantiis sese validissime attrahere et ad contactum tandem pervenire: præterea corpora duo contigua tenacissime cohærent, et vi infinita; atqui hæc duo experimentis repugnant; ergo cet.

Resp. N. maj Viget quidem potentissima attractio inter minimas particulas in minimis distantis. At si corpora nimia fuerint, vis attractiva in proximis dumtaxat, minimisque particulis residet. Porrò si corpora dua eadem vi moveantur; velocitates illorum sunt in ratione inversa massarum; quare si corpora duo dicantur A, B, minimæ particulæ C, D, velocitas qua corpora A tendit ad B, est ad velocitatem, qua particula C solitariæ spectata tenderet ad B, ut particula C ad corpus A. Igitur ob corporis magnitudinem fere infinitam respectu particulæ, patet, inter magna corpora hanc alteram attractionis speciem ne in minimis quidem distantiis exerceri posse; atque hinc aliqui Philosophi rationem reddunt principii chimici; *sales non agunt nisi soluti.* Tandem neque in contactu inter corpora quælibet viget attractio: etenim attractio illa est, ut contactus magnitudo directe, et ut cubus distantiarum inverse: quare si contactus magnitudo fuerit valde exigua, et fere infinite parva, jam patet, attractionem fore etiam infinite parvam, vel nullam. Neque in ullo casu attractio erit infinita; probe enim meminisse oportet, quod

jam

jam monuimus, ratione triplicatam distantiarum exempli loco dumtaxat habendam esse; admittenda est lex attractionis, quæ non solum aliquam distantiarum dignitatem contineant, sed alias quoque tali modo admixtas habeat quantitates, ut attractio in contactu sit valde magna; non autem infinita. Talis autem quantitatum permixtio appellari solet ab Algebristis *functio*. Porrò evidens est, innumeras fingi posse distantiarum functiones, quæ huic conditioni satisfaciant. Quidquid ergo hactenus diximus, non in eo sensu intelligendum est, quasi veram hujus attractionis legem determinare velimus; hoc unum nobis erat demonstrandum, præter legem attractionis in duplicata distantiarum ratione decrescentis, aliam quoque legem admittendam esse.

Instabis 4.: corpuscula aliqua in contactu, et in minimis distantiis sese repellunt, quodquidem patet corporum elasticorum exemplo, et maxime radiorum solarium reflexione; imo non desunt subtilissimi Philosophi, qui vim attractivam in omnium corporum particulis ad certos usque limites admittunt; quam vim attractivam deinde in repulsivam abire affirmant, ita ut nullus omnino sit in rerum natura physicus, immediatusque contactus. Unde sic argumentari licet; tamquam universalis naturæ lex admitti non debet attractio, si corpuscula aliqua, imo omnia secundum aliquos Philosophos vim repulsivam demonstrent; atqui cet. ergo cet.

Resp. N. maj. Vis attractiva negari non potest ab iis etiam Philosophis, qui in omnibus corporum particulis vim repulsivam admittunt. Certissimum quidem est, sese repellere minimas quorumdam corporum particulas, quidquid sit vis illa repulsiva; sed repulsio præcedentem attractionem non excludit, imo ex vi attractiva originem habere repulsionem affirmant nonnulli, quod deinde fusius explicavimus, ubi sermo erit de corporum elasticitate, et de luminis reflexione. Ceterum nos quoque vis repulsivæ nomine utemur, sed effectum dumtaxat, non vero causam aliquam significantes: etenim quæcumque sit repulsionis causa, vis hujus actionem ad calculum revocare, et æstimare licet; quoad utilitatem tota res perinde se habet. Neque repulsio quidquam obstare potest iis, quæ antea demonstravimus, attractionem nempe ceteris paribus, contactus magnitudini proportionalem esse; ibi enim sermonem habuimus de corporibus, quorum partes cohærent, non vero de corporibus elasticis, quorum partes sese fugiunt, atque repellunt. Tandem contactus hìc à nobis intelligitur, qualis in corporum cohærenrentium partibus observatur, neque de contactu physico, et immediato quidquam pronuntiare volumus. Certum quidem est, ubi de primis causis, corporumque principiis agitur, multas fieri posse hypotheses, quæ validis rationibus difficile refelluntur. Itaque hanc primam nobis esse volumus philosophandi regulam, in causarum universalium investigatione nostram fateri ignorantiam, judiciumque cohibere.

APPENDIX.

De quibusdam capitis præcedentis utilitatibus.

I.

ADversus impiissimam Veterum Atomistarum doctrinam invicti roboris argumenta ex præcedenti capite deduci possunt. Materiam æternam effutiebant Atomistæ, non tamen æternum materiæ ordinem admittebant. Stultissimè delirabant, præsentem materiæ dispositionem ex fortuito atomorum, sive corpusculorum concursu originem habuise, eamdem dispositionem casu quoque conservari, contrario tandem casu finem habituram. Hinc patet, Veteres Atomistas puros, putosque atheos fuisse; quia

quia autem etiam nunc hodie non desunt nequissimi, stultissimique homines, quos hæc absurdissima deliria recoquere non pudet, ex præcedentibus demonstrationibus hos invictè refellere officii nostri partes esse existimamus. Et 1. quidem sic ratiocinari solent.

Finitus corpusculorum numerus finitum dumtaxat combinationum numerum admittit; at per totam infinitam æternitatem extitisse debuerunt combinationes numero infinitæ: quare si in fortuita atomorum agitatione omnia se æqualitèr habuerint, ut in longa casuum fortuitorum serie contingit, evidens est, combinationem quamvis determinatam infinities redituram, ac proinde infinities, major est probabilitas, hanc præsentem combinationem redituram, quam non redituram. En absurdissimam Atomistarum argumentationem. At imprimis in eo turpiter errant, quod putant, esse aliquid revera furtuitam; nihil fortuito, et puro casu contingere demonstravimus in institutionibus metaphysicis. Sed præterea hujus ratiocinationis absurditatem facile ostendemus. Et quidem falsissimum est, infinito terminorum numero contineri numerum combinationum finitum, si de mundi constitutione sermo habeatur. Finitus quidem est combinationum numerus, si *combinationis no-*

nomine intelligatur tantum ordo quidam, quo alii termini aliis succedunt, et sese mutuo excipiunt. Ita si omnes litteræ, quæ Virgilii poema componunt, versentur temere in sacco aliquo, tum extrahantur, et ordinentur omnes litteræ, aliæ post alias, atque ejusmodi operatio repetatur infinitum, evidens est, infinities redituram combinationem Virgilianam. Verum in mundi constitutione res longe aliter se habet; etenim plenetæ circa Solem certa lege in determinatis orbitis revolvuntur; spatium, in quo planeta, aliique cœlestes globi suas periodos absolvunt, in longum, latum, et profundum quaquaversum patet. Porrò rectæ in uno plano sunt infinitæ, plana in uno spatio sunt infinita, et pro recta quavis in quovis plano infinita sunt curvarum genera, ac proinde et infinities plures sunt curvæ, quæ per datum punctorum numerum non transeunt. Præterea infinitis modis variari potest lex attractionis; pro quavis materiæ particula infinitus est dispositionum numerus: quare pro ipsis materiæ particulis haberetur numerus combinationum infinitus per ipsum particularum numerum multiplicatus. Itaque in mundi constitutione finitus non est casuum diversorum numerus, sed infinitus, et quidem ordinis altissimi. Inde ergo fit evidens, in immenso isto com-

combinationum numero infinities plures esse combinationes inordinatas, quæ exhibeant incertum chaos, corpusculorumque temere volitantium massam, quam quæ exhibeant mundum ordinatum, et certis constantem legibus. Quamobrem nisi sit aliquis, qui ex omnibus per se possibilibus combinationibus unam ex ordinatis eligat, infinities probabilius est, obventuram combinationum seriem inordinatam, minime vero eam, quam cernimus, et admiramur; atque ad vincendam hanc improbabilitatem infinitam requiritur infinita vis supremi Conditoris, qui unicam seriem ordinatam inter alias infinitas seligat, atque determinet.

Nec est, quod objiciatur, etiam hominem, qui statuam aliquam effingit, finita intelligendi vi eligere unicam formam inter infinitas possibiles. Nam Statuarius illam unicam formam non eligit, sed modo admodum confuso quamdam determinat figuram, quæ unica oritur ex naturæ legibus, et ex mundi constitutione, quam naturæ Opifex infinitus vi infinita determinavit; per hanc scilicet determinationem ab humanæ voluntatis actu oriuntur certi motus in brachiis, et ab his motus instrumentorum.

Sed nec dici potest, hunc ipsum ordinem

nem necessarium esse, et æternum, ac per se subsistere, ita ut casus quilibet sequens determinetur à præcedente, et à lege virium intrinseca, atque omnino necessaria. Et quidem quis sibi serio persuadeat, has solas virium leges, quas in precedenti capite explicavimus, fuisse possibiles et necessarias, ut nimirum corpora sese attrahant tanta potius attractione, quam alia? Nulla sane inter distantiam, et attractionis speciem ita necessaria est connexio, ut alia quævis esse non potuerit. Præterea cur hæc potuis in rerum natura existat materiæ quantitas, quam alia, nulla sane ratio esse potest, nisi arbitrium entis potentia infinita præditi; nemo sanæ mentis sibi facile persuadebit in determinata quadam materiæ massa haberi necessitatem existentiæ potius, quam in alia quavis.

Tandem licet materiæ talis fingatur natura, ut habeat necessariam, sibique essentialem vis inertiæ, et virium legem, ita ut status quilibet datus à præcedenti determinari debeat, eadem nihilominus manet contra Atomistas demonstrationis vis: etenim status ille, qui habetur tempore quolibet dato, nec à se ipso, nec à materia, nec ab ullo ente materiali tum existente suam habet determinationem ad existendum, sed determinationem illam accepit à statu præ-

ce-

cedenti. Porrò status præcedens non potest sequentem determinare, nisi quatenus ipse determinate existit: ipse autem nullam quoque in se habet determinationem ad existendum, sed illam accepit à præcedente. Quod de secundo præcedente statu diximus, dicendum de tertio, qui determinationem debet accipere à quarto, atque eodem modo progrediendo in infinitum orietur infinita series statuum, in quorum singulis habemus merum nihil, relate scilicet ad determinatam existentiam postremi status, summa autem nihilorum utcumque numero infinitorum est nihil; jam diu enim constitit, merum esse paralogismum, infinitorum nihilorum summam finitæ alicui quantitati æqualem esse.

Ex his ergo id evidenter colligitur, ens serici ipsi extrinsecum, quod hanc seriem elegit præ seriebus aliis infinitis, infinitam habere determinationem, et vim electivam, quæ unam illam ex infinitis eligat. Cognitionem habere debuit, et sapientiam, ut hanc seriem ordinatam præ inordinatis adhibuerit. Si enim sine cognitione, et electione egisset, infinities probabilius foret, ab illo determinatam fuisse aliquam seriem inordinatam, quam unam ex ordinatis; nimirum ratio inordinatarum ad ordinatas sit infinita. Igitur ex ipsis quoque Atomistatarum principiis manifestum fit, infinitam esse probabilitatem pro cognitione, sapientia, ac libera electione, quæ quidem probabilitas infinita omnimodam certitudinem inducit, ac proinde Atomistas propriis armis impugnavimus. Hæc autem, quæ brevius demonstrata sunt, jungi debent iis, quæ in Metaphysica de fato, et necessitate fusè tractavimus.

II. Ex mirabili minimarum partium structura, magnitudine, vi attractiva magis, ac magis elucescunt divina bonitas, illiusque sapientia infinita. Pauca exempla hic considerare, et admirari satis erit. Calore Solis rarefiunt aquæ particulæ, è mari ad superiorem aeris regionem sub forma vaporum evehuntur, nec umquam consistunt vapores, donec ad aerem ejusdem gravitatis perveniant, tumque subsidunt, nubesque componunt, et mille figura induunt. Mox eædem particulæ frigoris vi, aliisve causis condensantur, et in minus spatium coactæ formam priorem amittunt, et in terram pluviæ, nivis, grandinis instar relabuntur. Maxima pluviæ pars per fluvios ad mare deducitur, iterum in vapores abitura: pars vero aliqua terræ se immiscet, et ibi deposita arborum, herbarumque radices, et semina ingreditur, è quibus in alias corporum species assurgit. Di-

Diversa corpora componit eadem pluvialis aqua, prout diversa ingreditur rerum semina, quædam scilicet transit in plantas, quædam in gramina, aliqua in flores, aliqua in quercus, ornos, fagos, et alias quamplurimas arborum, et plantarum species. Ecquis ergo non admirabitur divinam providentiam, quæ sapientia, et bonitate infinita ad hominum commoda minimarum particularum structura composuit, atque ordinavit? Sed idem exemplum rursus persequamur. Nec in eadem planta eadem omnino manet pluvia, plantæ omnes ex innumeris heterogeneis constant partibus, sic in lino E. G. alia est forma radicis, alia caulis, alia tenuium fibrarum, alia florum. Rursus consideremus ipsam vel unius caulis utilitatem, miramque varietatem; caulis membranam separant lini Artifices, et postquam mille tractaverunt modis, fibras in oblonga contorquent fila, quæ deinde in se convuluta glommorum species referunt; fila hæc varie inter se connectunt, et texunt linteones, et arte sua telas ex illis componunt, quæ vestimenta hominibus præbent. Hæc denique annis obsita in linteola redacta aquæ immittuntur, malleis ligneis in mollem quasi pulpam subiguntur, quæ tandem exsiccato humore aqueo in papirum transmutatur, quæ si igni immittatur, partim

tim in tenuissimum pulverem, partim in fumum evanescit. En quantam ex mutato partium situ, ex mutata illorum vi attractiva rerum et effectuum varietatem!

Sed universæ naturæ pro varia cœli temperie mutationem, variamque dispositionem breviter percurramus. Cum terræ partes singulæ situm suum respectu Solis continuo mutent, ejusdemque radios nunc magis, nunc minus obliquos, nunc breviore, nunc diuturniore tempore excipiant, universa fere rerum natura novam faciem per vices induit. Autumno exarescunt segetes, et fructus maturescunt, viridem, amænamque faciem paulatim deponunt campi, et decidunt arboribus folia, et mox ingruente hyeme frigent, et horrent omnia, nix tegit alta montes, cujus onere depressæ laborant sylvæ, ipsæ maris aquæ stabiles, et firmæ redduntur, quodque prius fuit navibus tantum penetrabile, nunc exercitus, et castra gerit. Iterum mutato telluris, Solisque respectu diffugiunt nives, redeunt gramina campis, et sua arboribus folia, *nec stabulis jam gaudet equus, nec arator igne*; sed nova prorsus, et læta apparet rerum facies, et annus per æstatem ad autumnum revertitur.

Quamvis ex sola minimarum particularum mutatione, figura, magnitudine, vi attractiva oriri certissimum sit infinitam effectuum varietatem, pro ea tamen, quam nobis præscripsimus, philosophica timiditate, atque ingenuitate, asserere non audemus, materiam omnem ita homogeneam esse, ut ex diverso dumtaxat minimarum partium situ repetenda sit specifica corporum differentia. Hanc quæstionem deinde revocabimus, variasque Philosophorum opiniones expendemus, ubi sermo erit de corporum natura; interim ingenuè fatendum est, nobis innotescere dumtaxat corporum superficiem, ipsumque, ut ita dicam, corticem, intimam vero texturam, atque naturam nos omnino latere; in hac autem nostra ignorantia iterum elucet divina bonitas, quæ humanam superbiam reprimere voluit, eas tantum permittens cognitiones, quæ ad vitæ necessitates, et utilitates conducere possunt.

III. Longius esset referre utilissima experimenta, quæ in præsenti argumento sumpserunt celeberrimi Physici, unum afferre satis erit, quod in publicam utilitatem maxime redundare potest. Accuratissimis experimentis compertum est, eam esse salis marini, et salis tartari saluberrimam indolem, ut sulphureos vapores, aliosque perniciosisimos halitus plurimos potentissime attrahant, atque absorbeant, cujus quidem virtutis in periculosis occasionibus nonnullis utilitas maxima esse potest. Artifices aliqui, ut plumbarii fussores, noxias tractant materias, è quibus perniciosissima erumpunt corpuscula. Si autem hanc adhibeant diligentiam, ut pannum salina aliqua solutione madidum ori, naribusque admoveant, vaporum periculum declinare poterunt. Eadem de causa factum est, ut adversus pestiferos halitus tamquam optimum antidotum credi soleat acutum album. Hac salium proprietate admodum salutari ad minuendum saltem præsens periculum; uti possent qui in fodinis, alisque infectis locis non sine vitæ discrimine labori manum dare coguntur. Sed de hac re legenda sunt, quæ refert Clarissimus Dominus Hales in eximio opere, cui titulus est: *Statica vegetabilium*. Hæc pauca dicta sint ad demonstrandam præcedentis capitis utilitatem. Minimarum particularum vim attractivam ad explicanda artis chimicæ phænomena transferunt magni quidem viri, verum quamvis hæc doctrina nonnullis experimentis feliciter satisfacere videatur, eo tamen abutuntur Physici, qui singulas chimicas per attractionis, vel repulsionis nomen clarè explicase confidunt: illi autem merum effectum, nullam vero effectus causam proferunt.

CAPUT III.

De gravitate constanti.

QUamvis in præcedenti capite demonstrata fuerit gravitatis cœlestis, atque terrestris lex communis, quæ nempe decrescat in ratione duplicata distantiarum à centro; observavimus tamen, ita exiguas esse distantias, in quibus experimenta habere licet, si conferantur cum integra telluris semidiametro, ut nulla in gravitate terrestri variatio experimentis, vel observationibus conspicua esse possit. Præterea corpora omnia, quæcumque sit illorum natura, figura, magnitudo, sublata aeris resistentia, ut fit in vacuo boyliano, æqualis temporibus æqualiter descendunt, ac proinde vis gravitatis æqualibus temporibus æqualiter agit. Itaque gravitatem terrestrem licet reipsa variabilem, tamquam constantem, et uniformem usurpant Physici, nosque hanc gravitatem in præsenti capite considerabimus. Tria autem potissimum expendemus, 1. præcipuas gravitatis affectiones explicabimus, 2. gravitatis causam investigabimus, 3. tandem centri gravitatis doctrinam exponemus.

ARTICULUS I.

De gravitatis terrestris affectionibus præcipuis.

I.

G*Ravitatis* nomine hìc generatim intelligitur vis illa, qua corpora ad terram tendunt. Porrò confundi non debet gravitas cum ipsa corporum *pondere*; gravitas enim est vis, quæ singulas materiæ particulas deorsum urget; pondus autem est ipsa gravitatis quantitas in unoquoque corpore, seu est ipsa gravitatum summa, vel aggregatum. Pondera quantitatibus materiæ proportionalia esse, ex ipsa gravitatis natura facile colligitur: etenim cum vis gravitatis sit constans, et in singulas æquales materiæ particulas æqualibus temporibus æqualiter agat, seu æquales ictus imprimat, erit numerus ictuum, ut particularum æqualium numerus. Præterea cum corpora omnia per lineas ad sensum parallelas recta descendere observentur, patet, gravitatis directiones esse parallela, ideoque gravitatis ictus in eamdem directionem conspirant: igitur gravitas tota erit, ut numerus ictuum, hoc est, ut quantitas materiæ, nam quo plures sunt æquales materiæ particulæ, eo plures erunt ictus: quare pondera sunt quantitatibus materiæ proportionalia; evidens autem est; hanc demonstrationem valere in quolibet corporum genere, quæcumque sit illorum figura, textura, natura, cum gravitas ex his corporum conditionibus nequaquam pendeat.

Ex his autem facile intelligitur experimentum, quod vix in animum sibi inducere possunt viri rerum physicarum imperiti, et sensuum præjudiciis assueti. In longioris tubi parte superiori suspenduntur duo pondera, utcumque inæqualia, E. G. gravissimum aurum, et levissima pluma: facto deinde, ut moris est, vacuo ope machinæ pneumaticæ, corpora illa eodem temporis puncto admissa, eodem omnino tempore descendunt, et æqualibus temporibus æqualia spatia percurrunt. Experimenti ratio statim patet, et quidem corpora duo divisa intelligantur in particulas æquales innumeras; vis gravitatis in particulas illas æquales æqualibus temporibus æqualiter agit, ac proinde singulæ particulæ æqualibus temporibus æqualiter descendunt. Id vero declaratur exemplo hominum eadem velocitate currentium, sive enim conjunctis, sive sejunctis manibus currant, eodem tempore ad ad propositum scopum perveniunt. Pari rationi, sive corporum particulæ seorsim descendant, sive majus minusve corpus, atque aggregatum componant, eodem plane tempore debent descendere. Quod ergo corpora inæquali velocitate per aerem descendant; id tribuendum est aeris resistentiæ; sed hujus inæqualitatis causam deinde fusius explicabimus, ubi de medii resistentia sermo erit.

II. Gravitatem hactenus consideravimus in eodem terræ loco; verum quamvis gravitas in eadem regione sit constans, vi tamen centrifuga in remotioribus terræ locis eam plurimum immutari, certissimum est, quod qua ratione detectum fuerit, atque confirmatum, enarrabimus. Superioris sæculi anno 72 Cayennam insulam Æquatori proximam profectus est Dominus Richerus ad Astronomicas observationes ineundas à Regia Parisiensi Academia missus; secum detulerat horologium, quod Parisiis cum cœlestibus motibus accuratè conspirabat. Eo adhibito deprehendit multo lentiorem ejus motum, ita us singulis diebus per bina minuta cum dimidio ab integræ diei mensura deficeret. Rem miratus, quam nec ab aliqua machinæ mutatione, nec ab alia ejusmodi causa videbat oriri posse, illud conjecti, vim minorem esse ver-

versus Æquatorem, quam Parisiis, unde fieret, ut pendulum lentius vibrationes suas perficeret, et horologium ipsum retardaret. Ut autem certius constare posset, an res ita se haberet, accuratissimè inquisivit in longitudinem penduli, quot singulis minutis secundis horariis singulas oscillationes absolveret, et ejus longitudinem aeri incidit, ut eadem observatione in Galliam regressus iterata, utramque mensuram conferre posset. Constat enim, pari gravitatis vi longiora pendula lentius oscillationes suas peragere, breviora citius; pari longitudine penduli, et diversa vi gravitatis ea pendula lentius moveri, quæ minori aguntur vi; si autem bina pendula eodem tempore oscillationes suas peragant, quæ idcirco *isochrona* appellantur, inæqualem vero habeant longitudinem; illud quod longius est, gravitate majori urgetur. Hæc quidem omnia pendent ex pedulorum doctrina, quam deinde explicabimus; interim vero evidens est, vim illam majorem esse, qua fit, ut pendulum eodem tempore per majores arcus excurrat. Nec Richeri spem fefellit eventus; regressus enim Parisios, ita breviorem penduli isochroni mensuram invenit, ut is quidem de inæqualitate gravitatis in diversis terræ locis dubitare omnino non posset.

Rei

Rei novitas universam perculit litterariam Rempublicam, atque commovit mirum in modum, multis sub initium renuentibus, aliis observationum vitio phænomenon tribuentibus, aliis vi caloris durissima quæque metalla dilatantis. Nec defuerunt, qui observationibus per Europam institutis, gravitatem ubique æqualem se invenisse, affirmarent, cum nimirum iis methodis, quæ tum in usu erant, minus perfectæ, et perpolitæ, exiguum discrimen in tam exiguis locorum intervallis nequaquam deprehendere potuerint. Hinc observationes multo accuratiores in plurimis, et admodum dissitis terræ locis fuerunt institutæ; hinc Academici Parisienses Regis jussu, et liberalitate versus Polum Borealem, et versus Æquatorem expeditionem litterariam susceperunt, atque tandem summo observationum consensu certo definitum habemus, gravitatis vim ab Æquatore ad Polos augeri perpetuo. Nos quoque hic Romæ in hortis Regiis SS. Trinitatis Cœnobii longitudinem penduli ad minuta secunda oscillantis investigavimus. Neque in hac observatione ullam passi sumus desiderari diligentiam; observatio per plures dies instituta est in loco nullis curruum tremoribus agitato; adhibuimus pendula duo, quorum unum à celeberrimo artifice Londinennensì *Grahamo* elaboratum est. Utebamur etiam mensura pipedali londinensi accuratissima, factaque observationum comparatione, res eadem propriis experimentis innotuit. Verum quod spectat hujus variationis legem, ad præsentem locum non pertinet, tota res cum figura telluris, aliisque difficilioribus nondum explicatis Physicæ principis conjuncta est. Eo loci ponimus vim gravitatis constantem, et per rectas parallelas tendentem; quod quidem facere licet, cum in hoc capite gravitatem consideremus in eodem terræ loco, vel in locis à se non multum dissitis. Sed hæc doctrina, quam minus accuratè nunc considerare satis est, majori deinde subtilitate, et diligentia explicari debet, ubi de pendulis, et telluris figura tractabimus.

III. Neque tamen hìc omnino prætermittendum est, quod de hujus variationis causa afferri solet. Vi imaginandi nobis affingamus globum aliquem, qui circa suum axem convertatur. Partes illæ, quæ proximæ sunt polis, per quos axis ipse traducitur, eodem tempore peragunt gyros admodum exiguos, qui quidem eo magis crescunt, quo magis à polis receditur, ita ut omnium maximus is sit, qui ab utroque polo æque distat, et in eo globi motu *Æquator* appellatur. Hinc ibi vis centrifu-

ga

ga omnium maxima esse debet, atque eo gradatim decrescit magis, quo magis acceditur ad polos; quod quidem demonstratum est ubi sermonem habuimus de vi centrifuga. Rem igitur ad tellurem transtulerunt, posito ejus diurno motu consideraverunt vim centrifugam sub Æquatore maximam esse debere, prope Polos minimam, in Polis nullam. Illud præterea notarunt, vim centrifugam sub Æquatore dirigi ad partes centro telluris oppositas, quod ipsius Æquatoris est centrum; in reliquis autem locis dirigi ad partes oppositas illi axis puncto, quod est circuli descripti centrum, quod quidem centrum eo remotius est à centro terræ, quo magis circulus ille ab Æquatore recedit, ac proinde cum vis gravitatis ubique dirigatur versus terræ medium, observarunt ipsam vim centrifugam sub Æquatore magis etiam directe gravitati opponi, quam versus Polos. Ex dictis patet, duplicem considerari posse gravitatem, unam scilicet, quam *primitivam* vocant, nulla vi centrifuga turbatam, hæcque gravitas sub Polis dumtaxat habetur; altera autem est gravitas *variabilis*, vel *actualis* pro varia scilicet à Polis distantia. Neque huic gravitatis variationi obstat, quod nullam in corporum pondere inæqualitatem deprehendere liceat; ejusdem corporis idem pondus

tum

tum hìc Romæ, tum in America per bilances experimur: etenim pondus examinandum comparamus cum alio pondere, quod in Americam translatum æque mutatur, ita ut eadem maneat ponderum relatio, ac proinde corpus, quod hìc inventum est libræ unius, debet et in America unius libræ pondus demonstrare. Re quidem vera si possemus perfecte nosse vim, quam nos hìc in sustinendo pondere exercemus, et ejusdem vis meminisse, ubi pondus in remotam regionem transfertur, liceret ex ea vi æstimare auctam, vel imminutam gravitatis vim. At nostri conatus nobis omnino ignoti sunt, vix crassiorem quamdam comparatione sensationum ope instituimus, subtiliora discrimina nequaquam percipimus, atque etiam ipsæ vires nostræ mutantur in horas.

IV. Gravia esse corpora omnia, jam apud cultiores Philosophos compertum est. Et quidem pondus demonstrant corpora omnia, in quibus experimenta sumere licet; ne his quidem demptis corporibus, quæ à vulgo imperito levissima creduntur. Ita fumus, qui in aere sursum ascendit, facto vacuo Boyliano, deorsum relabitur, proprio scilicet pondere. Quod ergo fumus per aerem sursum evehatur, id tribuendum est majori aeris gravitati, qua fit, ut aer

ma-

majori conatu tendat deorsum, ac proinde fumum propellat sursum. Itaque nulla est vera corporum levitas, sed *relativa* dumtaxat, et *apparens*: quare distinguenda est gravitas in *absolutam*, et *relativam* Gravitas absoluta est tota vis illa, qua corpora tendunt deorsum. Gravitas autem specifica est ratio gravitatis absolutæ corporis unius ad gravitatem absolutam corporis alterius sub eodem volumine, sive quod idem est, gravitas specifica est ratio ponderis corporis unius ad pondus corporis alterius eodem manente volumine. *Volumen*, vel etiam *moles* dicitur totum spatium extima corporis superficie comprehensum, sive includat spatiola vacua, sive heterogeneas etiam particulas. Ex idea massæ, et voluminis oritur idea *densitatis*. Densitas eo major dicitur, quo major est corporis massa, seu quantitas materiæ sub eodem volumine; si vero eadem maneat quantitas materiæ, mutetur autem volumen, quo minus est volumen, eo major dicitur densitas; ac porinde densitas est, ut massa directe, et volumen inverse: quare si massa dicatur M, volumen V, densitas D; erit

$$D = \frac{M}{V}, \text{ ac proinde etiam } M = DV.$$

Quia vero gravitas specifica est ratio quanti-

ta-

tatis materiæ, seu ponderis ad volumen, eodem manente volumine, evidens est, gravitates specificas esse, ut densitates. Contraria ratione eo rarius dici solet corpus, quo minorem sub eodem volumine continet materiæ quantitatem, ac proinde raritas est in ratione inversa densitatis. Igitur ad corporum raritatem facile transferuntur præcedentes formulæ. Jam vero quamvis ob minorem specificam gravitatem nullum pondus aliquandò ostendere videantur corpora; probe tamen meminisse oportet levitatem illam relativam esse dumtaxat; sed hæc omnia in meliori lumine collocabimus, ubi fluidorum doctrinam exponemus. Ceterum quamvis dicamus, corporum gravitatem experimentis compertam esse, id tamen dictum nolumus de subtilissimis quibusdam corporibus, igne, E. G., et flamma; horum enim corporum tantillum est pondus, ut nulla experimentorum subtilitate innotescere potuerit, quidquid affirment Philosophi quidam suis experimentis plus æquo confisi. Sed totam rem deinde ad examen revocabimus, ubi ignis proprietates considerabimus.

ARTICULUS II.

De causa gravitatis.

I.

MIrantur imperiti homines, à Ppilosophia tanto studio quæsitum esse, cur gravia descendat, hancque statim in promptu rationem adesse, respondent, quod nempe non sustineantur. Verum quod ita facile, et obvium creditur, ut imperitorum hominum mos est, summos viros in varias traxit sententias, et adhuc sub judice lis est. De gravitatis causa quatuor circumferuntur Philosophorum opiniones. Peripatetici existimant, gravitatem esse vim quamdam, vel qualitatem realem corporibus omnibus intrinsecam à Deo ipsis impressam, ita ut quemadmodum corpora per extensionem locum occupant, per impenetrabilitatem sese mutuo ab eodem loco excludunt, sic quoque per gravitatem ad locum infimum, sive telluris centrum ferantur. Nevvtoniani, gravitatem omnibus omnino corporibus inditam, ac impressam esse, constituunt, ita ut non modo ignis, et aer, quos Peripatetici leves existimant, sed ipsa quoque tenuissima ætheris substantia, quæ gravitatis ex-

pers

pers à Cartesianis effingitur, gravitatem aliquam habere debeat, ac nulla proinde levitas positiva in rerum natura reperiatur. Atque ista quidem evidenter adeo, nitideque experimentis demonstrantur, ut dubitari non possit, gravitatem hanc, vel, ut vocant Nevvtoniani, vim centripetam corporibus omnibus inesse. At undenam centripeta vis illa singulis corporibus imprimatur, id nobis hactenus occultum, atque inexploratum esse, Nevvtonus ingenue fatetur, variasque causas enumerat ex quibus eadem vis centripeta velut origine pendere possit. At Nevvtonus non *physice* gravitatis originem scrutatur, sed *mathematice* tantum gravitatis effectus, leges, atque phænomena exponere aggreditur. Itaque à definienda gravitatis origine prudentèr abstinuit, et quamvis illam ab attractione oriri dixerit; in variis tamen locis profitetur, si physice res exploretur, ab impulsione originem habere posse. At eximiam sapientissimi viri modestiam haud semper æmulatî sunt, qui Nevvtoni doctrinam exponunt, etenim attractionem ipsam velu physicam; exploratamque gravitatis causam ita ingerunt, ut eam in dubium vocari minime patiantur. Neque tamen putandum est, Philosophos illos occultas Peripateticorum qualitates obturdere voluisse. Peripatetici at-

attractionem considerabant, velut *entitatem*, aut *qualitatem* certis quibusdam corporibus inhærentem, quas quidem qualitates ex specificis corporum formis oriri ajebant; formæ autem nomine in veteri Philosophia nihil obscurius esse potest. Porrò nullam talem *entitatulam*, aut *qualitatem* fingunt Recentiores Nevvtoniani, sed attractionem admittunt, velut universalem naturæ legem à Supremo rerum omnium Auctore constitutam, vel etiam ut corporum omnium proprietatem habent: quæ quidem opinio à Scholasticorum qualitatibus longe differt. Gassendus existimat particulas, atomos, sive corpuscula plurima quaquaversum velut radios è terræ gremio diffundi, quæ corpuscula, cum fere uncinata, et hamata intelligi possint, ubi in corpus aliquod incurrunt, illi maxime adhærent; hinc fit, ut terrestres particulæ cum corporibus ejusdem particulis arctissime devinciantur, illudque secum in terram abripiant eo prorsus modo, quo tenuissimæ quædam particulæ ex magnetis substantia prodeuntes, ubi ad ferrum pervenerint, illisque fuerint implicitæ, ferrum ipsum ad magnetem referunt. Vix refelli merentur hac in re Peripateticorum, et Gassendistarum figmenta. Quid sint qualitates occultæ, neque explicant illarum defensores, neque ipsi videntur intelligere;

recentiores philosophiæ lumine jam dissipatæ sunt illæ qualitatum occultarum tenebræ. Neque firmiori fundamento innituntur uncinata, atque occulta Gassendistarum corpuscula; nihil enim admitti jubet cultior Physica, nisi quod experimenta, atque observationes certo existere demonstrant. Deinde quam causam assignare poterunt Gassendistæ, cur uncinata illa corpuscula è tellure exeant, ad diversas altitudines rapiantur, et tandem relabantur? Talia certe commenta difficultatem non explicant, imo non parum augent. Quid sentiendum sit de Nevvtonianorum sententia, ex hujus articuli progressu manifestum fiet.

Ultima tandem superest Cartesianorum hypothesis magno doctrinæ apparatu munita. Materiam quamdam subtilissimam comminiscuntur Cartesiani, hanc ponunt circa terram vorticis motu agitari, ipsamque terram circa axem revolvi: quo fit, ut eadem materia vim centrifugam acquirat, et corpora terrestria versus terram propellat, nempe secundum directionem vis centrifugæ directioni contrariam. Id autem illustrant exemplo fluidorum, quæ corpora sibi demersa si minorem habeant gravitatem specificam, sursum evehunt; ita etiam vorticis materia corpora, quæ non tanta pollent vi centrifuga, deorsum trudere debet.

bet. His explicatis sit.

CONCLUSIO.

A vortice Cartesiano repeti non potest gravitatis causa, neque ab ullo impellente fluido, quod easdem cum fluidis cognitis proprietates habeat.

Probatur prima pars. 1. ex hac hypothesi sequeretur, vim centrifugam vorticis ipsa vi centrifuga corporis multo majorem esse, vel materiam subtilem ipso corpore esse multo densiorem: etenim gravitas corporis fluido Cartesiano immersi æqualis foret virium centrifugarum, vorticis scilicet, et corporis differentiæ per suas respective massas multiplicatæ: si nempe gravitas corporis immersi dicatur G, vis centrifuga materiæ subtilis, cujus locum occupat, dicatur V, massa M, vis centrifuga corporis U, massa m, erit $G = V \times M - U \times m$. Evidens enim est, virium illarum differentia corpus pellendum esse, ac proinde $V \times M$ major esse debet $U \times m$, ideoque vel V major est, quam U, vel M major, quam m; sed utramque repugnat. Primum quidem; etenim vis centrifuga corporis ex rotationis velocitate circa terram: oritur hæc autem velocites telluris velocitati proxime æqualis est. Itaque in primo casu multo majorem fore oportet vorticis velocitatem ipsa velocitate telluris; hinc secundum rotationis terrestris directionem, ab occidente scilicet ad orientem, perpetuus, isque vehementissimus sentiretur ventus. Neque minus repugnat casus alter, majorem scilicet esse vorticis, quam materiæ terrestris densitatem; hujus enim densissimæ materiæ resistentiam aliquam experiremur, tum sursum deorsum, tum deorsum sursum. At experimentis compertum est, totam, quam experimur resistentiam, aeri tribuendam esse, eamque nullam esse in vacuo boyliano, in quo corpora omnia æquali velocitate descendunt. Absurdissimum ergo est fingere tantam in materia vorticis densitatem, quod quidem ultro largiuntur Cartesiani: quare in primo casu paulo diutius immorabimur, variisque considerabimus velocitatis hypotheses.

Ponamus, vorticis circumterrestris velocitatem eamdem esse quam proxime cum velocitate telluris; jam ob datam diurnam telluris rotationem 24. horarum spatio dabitur quoque ipsa vorticis velocitas. Præterea ex observationibus geographicis nota est semidiameter terrestris, ac proinde et ipsa maximi terrestris, circuli peripheria,

da-

datur ergo vorticis circumferentia. His autem datis, meminisse oportet, vim centrifugam corporis in circulo revolventis tempore minuti unius secundi esse, ut quadratum arcus eodem tempore descripti per diametrum divisi. Ille autem arcus facile invenitur per notissimam regulam trium, si dicatur: tempus totum viginti quatuor horarum est ad integram vorticis, sive maximi terrestris circuli circumferentiam, ut tempus minuti unius secundi ad arcum eodem tempore percursum; hujus arcus quadratum dividatur per vorticis, sive telluris diametrum, habebitur vis centrifuga, illa scilicet lineola perpendicularis, quæ continetur inter tangentem, et arcum minuti unius secundi tempore descriptum; tali scilicet vi centrifuga corpus aliquod per lineolam prædictam minuti unius secundi tempore descenderet. Si ex his principiis calculus ineatur, invenietur spatium tempore minuti unius, secundi à corpore vi centrifuga vorticis agitato percurrendum non excedere pedem dimidium; igitur gravia vi centrifuga vorticis Cartesiani prope terram tempore minuti unius secundi non ultra dimidium pedem descenderent; at hoc ipso tempore pedes quindecim percurrunt, ut notum est experimentis: ergo gravitatis phænomenis non satisfaceret Cartesiana hypothesis.

Ut hujus demonstrationis vim effugiant Cartesiani, fingunt, vorticis celeritatem telluris vertigine esse multo majorem. Et re quidem ipsa velocitatis decies septies majoris, hypothesi facta, inito que, ut jam expossuimus, calculo, prodit lineola, quæ vim centrifugam exhibet pedum quindecim, ut postulant gravitatis phænomena. Verum explicandis deinde motuum legibus repugnat hæc major velocitas, vortex enim velocior in ipsam terram tranferret aliquam velocitatis suæ partem, donec tellus, et vortex communi velocitate moverentur: hanc tamen concedamus hypothesim, et quid ex ea sequatur, expendamus. Quicumque animo paululum attento rem perpenderint, facile assentietur, effici non posse, ut materia subtilis, ipsaque tellus tanta ferantur velocitatum differentia, nisi prominentia quæque corpora in telluris superficie, veluti arbores, ædes, turres abripiantur, atque subvertantur. Quis quæso hominum erectus stare super terra vel ad punctum temporis posset, capite decies septies velocius pedibus versus orientalem plagam translato?

Præterea experientia quotidiana compertum est, gravia in sublime jacta deorsum recta tendere, idemque soli terreni punctum, cui ad perpendiculum projecta respondent,

dent, relapsa attingere; at in prædicta hypothesi longe aliter se haberent experimenta. Corpus omne, quo altius in atmosphæra translatum foret, eo longius in ortum recideret, et à perpendiculo longissime aberraret. At nulla in quolibet corporum terrestrium statu deprehenditur experimentorum differentia, omnia perinde se habent, ac si terra, quam inhabitamus, plane quiesceret. Nec aliquis dicat, subtilissimum ætherem, dum ab occasu in ortum gyrat, corporum crassiorum poros rotationi suæ obvios pervadere, sicque pervadere, sicque perpendiculari eorum casui non obsistere. Quonam enim modo corpora versus communis vorticis centrum materia illa depelleret? Cur eorumdem gravium poros secundum vis centrifugæ directionem patefactos nihil eidem materiæ intercludat? His demonstratis, jam concludere licet: rejici omnino debet hypothesis illa, quæ certissimis repugnat gravitatis phænomenis; atqui cet. ergo cet.

II. In hypothesi Cartesiana per circulos Æquatori parallelos defertur vorticis materia, ac proinde vires centrifugas secundum lineas in horum circulorum planis semper jacentes agere oportet; descenderent ergo corpora omnia in eorumdem circulorum planis, et perpendiculariter ad axem, non ad ipsam telluris superficiem tenderent; quod quidem falsum esse demonstrant experimenta: in circulis enim Æquatori parallelis per lineas obliquas gravia descenderent, quod est contra experientiam. Hanc demonstrationem experimento ita repræsentare solent Physici. Sphæra vitrea aquam ex parte continet, aquæ innatant corpuscula plurima; machina hoc modo comparata circa axem velocissimè convertitur; id vero observare licebit, corpuscula non centrum petere, sed disponi secundum axis longitudinem. Experimentum illud Cartesianam hypothesim satis apte repræsentare videtur, Sphæra circumacta ipsam telluris vertiginem exhibet: corpuscula autem aquæ immersa vices gerunt corporum terrestrium, quæ vorticis materiæ innatant in prædicta hypothesi; idem proinde facere deberent corpora terrestria, quod in corpusculis illis observamus, nempe ad axem telluris tenderent. Itaque tum ratiocinatione, tum experientia facile refellitur Cartesiana vorticum hypothesis.

Probatur secunda pars: si gravia subtilis materiæ vi deorsum quovis modo pellantur, vis, qua descendunt corpora, erit, ut numerus particularum fluidarum, quibus simul agentibus versus terram trudantur; sed numerus particularum est, ut cor-

po-

poris superficies, quod est evidens; quare vis, qua corpus deorsum premitur, erit, ut ejusdem superficies, non ut ipsa quantitas materiæ, quod quidem experientiæ repugnare jam antea demonstrabimus. Et quidem in hac hypothesi corpora quælibet sub eodem volumine eamdem haberent gravitatem specificam ob æqualem fluidi actionem: ita æquale pondus haberent pes cubicus auri, et pes cubicu suberis. Præterea ob eamdem rationem, seclusa aeris resistentia, descendentium corporum velocitas sub eodem volumine foret in ratione reciproca massarum; si enim eadem vis maneat, velocitates se habent in ratione inversa quantitatum materiæ, ut jam demonstratum est; at corpora omnia æquali velocitate in vacuo boyliano descendunt, ac proinde gravitas agit in ratione massæ, non autem voluminis. Hæc demonstratio quamlibet fluidi prementis hypothesim evertit, nisi reponant Cartesiani, quod quidem faciunt recentiores huius hypotheseos reformatores, fluidum, quod gravitatis causa est, à nostris fluidis longe diversissimum esse, alias proprietates habere, et secundum alias plane leges agere. Sed ita philosophari nugari omnino est: tali enim philosophandi modo jam ineptissima quæque hypotheseon commenta in Philosophiam invevehere licet, et de universa Physica actum est. In hac conclusione de gravitate terrestri dumtaxat sermonem habemus; quæ enim ad gravitatem cœlestem pertinent, explicato systemate planetario convenientius tractabuntur. Proprio etiam loco disseremus de causa attractionis, quæ inter minimas viget corporum particulas, ubi phænomena ad hanc aliam attractionis speciem referenda exponemus.

Objic. contra primam partem: gravia ad telluris centrum, non ad axem tendere, ex Cartesiana hypothesi intelligitur; nec contrarium probat allata inter probationes demonstratio. Re quidem vera si fingatur particula materiæ revolvens in circulo, cujus radius GB. (*Fig.* 7.) hujus materiæ vis centrifuga secundum radium GB dirigitur. Accurate quidem se habet demonstratio, si circulus solitarie spectatur; at si circulus, ipsaque revolvens materia in vortice sphærico, cujus partes sint, considerentur; jam radius GB, ideoque et vis centrifuga in puncto B oblique se habet respectu tangentis BR; quare directio obliqua BG resolvi debet in BC, quæ transit per centrum, et ad tangentem BR perpendicularis est. Hæc vis centrifuga resolutio patet ex demonstratis de virium compositione, et resolutione: igitur vi centrifuga vor-

vorticis non pellentur gravia versus G, sed versus vorticis centrum C. His demonstratis sic argumenta i licet; gravissima omnium difficultas, quæ objici solet, hæc est, quod nempe gravia ad centrum telluris non tenderent: atqui huic objectioni satisfactum est: ergo cet.

Resp. transeat major, N. min. Mirum sine est, quod accuratissimè demonstrationis vim tali responsione eludere tentaverint Scriptores aliqui rerum phisicarum non omnino imperiti. Et quidem si virium resolutionem instituere velimus, vis centrifuga GB non in solam vim per CB resolvitur, sed simul in vim tangentialem per BR. His autem duabus viribus conjunctis per BC, BR, corpus describet diagonalem BC. Propositam objectionem absurdam omnino esse, experientia confirmat; si enim vas MAD liquore plenum corpus aliquod in B minus grave specificè contineat, corpus illud verticaliter ascendet per BG, non autem per BC, quod tamen fieri oporteret, si valeret objectio.

Instabis: fingi potest vortex duplici motu simul agitatus circa axes duos, quam quidem hypothesim factam legimus à Clarissimo Bulfingero in dissertatione de caussa gravitatis, quæ ab Academia Regia Parisiensi anno 1728. præmio condecorata fuit.

Hac

Hac posita vorticis duplici vertigine, jam fieri ait vir prælaudatus, ut fluidi particulæ circulos maximos singulæ describant. Itaque vis centrifugæ directio in quolibet puncto jacebit in circuli maximi plano, ac proinde vi centrifuga corpus pelletur ad commune circulorum maximorum centrum, hoc est ad centrum vorticis.

Resp. N. ant. Fictitia omnino est, et male compacta Bulsingeri hypothesis. Vix in prædictam dissertationem oculos conjeceram, cum statim cognovi, curvam hoc duplici motu describendam ad illud pertinere curvarum sublimiorum genus, quas duplicis curvaturæ appellant Geometræ. Idem problema litteris communicavi cum Clarissimo Viro Petro Marino Neapoli Astronomiæ Professore; nonnullaque ad hanc rem spectantia demonstravi. Tandem vero inveneram quæsitæ curvæ figuram, ut numeri arithmetici 8. notam referat. Proposuerat Bulfingerus machinam quamdam, cujus ope ad experientiam problema posset revocari, sed hanc nondum perfectam affirmat, cum tempus instaret transmittendæ Parisios dissertationis, quam transmissit experimento nondum facto. Talis autem est machinæ structura; globus vitreus circa axem perpendicularem, et simul circa axem horizontalem eodem tempore convertititur, qui quidem duplex motus facile obtineri potest. Globi superficies macula aliqua facile conspicua notatur, ejusdem maculæ motus observatur. Curavi talem machinam executioni mandari, sæpiusque experimento instituto maculæ viam attentis oculis persecutus, eam curvam observavi, quam Geometria mihi jam certe demonstraverat.

Objic. contra secundam partem: extant Nevvtoni litteræ ad Boylium datæ, in quibus ætheris cujusdam subtilissimi hypothesim hunc in modum constituit. Ponit Nevvtonus, ætherem formari ex particulis per gradus indefinitos mole diversissimis; fingit deinde, in corporum poris minus ætheris crassioris latere, quam in spatiis liberis; ideoque in telluris globo multo minorem contineri ætheris crassioris quantitatem, quam in aeris regione. Ponit deinde, ætherem crassiorem in aere ad regionem telluris superiorem tendere, subtiliorem vero ætherem in terram tendere ad partes aeris inferiores; ita ut à parte superiori atmosphæræ usque ad telluris superficiem, et à telluris superficie usque ad centrum per gradus perpetuo fiat subtilior. Fingamus jam corpus aliquod in aere suspensum, aut in ipsa telluris superficie positum; ætheris particulæ in superioribus corporis parti-tibus crassiores sunt particulis ætheris, quæ in inferioribus corporis partibus continentur (ex hypothesi). Præterea æther crassior cum sit poris minus accommodatus, quam æther inferior, atque subtilior, descendere debet æther crassior, et locum subtiliori ætheri inferiori cedere; id vero fieri non potest, nisi corpus spatium ab æthere relictum occupet, ideoque descendet. Hæc est hypothesis Nevvtoniana, quam fere de vervo ad verbum ex prædicta epistola latine reddidimus; eamdem hypothesim plurimis aliis in locis indicavit Nevvtonus. Tandem aliæ fingi possent hypotheses; quid enim vetat, quominus aliud quoddam invehamus fluidium, quod diversissimas à fluidis cognitis proprietates habeat, secundum alias omnino leges agat, quod nullam, aut fere nullam resistentiam præbeat, quod vi inertiæ, vi gravitatis careat; sit tamen gravitatis causa. Unde sic concludendum: admitti possunt hypotheses philosophicæ, quarum falsitas demonstrari non potest; atqui cet.: ergo.

Resp. N. mai. Tamquam vanissimam repudiamus illam Philosophiam, quæ meris innititur conjecturis, atque hypotheses communibus naturæ legibus contrarias longe rejicimus. In memoriam revocentur, quæ de philosophandi regulis, et hypotheseon

seon usu præscripsimus. Descripta hypothesis non satis digna videtur celeberrimo Auctore suo, qui tantam in philosophando severitatem, atque diligentiam adhibuit. Et certe nullam gravitatis rationem reddit, hæc hypothesis, huic enim commentitio ætheri tribuit gravitatem, cujus proinde alia superest afferenda causa. Igitur non sine fundamento credunt Nevvtoniani, Magistrum suum in proponenda hac hypothesi usum fuisse quadam *philosophica* prudentia, et receptis vulgaribus Philosophorum opinionibus parcere voluisse. Tandem philosophicam Nevvtoni modestiam nos imitati nequaquam pronuntiamus, nullam esse extrinsecam, et ab aliquo fluido oriundam gravitatis causam; id unum affirmamus, ex vorticibus Cartesianis eam repetendam non esse, neque ex ullo fluido, quod easdem cum fluidis cognitis proprietates habeat. Et quidem si fluidum illud grave sit, iterum de causa gravitatis redit quæstio. Si idem fluidum agat in corporum superficiem, vel in interiores corporum particulas; secundum vulgares fluidorum leges corporibus imprimere non potest talem motus quantitatem, quæ sit accuratè, ut quantitas materiæ. Tandem fluidum illud ita subtile foret, ut corporum etiam durissimorum substantiam penetraret, neque corporum

mo-

motibus resistentiam præberet, vi tamen maxima in se mutuò corpora impelleret. Hæ quidem proprietates communibus fluidorum proprietatibus omnino repugnant, easque nobis ignotas esse, fatemur. Quæ cum ita sint, facile concedimus, gravitatem esse *qualitatem occultam*, dummodo hoc nomine nihil aliud intelligatur, nisi ignota effectus alicujus causa. Valde autem probabile est, Aristotelem nullam aliam huic vocabulo tribuisse significationem, eamque ab illius sectatoribus fuisse corruptam, et pro arbitrio variè explicatam, vel potius obscuratam.

ARTICULUS III.

De centro gravitatis.

I.

CUM ab ipsa gravitate ortum habuerint centri gravitatis doctrina, et nomen; rerum ordo postulat, ut argumentum illud, hìc data occasione, pertractemus. *Centrum gravitatis* est punctum, ex quo corpus utcumque suspensum manet in æquilibrio, nulla parte præponderante: quare si centri gravitatis motus omnis impediatur, immotas manere neccesum est om-

omnis corporis partes, ac proinde totum corporis pondus in ipso gravitatis centro collectum fingi potest, et loco ponderis ipsum gravitatis centrum substituere licet. Itaque patet, centrum gravitatis hoc modo definitum idem esse cum *centro æquilibrii*: quare utrumque vocabulum indiscriminatim usurpabimus. Non solum in corpore unico, sed quolibet corporum numero, seu, ut vocant, systemate considerari potest centrum gravitatis. Si virgam rigidam, atque inflexibilem fingamus omni pondere, et inertia destitutam, ipsaque suspendatur è puncto medio, et ad æquales hinc inde à medio suspensionis puncto distantias annectantur bini globi æqualis ponderis, ipsi in æquilibrio manent, et neuter alterum vincere potest; quod evidens est, cum omnia hinc et inde sint paria, nullaque proinde sit ratio, cur unum alteri prævaleat. Si altera parte addatur pondus quantumvis exiguum, tolletur æquilibrium, et pars illa descendet, ascendente altera. Si distantia à puncto suspensionis non sit eadem, bina corpora æqualia non manent in æquilibrio, imo fieri poterit, ut id quod gravius est, sed puncto suspensionis propius, cogatur ascendere; atque hæc est regula generalis æquilibrii; habetur nimirum æquilibrium, si distantiæ à puncto suspensionis sint ponderibus appensis reciprocè proportionales, ita ut tanto minor sit distantia, quanto pondus majus est.

Hæc autem lex æquilibrii facili ratiocinatione ita intelligi potest. Si quædam vis requiritur ad movendum corpus aliquod per datum spatium dato tempore, evidens est, requiri vim duplam ad movendum idem corpus per spatium duplum eodem dato tempore; item requiritur vis tripla ad movendum corpus per spatium triplum, et ita deinceps: quare et illud manifestum est: si nempe quædam vis potest vim aliam contra propriam illius directionem agere per datum aliquod spatium dato tempore; ad eamdem vim ita agendam per duplum, triplum, dimidium spatium, requiritur vis dupla, tripla, dimidia. Jam vero in virga prædicta si ponendum sit ex parte alterutra pondus, quod pondus aliud ex parte altera constitutum in eadem distantia sublevare debeat, ipso nonnihilo majus esse oportet, ut ostendimus. Si autem corpus attollendum sit in dupla, tripla, dimidia distantia, attollendum erit per duplum, triplum, dimidium circuli arcum: illa enim pondera circa punctum suspensionis similes describunt circulorum arcus, qui proinde sunt, ut radii, sive ut distantia à centro motus: quare requiritur dupla, tripla,

 di-

dimidia vis cet., ac proinde si pondus eo sit minus, quo distantia major est in eadem ratione, neutra pars vincere potest, sed pondera in æquilibrio manere necessum est. Hoc ergo est principium æquilibrii: distantiæ scilicet à centro motus sunt in ratione reciproca ponderum, sive massarum; sunt enim pondera massis proportionalia. Fingi autem possent infinitæ gravitatis hypotheses, in quibus pondera non forent massis proportionalia; tumque *centrum massæ*, per quod nempe traducto utcumque plano corpus divideretur in massas æquales, idem non foret cum centro gravitatis. Verum tales hypotheses Geometris considerandas relinquimus; Physicis gravitatem constantem, qualem in machinarum viribus, aliisque experimentis sese manifestat, contemplari satis sit.

II. Præcedens doctrina ad machinarum quarumlibet vires estimandas maxime valet. In quavis machina binæ utcumque vires inter se ponuntur connexæ, quarum quidem unam appellare solent *potentiam*, alteram vero *resistentiam*. Ubi autem vires quæcumque ad machinam transferuntur, non solum attendi debet ipsa potentia *absoluta*, sine ullo scilicet machinæ adjumento; sed etiam velocitas, qua moveri inciperent vires secundum propriam directionem, si vincerent, vel contra directionem propriam, si vincerentur. Jam vero in casu æquilibrii, vires sunt in ratione reciproca distantiarum à centro motus, vel quod idem est, reciprocè ut spatia eodem minimo tempore percurrenda, aut etiam ut velocitates *initiales* reciproce: quare si vires absolute oppositæ multiplicentur per suas à centro motus distantias, vel per spatia iisdem temporibus describenda, erunt producta illa hinc et inde æqualia in casu æquilibrii. Productum ex potentia in distantiam à centro motus vocatur *momentum potentiæ*; productum vero ex resistentia in suam à centro motus distantiam dicitur *momentum resistentiæ*. Hìc vero recordari oportet sæpius inculcatam virium definitionem; nempe virium nomine nihil aliud intelligimus, nisi motum quemdam dato tempore genitum, ac proinde æquilibrii nomine nihil aliud intelligi volumus, nisi motum æqualem eodem tempore in partes contrarias producendum; unde patet, æquilibrii notionem, et demonstrationem nulli ambiguitati, aut exceptioni obnoxiam esse posse. Eamdem vero demonstrationem manere evidens est, si vires quotlibet ad machinam adhibeantur; collectis nempe virium omnium, quæ machinam in unam partem nituntur convertere, inveniatur æqualis momentorum sum-

mæ

mæ in partem oppositam, habebitur æquilibrium. Si autem altera summa sit major, hæc vincet, machinamque movebit. Sed hæc omnia simpliciorum machinarum exemplis illustrabimus.

In statera, quæ *Romana* dicitur, pondus mobile excurrit per virgam ferream in partes æquales divisam, adscriptis numeris, qui libras, librarumque partes designant. Quo magis pondus removetur à puncto suspensionis, quod *hypomoclium* dicunt, eo majus pondus ex adversa parte in constanti quadam distantia suspensum requiritur ad servandum æquilibrium. In statera *vulgari* æquales sunt a puncto suspensionis distantiæ. Evidens autem est, utriusque stateræ ope æstimari posse corporum pondera. In *vecte* generaliter, sive fulcrum immobile, cui vectis innititur, sit inter vim, et resistentiam, quæ dirigantur ad partes oppositas, sive fulcrum jaceat ultra vim, et resistentiam, quæ in eadem directione agant, quo remotior erit vis ab ipso fulcro, eo majus erit ejus momentum; ideoque quo magis removemus manum à fulcro, eo facilius pondus sublevamus. In *cuneis* augetur momentum, si longiores sint, et tenuiores, nimirum si minor sit angulus, qui corpus frangendum, vel dividendum penetret. Nam si minor est angulus, eo majus erit spatium, quo cuneus promovetur à vi ipsum impellente, et minus erit spatium, quo à se invicem discedunt partes *laterales*, quæ cunei progressum impedire nituntur. Quoniam autem angulus, quem efficiunt binæ lineæ curvæ, ubi se contingunt, est in immensum minor, quam angulus, quem efficit recta cum alia recta, ut constat ex ipsis Geometriæ elementis; idcirco ungues, et rostra incurvata, et multo magis novaculæ utrimque introrsum excavatæ tam facile penetrant. In *cochlea*, dum manus ingentem peragit gyrum, axis per unicam spiram promovetur. Hinc momentum eo majus, quo spira tenuior, et circulus, quem manus peragit, eo amplior. In machina, quam dicunt *axem in peritrochio*, vectibus oblongis horizontaliter infixis cylindrus convertitur, cui interea dum advolvitur funis ponderi trahendo, vel attollendo adnexus, pondus ipsum promovetur in singulis revolutionibus, quanta est cylindri circumferentia; vis autem vectibus illis applicata movetur per totam circuli circumferentiam, cujus radius est ipsa vectis longitudo. Alteram tandem subjungimus machinam, *trochleas* scilicet, quæ si fixæ fuerint, vim non augent; at si ita fuerint conjunctæ, ut aliæ sint immobiles, mobiles aliæ, jam vis in immensum augeri posset.

set. Dum enim manus removetur à proxima trochlea, tantum ipsa movetur, quantum funis educitur, et tantumdem contrahitur summa funium omnium à trochlea ad trochleam aliam tendentium, ideoque singula funium intervalla, quæ tot sunt, quo trochleæ, eo minus contrahuntur, quo major est trochlearum numerus, et eo minus trochleæ mobiles ad immotas accedunt, ideoque pondus eo minore spatio promovetur. Præcedentes machinas nulla subjecta figura explicavimus; nemo enim est, qui machinas illas oculis frequentèr nōn usurpaverit, visu autem multo facilius, quam auditu percipiuntur.

Nunc vero brevitèr explicandum, quid valeant machinæ, seu quanta utilitate adhiberi possint. Demonstratum est, in casu æquilibrii esse $MV = mv$, ubi M, m denotant pondera quælibet, V, v velocitates. Jam vero si spatia dicantur S, s, tempora T, t; erit $V = \frac{S}{T}$, $v = \frac{s}{t}$, ideoque $\frac{ms}{t} = \frac{MS}{T}$, vel $ms = MS$, cum in machinarum actione tempora sint æqualia. Eo itaque reducitur machinæ cujuslibet actio, ut potentia m, quæ tempore unius horæ E. G. describere potest spatium s, pondus M per spatium S sublevare valeat. His positis, si m exhibeat pondus exigum, M vero massam valde magnam: evidens est, producto m s repræsentari non posse momentum valde magnum, nisi spatium S eo minus sit respectu s, quo majus est pondus M respectu potentiæ m: quare si s repræsentet spatium valde magnum, oportet, ut tempus in eadem ratione majus sit; cum necessario determinatum sit spatium dato aliquo tempore unius horæ percurrendum. Hinc ergo colligitur, in machina qualibet etiam perfectissima compendium virium necessario conjunctum esse cum temporis, et spatii dispendio: quare minime credendum est imperitis, ut non raro contingit hominibus, qui ingentia pondera brevissimo tempore ad magnam altitudinem attollere pollicentur.

III. In æstimandis viribus ipsa virium directio considerari omnino debet. Sit (*Fig.* 8.) C in vecte KL centrum motus, sintque A, et B vires duæ, quæ agant secundum directiones KA, et LB. Ex centro motus ducantur CM, CN perpendiculares ad directiones virium in M, et N; ponatur CM minor, quam CN, et ex centro C intervallo CN describatur circulus NHD rectæ KA occurrens in D. Vis abso-
lu-

lura A repræsentetur per DA: hæc resolvi debet in vim DG secundum directionem CD, et in vim DF perpendicularem ad CD, completo scilicet parallelogrammo AFDG. Jam vis DG agens secundum directionem CD à centro scilicet circuli, vel rotæ DHN versus circumferentiam, nihil valet ad convertendam rotam circa C: sola vis DF, quam *relativam* appellant, hunc effectum producere potest; ac proinde vis absoluta est ad vim relativam, ut DA ad DF. Præterea vis B tendens ad partem contrariam considerari potest applicata in N, vel L: vis enim eadem manet, in quocumque directionis suæ puncto constituatur; pondera enim eadem manet in variis à terra distantiis, ac proinde et vires, quæ ponderibus æquivalent. Jam si vis B æqualis ponatur vi respectivæ DF, erunt conatus æquales, et oppositi, ac proinde in æquilibrio ob distantias CD, et CN æquales; erit ergo in casu æquilibrii vis relativa per DF ad vim absolutam per DA, ut DF ad DA, ut B ad A; atque ob triangula AFD, DMC similia, erit B : A = DF : DA = CM : CD = CM : CN. Hanç ergo generalem demonstravimus pro qualibet virium directione æquilibrii legem; nempe vires esse in ratione reciproca perpendicularium, quæ ex centro motus ad

res-

respectivas virium directiones ducuntur.

IV. Ad demontrandam æquilibrii legem virgam inflexibilem, gravitate, et inertia carentem, qualis nulla existit in rerum natura, fingunt Physici. Igitur in æstimandis ponderibus, gravitatis ratio habenda est. Id vero stateræ Romanæ exemplo declarare non abs re erit. In hac machina considerentur brachia duo inæqualia, quorum nota sint pondera; jam brachiorum pondera in suo gravitatis centro respectivè collecta fingi possunt, ac proinde momentum brachii utriusque erit, ut productum ex pondere in distantiam centri gravitatis à puncto suspensionis respectivè, eritque momentorum differentia excessus ponderis, qui proinde auferri debet ut justum pondus habeatur. Quia vero brachia sunt, homogenea, centrum gravitatis in brachiorum medio constitutum est; sunt autem tota inter se, ut medietates; quare pondus uniuscujusque brachii ducatur in suam à centro suspensionis distantiam; momentorum differentia erit ipsum pondus subtrahendum. Ex his patet, stateram Romanam ob brachiorum inæqualitatem minus accuratam exhibere ponderis mensuram; fraus autem maxime crescere potest, si brachia non fuerint homogenea. Hinc stateram vulgarem ob brachia æqualia in commer-

cii

cii usu adhibere præstat, si autem statera illa fraude aliqua peccaverit, facile detegitur dolus, permutatis ponderibus; ex demonstratis enim facile intelligitur, nullum in statera dolum latere, si in utroque casu maneat ponderum æqualitas. At statera Romana ad examen revocari non potest, quod quidem machinæ hujus vitium est maximum.

V. In omnibus machinis aliud est incommodum omnino inevitabile, mutuus nempe partium attritus. Nulla enim machina moveri potest, nisi partes aliæ super alias incedant, atque labentur. Nulla autem est superficies etiam eximie lævigata, quæ plurimis non emineat asperitatibus, et, ut ita dicam, monticulis, quod quidem demonstrant observationes microscopicæ. Illæ vero asperitates sine resistentia, sine difficultate aliqua superari non possunt. Igitur quæ hactenus demonstravimus de machinarum viribus, dicta volumus dumtaxat in hypothesi, quod omnia abessent impedimenta: quæ profecto efficiunt, ut ad movendum pondus major potentia requiratur, quam quæ ex præcedenti doctrina definitur. At quo magis impedimenta de medio tolles, eo propius experimenta ad demonstrationes physicas accedent.

Resistentia ex mutuo partium attritu oriun-

oriundam variis experimentis æstimare tentarunt diligentissimi Physici, sed irritò, ut nobis videtur, conatu. Alii resistentiam illam ex ipsa superficierum magnitudine computandam esse existimarunt, alii ex corporum pondere, alii tandem ex ipsa velocitate; at mihi facile persuadeo, ex his tribus conditionibus pendere mutuum partium attritum. Et quidem quo major est superficies, eo plures occurrunt superandæ asperitates. Præterea quo majus est corporis pondus, eo altius corporis unius asperitates alterius corporis cavitatibus inferuntur. Tandem quo major est velocitas, eo plura dato aliquo tempore superanda occurrunt impedimenta. At præter conditiones illas maxime etiam considerari debet ipsa superficierum natura, prominentium scilicet partium asperitas, numerus, textura, durities, aliæque plurimæ qualitates nullo experimento satis accuratè definiendæ, atque hinc fit, ut varia experimenta varias præbeant resistentiarum mensuras. Tandem in æstimanda resistentia considerari etiam debet vectis longitudo, quam tamen prætermittere solent plerique Physici, perperam quidem: etenim mutuus partium attritus corporis motum destruit, ac retardat, non secus ac faceret potentia, quæ ad partes, directioni motus contrarias,

age-

ageret, ac proinde ad æstimandam resistentiam satis non est resistentiæ absolutæ rationem habere, sed vectis longitudo attendi etiam debet. Exemplo sit trochlea circa axem mobilis, cujus ope pondera attolli solent; resistentia ex mutuo partium attritu oriunda est mutuus axis trochleæ, et cavitatum, quas ingreditur, attritus; quare resistentia illa eo breviori vectis brachio applicatur respectu potentiæ trochleam moventis, quo minor est axis diameter respectu diametri trochleæ; atque hinc fit, ut multo minor sit trochleæ circa axem mobilis resistentia. Inde etiam intelligitur trochlearum, rotarumque majorum commoditas, et ex iisdem principiis pendet vulgaris usus, quo nempe ad retardandum rapidiorem currus descensum sufflaminari solent rotæ: etenim resistentia ex partium attritu oriunda rotæ circumferentiæ in hoc casu applicatur, secus autem ipsius axis peripheriæ. Ex hactenus explicatis derivari possunt in datis casibus utilissima sanè artificia ad minuendam mutui attritus resistentiam: sed rem fusius persequi non est hujus loci.

VI. Ex centri gravitatis doctrina non solum pendent machinarum vires, sed alia quoque phænomena plurima, quorum pauca proponere satis erit. Si ex centro gravivitatis corporis alicujus ducta intelligatur recta ad horizontem perpendicularis, hæc vocatur *linea directionis*. Porro linea illa vel cadit intra basim, vel extra ipsam occurrit: quare cum in ipso gravitatis centro totum corporis pondus locatum fingi possit, patet, in primo casu nullum esse ruinæ periculum, si nempe linea directionis intra basim cadat, sustinetur enim corpus; contra autem linea directionis extra basim excurrente corpus labi, et præceps ruere necessum est, nisi ipsa obstaret partium tenacitas. Mirum ergo non est, quod turres Pisana, et Bononiensis, licet maxime inclinatæ, firmæ tamen, et stabiles consistant. Hinc naturali quadam mechanica corpus retrorsus inflectunt imperiti quoque homines, si per locum declivem descedant; contra autem si ascendant, corpus antrorsum incurvant, ut nempe linea directionis in basim retrahatur. Hinc homines ambulantes singulo passu à dextera ad sinistram, et viceversa corpus convertunt. Hinc homines pingues, et obesi situm rectum affectare solent. Eadem de causa bajuli, qui pondus alterutra manu gestant, manum alteram in partem oppositam extendunt. Tandem eodem artificio funambuli sese in omnes partes pro necessitate contorquent, et longiori pertica utuntur, quam

hinc

hinc et inde versant maxima industria, ut linea directionis extra angustissimum funem non excurrat.

VII. Centri gravitatis inveniendi rationem formula algebraica exhibere solent Geometræ; nobis vero, qui rerum facilitati maxime studemus, centrum gravitatis in corpore quocumque mechanice invenire satis erit. Corpus aliquod filo suspendatur, volvetur, converteturque corpus illud, donec filum ad terræ superficiem perpendiculariter dirigatur, centrum gravitatis erit in hac perpendiculari, nempe in linea directionis, quod quidem evidens est ex gravitatis directione et ex ipsa centri gravitatis natura. Jam attramento, vel colere aliquo facile conspicuo in ipsa corpori superficie notetur linea, quam perpendiculi filum fecerit; rursus ex alio puncto suspendatur corpus, invertaturque corporis situs, et pari modo linea perpendiculi signetur, communi duarum linearum intersectioni imminebit centrum gravitatis, et re ipsa si corpus ex hoc puncto suspendatur, immotum manebit. Res eadem facilius præstari potest adhibita tabula horizontali probe lævigata, promoveatur nempe corpus, quantum fieri potest versus marginem tabulæ, ita ut tamen non cadat, notetur in ipsa corporis superficie linea, quæ est communis

nis intersectio superficiei, et tabulæ; deinde iterum invertatur corporis situs, promoveaturque, ut ante, habebuntur communes intersectionis duæ, nempe secundum longitudinem, et latitudinem, quarum communi intersectioni intra ipsum corpus subjacebit centrum gravitatis. Ceterum evidens est, in corporibus homogeneis, quæ in partes æquales, et similes dividi possunt, centrum gravitatis idem esse cum puncto corporis medio, quod *centrum figuræ*, vel *magnitudinis* solet appellari.

Dato gravitatis centro in quolibet corporum numero, commune gravitatis centrum omnium ex antea demonstratis facile invenitur. Si bina fuerint corpora quæcumque, centrum commune gravitatis erit in recta jungente utrumque gravitatis centrum; in medio si fuerint æqualia; si vero inæqualia, ita propius erit centrum commune gravitatis massæ majoris centro, ut distantiæ sint ipsis massis reciproce proportionales, ex demonstratis. Si corpora sint tria, conjuncto gravitatis centro communi binorum corporum cum centro tertii, divisaque recta jungente in ratione reciproca massis minoris ad summam massarum, punctum hoc modo inventum erit centrum commune quæsitum. Eadem ratione progredi licet ad massas quascumque. Hæc autem

tem omnia facile deducuntur ex demonstrato æquilibrii principio, si nempe consideretur corporis pondus tamquam coactum in centro gravitatis, atque eadem ratione evidens est, centrum gravitatis esse unicum. Fingamus enim, aliud esse punctum. Jam quia totum corporis pondus in centro gravitatis adunatum fingi potest; corpus suspensum extra gravitatis centrum quantum fieri potest, descendere debet, nec potest quiescere, donec ad punctum infimum pervenerit. At proprietatem illam punctis duobus convenire repugnat. Itaque si corpora quotlibet inter se quomodocumque connexa è centro gravitatis communi suspendantur, totum corporum systema in æquilibrio manere necessum est. Hæc pauca dicta sint de centro gravitatis, non quidem pro rei dignitate, sed quantum postulare videtur harum institutionum ratio.

APPENDIX.

De quibusdam capitis præcedentis utilitatibus.

I.

QUod gravitatis doctrinam spectat, illius utilitas manifesta fiet ex dicendis deinde, ubi scilicet motus ex gravitate oriundos explicabimus. Interim vero observare satis sit, ex variis Philosophorum hypothesibus de causa gravitatis, et ex ipsius rei difficultate omnino evinci, in Physica sua esse, et quidem abditissima arcana, quæ nulla humani ingenii vis reserare potest. Si autem in rebus limitatis à Deo creatis insuperabiles persæpè occurrant difficultates, quod quidem à nemine suæ tenuitatis, et ignorantiæ conscio negari potest, qua fronte Creatorem infinitum, et sanctissima religionis mysteria curiosius scrutari, atque penetrare tentant superba impissimorum hominum ingenia, qui id omne respuunt, et velut à ratione alienum fastidiose traducunt, quod suo imbecilli quidem ingenio non possunt comprehendere? Itaque apud religiosos, probosque Philosophos ea semper obtinere debet

bet præstantissima, et unica philosophandi ratio, quæ fundatur in experimentis, et observationibus; hæc vero si ad physicam, mechanicamque causam non semper nos deducat, ad causam infinitam, Deum conditorem, et Dominum nos certissimè perducit. Hic est fructus Philosophiæ uberrimus, naturæ majestatem propius intueri, naturæ Auctorem impensius colere, et venerari, illique soli servire. His autem pietatis, et religionis ergo præmissis, jam inter innumeras capitis præcedentis utilitates paucas seligamus.

Ad explicandos animalium motus maxime valet præcedentis capitis doctrina, quam quidem utilitatem satis demanstravit *Joannes Alfonsus Borellus* in eximio opere, cui titulus est: *de motibus animalium.* Paucis exemplis rem declare satis erit. Fingatur brachium horizontalitèr extensum, extremisque digitis alligatum intelligatur pondus viginti octo librarum, quod quidem onus ab homine satis robusto in hoc situ sustineri posse experientia compertum est. Tale pondus sustinetur vi musculi, cujus extremitas superior annexa est capiti rotundo ossis humeri, altera autem extremitas capiti rotundo ossis cubiti alligatur. Jam cubitus cum manu extensa circa centrum articulationis in osse cubiti revolvi potest; notum præterea est ex diligentiori Anatome, distantiam musculi à centro articulationis esse ad ponderis ab eodem centro distantiam, ut 1 ad 20., quare ut habeatur momentum musculi, multiplicari debet pondus absolutum, nempe 28 librarum per 20, distantiam scilicet à centro motus, efficiturque productum 560 librarum; tanta nempe est vis musculi, ut libris 560 æquivaleat, ob superandam vectis longitudinem; id vero ex demonstratis facile intelligitur. Simili ratione ad calculum revocari possunt in alio quolibet casu musculorum vires, dummodo per Anatomen data sit distantia à centro motus, et per experientiam superata resistentia innotescat. Porrò hìc obiter observanda est admirabilis plane musculorum dispositio; musculi scilicet ossibus alligantur in minori à centro motus distantia, ita ut potentiam musculi multo majorem esse oporteat. Quamvis autem animalibus orta inde videri possit aliqua virium jactura, in hac tamen structura omnipotentem Creatoris manum plane mirari debemus. Si enim potentia longius distaret à centro motus, jam ob majorem articulationis distantiam non solum deformis, atque molesta foret musculorum, animaliumque figura; sed etiam ad motum minus idonea, suaque mole, ac crassitiæ animalia laborarent.

II. Ad firmitatem ædificiorum æstimandam eadem principia transferri possunt. Fingantur trabes duæ similes cylindricæ, vel prismaticæ ABDE, FGHK (*Fig.* 9.) muro immobili IL infixæ, divisæ intelligantur AB, FG æqualitèr in C, M. Jam illarum pondera fingi poterunt collecta in punctis C, M centro gravitatis directe oppositis. Facilitatis ergo ponatur AB = 2FG, erit pondus trabis ABDE octuplo majus pondere trabis FGHK; sunt enim trabes illæ utpote similes in ratione triplicata laterum homologorum ex elementis Geometriæ: quare cum pondus trabis ABDE locatum fingatur in C, sitque AC duplo major distantia F M; erit momentum totum ad rumpendam trabem in puncto A decies sexcies majus momento trabis alterius. Jam conferantur vires, quæ trabes illas integras, muroque infixas servare conantur. Sit ARE trabis majoris sectio, et FSK minoris. Dividantur AE, et FK, æqualitèr in P, et Q; erit in qualibet sectione fibrarum *longitudinalium* numerus, ut sunt sectiones ipsæ, ac proinde ut quadratum rectæ AE ad quadratum recte FK (ex elementis Geometriæ) nempe ut 4, ad 1; ideoque etiam cohæsio, quæ est, ut fibrarum numerus, erit in eadem ratione; sed cohæsio illa considerari potest, ut vis resistens, cujus proinde resistentiæ ut habeatur momentum, hæc collecta poni debet in centro gravitatis P, et Q; ideoque cum sit AP = 2FQ, erit in prima trabe momentum resistentiæ octuplo majus. At momentum vis, quæ trabem majorem in puncto A rumpere, et à muro avellere conatur, est decies sexties majus: unde evidens est, vires, quæ ad trabes rumpendas tendunt, crescere in ratione quadruplicata longutidinum, vires autem oppositas, adhæsionis nempe, crescere tantum in ratione triplicata. Hinc trabes majores, servata licet partium proportione, rumpuntur facilius; imo tanta esse posset illarum longitudo, ut proprio pondere fractæ necessariò ruerent. Merito igitur concludit Galilæus, ædificium aliquod firmum stare posse, quod proculdubio rueret in formam justo ampliorem redactum, manente licet partium proportione; quod quidem in arte architectonica utilitate non vacat.

Ex eodem principio infert celeberrimus Auctor, suos esse in operibus naturæ, et artis limites, quos ultra consistere eadem opera minime valerent. Ita si arbores nimio donarentur volumine, gravitate sua oppressi rami facile rumperentur. Simili ratione crassiora animalia vim non habent, quæ illorum magnitudine respondeat; atque

que

que hinc si aliqua forent terrestria animalia multo majora iis, quæ novimus, vis organicos motus exequi possent, suaque mole fatiscerent, perpetuisque obnoxia essent periculis. Ex hac doctrina concludere audent intemperatiores quidam Critici, nullos umquam extitisse homines, qui justam, vulgaremque hominum mognitudinem multum excederent. Nec Scriptores illos hac in re valde moratur S. Scripturæ auctoritas; ajunt enim nominibus Hebræis *Nephilim*, et *Gibborim*, quæ in primiginio textu leguntur, et in *vulgata* nostra Gigantum nomine redduntur, significari etiam posse scelestos homines, suisque flagitiis non minus quam staturæ magnitudine famosos. Quod autem refertur Deut. 3. de lecto Og, *qui novem cubitos habebat longitudinis, et quatuor latitudinis*, de sola lecti magnitudine iidem Auctores intelligunt, eamque ferunt apud orientales populos consuetudinem, ut amplissimos lectos ad pompam ornarent, et in tali ornamento fastum collocarent. Verum quidquid sit de hebraicorum nominum ambiguitate, eam omnino dirimit vulgatæ versionis, et 70. Interpretum auctoritas, nullumque dubitandi locum relinquit Gigantis Goliath altitudo, quæ lib. 1. Reg. describitur: *sex cubitorum, et palmi.* Itaque ex dictis hoc unum colligere licet, prætèr consuetas naturæ leges conformatos fuisse enormis Gigantes, et singulari virium proportione donatos, quod quidem exemplo suo confirmant aliqui insusitatæ staturæ homines, qui his nostris temporibus per urbes vagantur, suæque magnitudinis beneficio victum quæritant. Tales autem homines, si cum antiquis gigantibus conferantur, velut nani, et pumiliones haberi debent, sua tamen magnitudine quasi opprimi, et laborare observantur. Necessaria ergo fuit antiquis Gigantibus insolita, et præter naturæ humanæ ordinem virium proportio; præsertim si verum sit, quod de Gigantibus illis legitur, aliquos scilicet longe ultra vulgarem hominum ætatem, et per multa sæcula vixisse. Idem dicendum de Gigantibus, quos etiam num hodie magno numero extare narrant viatores nonnulli, quibus tamen facilius, et nisi dicto fides constiterit, credendum non est.

Fornicum stabilitas ex centri gravitatis doctrina omnino pendet. Rem levitèr attingam. Intelligatur fornicis arcus ex diversis constans lapidum segmentis, cuneorum instar dispositis et ad arcus centrum tendentibus. Lapis arcus superior, qui fornicis *conclusiva*, seu *clavis* appellari solet, perpendicularis est ad horizontem, atque hinc

hinc et inde contiguis lapidibus sustinetur. Ductæ concipiantur verticales per singula gravitatis centra in singulis lapidum segmentis. Jam lapis superior lapidibus contiguis veluti planis inclinatis incumbit, ac proinde tota vi gravitatis non tendit ad descensum, sed aliqua tantum gravitatis parte, quæ eo major est, quo minus inclinata sunt contigua lapidum plana: quare si planorum inclinatio fingatur infinite parva, hoc est, si lapidum segmenta forent ad horizontem perpendicularia non secus ac fornicis clavis; jam clavis tota vi gravitatis ad descensum tenderet, et re ipsa descenderet, nisi arenato, et calce retineretur, atque hinc minus tuti sunt, et facile ruinosi fornices plani; sed accuratos fornices consideremus. Clavis intra contiguos lapides constricta per lineam verticalem ad descensum tendit; hunc vero conatum exercere non potest, nisi hinc et inde premat contigua lapidum segmenta, eaque conetur repellere. Hæc autem clavis actio in lapidem contiguum exhibetur per rectam ex centro gravitatis clavis perpendiculariter ductam ad lapidis contingui superficiem. Patet autem ex virium compositione, et resolutione, hanc lineam esse diagonalem parallelogrammi, cujus latera duo sunt vis perpendicularis, qua clavis ten-

tendit ad descensum, et vis horizontalis, qua clavis tendit ad removendum lapidem contiguum. Secundum illud lapidis segmentum vi clavis per diagonalem prædictam impulsum, urgetur quoque vi gravitatis ad horizontem perpendiculari, atque hinc resultat vis alia composita, qua urgetur lapis alius contiguus, atque ita deinceps ad ultimum usque lapidem fornicis fulcro insistentem. Jam vero ea esse debet singularum fornicis partium structura, atque sectio; ut lapides singuli à fornicis clavi ad fulcrum vim compositam exerceant, ad horizontem per gradus minus ac minus inclinatam; atque ita vis tota in ipsum fulcrum, fere perpendiculariter dirigatur. Superest jam, ut vim horizontalem, ipsiusque fulcri resistentiam consideremus. Totum dimidii fornicis pondus collectum fingatur in centro gravitatis, ex quo ad superiorem lapidis ultimi superficiem ducta intelligatur perpendicularis, secundum hanc directionem dumtaxat dimidius fornix in ultimum fornicis segmentum agere potest. Hæc autem vis ad fulcrum debet referri, et in duas vires dividi, verticalem unam, horizontalem alteram. Vis ad fulcrum perpendicularis fulcrum ipsum magis præmit, atque confirmat, vis autem horizontalis ad fulcrum evertendum tendit. At fulcrum to-

totam gravitatem huic conatui opponit; hæc autem gravitas agit per lineam verticalem è centro gravitatis ductam ad basim ipsius fulcri. Itaque in æstimandis fornicum viribus duæ considerandæ sunt actiones contrariæ, prima horizontalis, qua fornix ad fulcrum subvertendum tendit; perpendicularis altera, nempe fulcri resistentia. Tandem duæ illæ actiones ad centrum motus in ipsa basi referendæ sunt: atque eo majus est virium illarum momentum, quo major est à centro motus distantia; tota ergo huc reducitur fornicis stabilitas, ut nempe dimidii fornicis actio horizontalis fulcri resistentia major non sit. Hæc sunt utilissimæ doctrinæ elementa, quæ ad calculum facile revocabunt Geometræ, nobis autem satis sit rem generatim indicasse.

III. Ad principia in præcedenti capite explicata pertinet horologiorum rotis instructorum motus, sed utilitas melius intelligatur deinceps, demonstrata scilicet pendulorum doctrina, unicum aliud utilitatis exemplum afferemus. Nemo non videt in *portalibus* horologiis *machinulam conicam*, quam catenula amplectitur. Hujus figuræ ratio ut intelligatur, observandum est desinente horologii motu, catenulam cylindrico horologii tympano totam circumpliplicari ; si autem horologio motus restituatur , catenula è tympano ad conicam machinulam transire debet. Id vero fieri non potest , nisi tympanum convertatur, totque revolutiones perficiat , quot gyris catenula ipsa tympano convolvitur. Præterea talis est in tympano partium structura , ut eo per vicet revoluto , magis ac magis tendatur lamella elastica in tympano concluse. His præmissis evidens est , majorem tunc haberi lamellæ elasticæ tensionem , ac proinde et majorem vim , dum catenula tota conicæ machinulæ circumponitur ; hæc autem tensio per gradus decrescit , dum machinula revolvitur , ac tandem vis fit omnium minima , dum gyros fere omnes catenula absolvit , et puncto ultimo proxima est. Itaque patet , ex illa vis motricis inæqualitate futurum esse , ut perpetuæ variationi obnoxius sit rotarum motus, nisi figura conica paratum fuisset huic incommodo remedium. Igitur ad corrigendam motus inæqualitatem efficiendum erat, ut majore existente vi motrice minor foret distantia à centro motus , ideoque et minor machinulæ diameter , et contra ; oportet nempe , ut in machinulæ puncto quolibet productum ex vi tensionis in distantiam à centro motus sit constans semper, et æquale ; hoc enim artificio fit , ut vis

mo-

motrix eadem perpetuò maneat, atque uniformiter fere moveantur rotæ, non secus ac facerent appenso aliquo constanti pondere. Cum ergo demonstrata principia accuratam nobis suppeditent temporis mensuram, hanc quoque utilitatem inter innumeras alias commendare voluimus. Problema est apud Geometras notissimum: invenire curvam, cujus revolutione genitum solidum quæsitam præberet in horologiis motus æquabilitatem, ex qua proinde curva formari deberet prædicta machinula. Verum res est sublimioris indaginis, atque motus uniformitatem, covenientemque figuram repetitis experimentis accuratissimè inveniunt peritioris horologiorum artifices; talis figuræ rationem exposuisse satis sit.

SEC-

SECTIO SECUNDA.

De reliquis universalibus corporum proprietatibus ex virium notione derivandis.

CAPUT I.

De motu in genere, variisque illius speciebus.

EX ipsa virium notione derivari *mobilitatem* et *quiescibilitatem*, evidens est; motus enim est virium effectus, est seclusa vi qualibet impressa, corpus semel quiescens perpetuò quiesceret. Amplissimum quidem patet hujus capitis argumentum; sed præcipuas dumtaxat motuum species expendemus. Et 1. quidem de motu generatim paucis præmissis, ad motum rectilineum, et deinde ad curvilineum progrediemur: illas autem dumtaxat motuum leges axplicabimus, quæ in rerum natura maxime obtinent, prætermissis variis motuum variabilium pro arbitrio confictis hypothesibus; tandem corporibus solitarii motu considerato, diversos corporum motus in-

inter se comparabimus, et conflictuum regulas demonstrabimus.

ARTICULUS I.

De motu generatim considerato.

I.

MOtum jam antea definivimus *continuam loci mutationem*; unde intelligitur, quietem esse *perseverantiam* in eodem loco: quare cum *mobile* non consideremus, nisi quatenus locum mutat, et à magnitudine, aliisque affectionibus quibuscumque abstrahamus, mobile instar puncti consideratur, quamdiu solius mutationis loci ratio habetur, atque ideo durante motu lineam describere ponitur; continuo enim motu puncti linea describi concipitur. Locus, à quo mobile recedit vel recedere conatur, dici solet in scholis *terminus à quo*; locus vero, ad quem mobile accedere conatur, *terminus ad quem* appellatur. Locus duplex distinguitur, *absolutus*, et *relativus*; locus absolutus dicitur pars spatii immobilis, et immensi, quam res occupat; locus autem relativus est spatii alicujus dati pars illa, quæ tamquam immota spectatur, et in qua res locatur. Hinc patet, fieri posse, ut mutetur locus absolulutus, non mutato loco relativo, et viceversa, nam si nauta in navi, quæ plenis velis fertur, dormiat, locum suum absolutum mutat cum navi ipsa, servat vero eumdem locum relativum respectu partium navis; at si nauta pari velocitate, qua fertur navis ipsa, progrederetur contra navis directionem, mutaret locum relativum, manens in eodem loco absoluto. Itaque pro varia loci mutatione, motus vel est absolutus, si mutetur locus absolutus; vel relativus, si mutetur locus relativus. Idem dicendum est de quiete, quæ est perseverantia in loco vel absoluto, vel relativo. Fieri igitur potest, ut ea, quæ absolutè quiescunt, nobis videantur moveri, dum nempe locum suum mutant relative ad alia objecta, quæ tamquam immota consideramus, vel quorum motum non percipimus. Nam cum omne corpus nobis conspicuum suam imaginem ope radiorum ab eodem objecto prodeuntium in oculi fundo, seu in retina depingat, ea objecta moveri videntur, quorum imagines in retina moventur, seu diversa retinæ partes continuò, ac successivè occupant, dum quis oculum suum velut immotum fingit. Contra autem velut quiescentia cernimus objecta illa, quorum imagines eamdem semper occupant retinæ partem, cum

sci-

scilicet imaginum motus in fundo oculi non sentitur: atque hinc est, quod homines in navi sedentes ipsum navis motum non percipiant, omnes quippe navis partes inter se relative quiescentes eamdem quoad oculum positionem, et distantiam servant, imaginesque suas in iisdem retinæ partibus delineant; at cum oculos ad litora convertit spectator, necesse est, ut objecta in litore posita situm suum respectu oculi continuo mutent, ac proinde imagines suas in aliis, aliisque retinæ partibus successive pingant; qua ratione, fit ut litora, urbesque moveri videantur.

II. Omissis quæstionibus plurimis, et omnino superfluis de natura motus, considerare satis erit motum velut certissimum, atque indubitatum naturæ effectum, à nemine, nisi Sceptico, negandum. Et quidem experientia quotidiana constat, plura corpora inter relative moveri cum infinita propemodum varietate; sed corpus unum non potest moveri relative ad alterum, nisi alterutrum saltem moveatur absolute, etenim si corpora duo absolute quiescunt, positionem suam inter se non mutant, ac proinde si unum spectetur ut immotum, alterum etiam immotum apparebit; nullaque erit locorum mutatio relativa; ergo ex motu relativo evidentèr demonstratur motus absolutus. Serio refelli non merentur ineptissimæ veterum Scepticorum argutiæ, quibus impossibilitatem motus adstruere stultissimè laborabant. Tales cavillationes risu excipi debent, quemadmodum ab Herophilo Medico factum fuisse, narrat Sextus Empiricus. Hoc argumentum proposuerat Diodorus Chronus Sophista: si corpus moveretur, vel moveretur in loco, in quo est, vel in loco, in quo non est; atqui nec moveri potest in loco in quo est, ut enim moveatur, debet mutare locum; nec moveri potest in loco, in quo non est, siquidem nec agere, nec pati potest, ubi non est, ergo corpus nullo modo moveri potest. Hoc sophisma lapide solvisse fertur Herophilus. Cum enim à Diodoro, ut luxatum ipsius humerum restitueret, vocatus esset, subridens dixit, eum forte alio morbo laborare, humerum è suo loco excidere non potuisse, cum nequat moveri; etenim, inquit Herophilus, si motus esset, vel motus est in loco, in quo erat, vel in quo non erat; sed neutrum fieri potest; ergo humerus luxatus non est. Sophista, cui non placebat argumentum, rogavit Medicum, ut dictorum oblivisceretur, et remedium malo adhiberet. Cetérum statim patet sophisma; nec enim corpus movetur in loco, in quo est,

nec

nec in loco, in quo non est, sed movetur è loco in locum, seu dum continuò mutat locum, et de loco, in quo est, transfertur in locum, in quo non erat. Nihilo solidius est vulgatissimum Zenonis argumentum. Sophisma est hujusmodi; ponatur Achillem cursu velocissimum à testudine animali tardissimo distare intervallo passum mille, atque eum centies velocius testudine moveri. Dum Achilles unum percurrit milliare, testudo milliaris partem unam centesimam conficiet, ideoque Achilles testudinem nondum est assecutus. Rursus dum Achilles partem illam milliaris centesimam percurrit, testudo interim per milliaris partem decemmillesimam reptabit, ideoque nec adhuc testudinem erit assecutus Achilles. Eodem modo dum Achilles partem illam milliaris decemmillesimam decurrit, testudo per milliaris partem millionesimam promovebitur, ideoque nec testudinem potest attingere; atque sic progredi licebit in infinitum, nec Achilles umquam poterit testudinem captare.

En celebre Zenonis sophisma, quod *Achillem* ob vim ipsius, quam existimabat insuperabilem, appellabat. Hac cavillationem scriptis tractatibus integris solverunt aliqui, deambulando autem solvebat Diogenes. Sophismatis fallaciam statim demonstrant Arithmetici; hoc enim in Arithmetica demonstratum, summam seriei cujusvis quantitatum in quavis proportione geometrica in infinitum decresentium æqualem esse quantitati finitæ; sed milliaris $\frac{1}{100}$ pars, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000000}$, $\frac{1}{100000000}$, et sic in infinitum, est series quantitatum in progressione geometrica decrescentium; ideoque illius summa cum sit æqualis quantitati finitæ, à mobili tempore finito percurri potest. Ponamus, Achillem spatio unius horæ milliare peragrasse; ergo et partem milliaris centesimam in parte horæ centesima conficiet, et partem milliaris decemmillesimam in horæ parte decemmillesima percurret, et ita in infinitum. Si hujus seriei in infinitum continuatæ summa infinito temporis spatio responderet; jam Achilles testudinem numquam assequeretur tempore finito. Verum, ut dictum est, horæ pars $\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000}$ cet. quantitati finitæ æqualis est, uni scilicet parti nonagesimæ nonæ unius horæ, ut facile demonstratur in Arithmetica. Igitur Achilles testudinem assequetur post elapsam horam unam, et partem horæ nonagesimam no-

nonam. Itaque evanescit argumentum, cujus vim insuperabilem toties jactaverunt illius patroni; et quidem absurde omnino, sibique parum consentientes; cum testudinem, et Achillem, etsi numquam se invicem attingerent, magis tamen, ac magis ad se mutuo accedere, ac proinde et moveri concedant. Hæc de motu generatim dicta sint, quibus, adjungendum essent alia nonnulla; sed hæc ex primo Physices articulo repetenda, ubi ea tractari doctrinæ necessitas postulabat.

ARTICULUS II.

De rectilineo corporum descensu.

I.

MOtum *variabilem* jam in primo Physices capita definivimus, is nempe est, cujus velocitas continuo crescit, aut decrescit. Dicitur autem *uniformiter acceleratus*, si temporibus æqualibus æqualia accedant velocitatis incrementa; contra *uniformiter retardatus* appellatur, si velocitas temporibus æqualibus ad quietem usque equalitèr decrescat. Uniformitèr acceleratum esse motum vi gravitatis constantis productum, ex ipsa definitione facile colligitur. Et quidem 1. descensum perpendicularem consideremus. Ponatur tempus, quo grave aliquod descendit, divisum esse in particulas æquales et valde exiguuas, primaque temporis particula agat gravitas, et corpus perpendicularitèr impellat. Si jam post primum illud tempus omnis gravitatis actio cessare fingatur, nihilominus per vim inertiæ, acquisitam velocitatem corpus perpetuò servaret. At cum gravitas desinentèr agat, etiam in secunda temporis particula corpus alium gravitatis impulsum priori æqualem accipiet, ac proinde velocitas elapso secundo tempore dupla erit. Simili ratiocinatione patet, velocitatem esse triplo majorem, elapso tertio tempore; et ita deinceps: ergo velocitas crescit, ut tempus, seu æqualibus temporibus æqualia accedunt velocitatis incrementa, ac proinde motus est uniformitèr acceleratus 2. Si corpus descendat per planum inclinatum, res eadem facile demonstratur: etenim corpus C. (*Fig.* 10.) incumbat plano inclinato F. Ex centro C ducta intelligatur C G ad basim horizontalem D B perpendicularis, quæ exhibeat gravitatem totam absolutam corporis C, et dividatur in vires duas, quarum una C F sit plano inclinato perpendicularis, altera vero eidem plano parallela. Vis, quæ est, ut CF, nihil confert ad des-

descensum corporis per planum inclinatum, sed tota impenditur in premendo plano; superest ergo dumtaxat vis FG: sed ob triangula rectangula DAB, CFG similia erit FG : CG = AB : AD. Hæc autem ratio eadem manet in quocumque loco plani inclinati positum sit corpus, ac proinde et eadem est ratio gravitatis absolute CG ad gravitatem relativam FG; igitur gravitas relativa constans est, ideoque eadem est demonstratio; quæ pro gravitate absoluta; quare motus est uniformitèr acceleratus. Contraria ratione intelligitur, motum corporum in eadem recta sursum tendentem esse uniformitèr retardatum; cum scilicet vis gravitatis contra motus impressi directionem perpetuò, et uniformitèr agens æqualibus temporibus æqualitèr motum minuat, usque dum velocitas omnis sursum extincta sit.

II. Recta A B (*Fig.* 11.) exhibeat tempus, quo corpus aliquod per datum quodlibet spatium descendit. Divisum intelligatur tempus in particulas innumeras, *e i*, *i m*, cet. Jam velocitas temporis particulà infinitè parvà *ei* erit uniformis, hæc autem repræsentetur per *e f*; recta *i k* exhibebit velocitatem particulà temporis infinite parvà *i m*, et ita deinceps; sed ex demonstratis in primo articulo, spatium motu uni-

 for-

formi percursum est, ut rectangulum sub tempore, et celeritate; quare erit spatium percursum tempore *e i* velocitate *e f*, ut rectangulum *i f*; eodem modo spatium percursum tempore *i m*, et celeritate *i k* erit ut rectangulum *m k*; et sic de ceteris: quare erit spatium his omnibus temporibus percursum, ut omnia hæc rectangula. Cum autem temporis particulæ sint infinite parvæ, rectangulum *i f* non differt à trapezio *e i f k*, ac proinde rectangulorum omnium summa æqualis est triangulo A B C. Jam vero ob motum uniformitèr acceleratum tempora A *o*, A B, sunt ut velocitates *or*, BC, ac proinde similia sunt triangula A *o r*, ABC; ideoque sunt ut quadrata laterum A *o*, AB, vel *o r*, BC hoc est, ut quadrata velocitatum, aut temporum; ac proinde etiam, quod idem est, velocitates, aut tempora sunt in ratione subduplicata spatiorum. Ex hac uniformis accelerationis lege statim evidens est, spatium dimidio tempore AB percursum velocitate C B tempore A B acquisita æquale esse spatio tempore AB descripto motu uniformitèr accelerato: etenim spatium velocitate uniformi BC tempore AB percursum repræsentatur per rectangulum A B C D duplum trianguli A B C: ac proinde dimidium spatium, quod est, ut triangulum ABC,

ABC, velocitate uniformi BC dimidio tempore percurritur.

III. Si corpus aliquod vi gravitatis constantis tempore quolibet dato datum spatium percurrat, tempore duplo describet spatium quadruplum, tempore triplo spatium noncuplum cet. Neque si tempora fuerint in proportione arithmetica 1. 2. 3. 4. cet. spatia percursa se habent in proportione 1. 4. 9. 16. cet. hoc est si corpus minuto uno secundo describat pedes 15, duobus secundis percurret pedes 15 × 4 tribus secundis 15 × 9, et ita deinceps. Igitur spatia singulis temporibus seorsim descripta sunt, ut numeri impares 1, 3, 5, 7 cet. ut patet. Si enim ex spatio 4 duobus primis temporibus percurso auferatur 1, spatium scilicet primo tempore descriptum secundo tempore, et ita dicendum de aliis quibuslibet temporibus. Ceterum patet, hæc omnia convenire etiam corporibus, quæ per plana inclinata descendunt. Demostravimus enim, hunc esse plani inclinati effectum, ut corporis gravitatem absolutam minuat, manente tamen constante gravitatis parte reliqua.

Hinc merito inter machinas recensetur planum inclinatum; cum enim *machina* appelletur, quidquid ad motum faciliorem confert, evidens est, machinis annumerandum

dum esse planum inclinatum, cum aliquam gravitatis absolutæ partem sublevet, eam tantum superandam relinquens gravitatis partem, quæ plano inclinato parallela est.

IV. Constantem esse gravitatem terrestrem, jam antea ostendimus; itaque quidquid demonstratum est hactenus, ad gravium descensum transferri debet; ac proinde dato quolibet tempore inveniri potest spatium vi gravitatis cadendo descriptum, et viceversa dato spatio definitur tempus. Sit altitudo quælibet data, vel spatium cadendo percursum a, tempus, t, spatium data aliqua temporis parte 1 descriptum dicatur s: erit $1 : s = t^2 : a$, ideoque $s = \frac{a}{t^2}$, et $t^2 = \frac{a}{s}$ quare $t = \frac{a}{\sqrt{s}}$ E. G. Si corpus pedes 60 percurrat tempore minutorum duorum secundorum, spatium quatuor minutis secundis percurrendum erit 16. 10; $4 = 4.\ 60 = 240$. Viceversa si tempore secundorum quatuor corpus percurrat 240 pedes; tempus, quo percurritur spatium pedum 135, erit $\sqrt{135.\ 16 : 240} = \sqrt{135 : 15} = \sqrt{9} = 3$. At observandum est,

est, demonstratam accelerationis legem valere dumtaxat in vacuo, sublata aeris resistencia, seclusisque aliis quibuslibet impedimentis; attamen si experimenta fiant in globis, qui pondus satis magnum sub exiguuo volumine continent, demonstratam accelerationis legem satis accurate servat globorum illorum descensus; hac lege descendunt globi plumbei in angustum volumen redacti; at si iidem globi in sphæram cavam magnæ diametri extenderentur, jam turbaretur maxime lex illa; imo eo tenuitatis reduci posset globus, ut aeri mollioris plumæ instar innataret. At de aeris, fluidorumque resistentia sermo erit deinceps. Neque etiam hìc consideramus gravitatem in magnis à terra distantiis; hanc enim in ratione distantiarum duplicata decrescere jam demonstravimus. Verum cum in distantiis à terra mille, et mille ducentum exapedarum gravitatem constantem demonstrent experimenta, talem gravitatis legem nunc explicasse satis sit. Hæc autem gravitatis doctrina debetur *Galilæo*, qui motus uniformitèr accelerati leges primus omnium invenit, atque demonstravit.

V. Ex demonstratis facile comparantur inter se corporum descensus per diversa plana inclinata. 1. Si ex puncto B ad planum

num inclinatum AD demittatur perpendicularis BK (*Fig.* 10.) iisdem temporibus percurruntur spatia AC, AK: etenim gravitas absoluta CG est ad gravitatem relativam FG, ut longitudo plani inclinati AD ad illius altitudinem AB: ac proinde cum vires illæ sint constantes, erunt inter se, ut velocitates dato tempore genitæ ex sepius demonstratis. Jam ob angulum rectum in B erit AK : AB = AB : AD; quare AK erit ad AB, ut velocitas per planum AK ad velocitatem per planum AB eodem tempore genitam. Igitur spatia AK, AB eodem tempore percurruntur. Inde autem statim patet, æqualia esse in circulo descensuum tempora per chordam quamlibet, et per diametrum verticalem; ac proinde æqualia descensuum tempora per chordas singulas. Et quidem cum angulus K sit rectus, per puncta tria A, K, B describi poterit circulus, cujus diameter erit AB, chordæ autem erunt AK, BK; ac proinde diameter verticalis, et chorda AK, vel BK eodem tempore describentur. Hæc autem ratiocinatio valet in circumferentiæ puncto quolibet, cum angulus semidiametro insistens sit semper rectus: quare chordæ singulæ eodem tempore percurruntur. 2. tempus, quo corpus C descendit ex A in D, est ad tempus, quo cadit ex altitudine perpendiculari, ut AD ad AB. Nam ob motum uniformitèr acceleretum AD est ad AK, ut quadratum temporis per AD ad quadratum temporis per AK, vel AB. Sed (ex elementis Geometriæ) AD est ad AB, ut AB ad AK, et $AD2 : AB2 = AD : AK$. Igitur quadratum temporis per AD est ad quadratum temporis per AK, ut AD2 ad AB2: ergo tempus descensus per AD est ad tempus descensus per AK hoc est per AB, ut AD ad AB. 3. tempora descensuum per plana quotlibet inclinata ejusdem altitudinis sunt inter se, ut planorum longitudines. Nam tempus per AD est ad tempus per AB, ut AD ad AB; simili modo tempus per AM est ad tempus per AB, ut AM ad AB; ac proinde tempus per AD est ad tempus per AM, ut AD ad AM. 4. si corpus descendat per plana quotlibet inclinata AD, AM ejusdem altitudinis, velocitates in punctis M et D acquisitæ æquales sunt inter se, ut velocitates acquisitæ in descensu perpendiculari per AB. Cum enim spatia AB, AK motu uniformitèr accelerato percurrantur, velocitas acquisita in B erit ad velocitatem acquisitam in K, ut $\frac{2AB}{T}$ ad $\frac{2AK}{t}$, reducendo motum uniformitèr acceleratum ad motum uniformem, quod fie-

fieri posse jam demonstravimus, sumpto scilicet spatio duplo motu uniformi eodem tempore percurso. Jam vero ob tempora T, t æqualia, et numerum constantem 2, erit velocitas in B ad velocitatem in B ut AB ad AK, vel ut AD ad AB, ob triangula similia AKB, ABD. Sed quadratum velocitatis in D est ad quadratum velocitatis in K, ut AD ad AK, et præterea (ex elementis Geometriæ) AD : AB = AB : AK: quare AD: AK = AB2 : AB2 : ergo quadratum velocitatis in D est ad quadratum velocitatis in K, ut AD2 ad AB2 ; ac proinde velocitas acquisita in D est ad velocitatem acquisitam in K, ut ad AD ad AB, vel ut velocitas acquisita in B ad velocitatem acquisitam in K : ergo velocitas in D æqualis est velocitati in B. Simili ratiocinatione velocitas in M æqualis demonstratur velocitati in B : ac proinde et velocitati in D : atque demonstratio valet de alio quolibet planorum numero. His quatuor numeris comprehendimus præcipuas corporum per plana inclinata descendentium leges, eas scilicet, quæ ad sequentem articulum intelligendum necessariæ omnino sunt.

AR-

ARTICULUS III.

De motu curvilineo.

I.

DEmonstratum est jam, ubi virium compositionem, et resolutionem explicavimus; nullam curvam vi unica describi posse, sed requiri saltem vires duas diversæ naturæ, quæ scilicet rationem perpetuò variabilem inter se habeant, Evidens est, infinitum à Geometris considerari posse virium ordinem, ac proinde, et curvas numero infinitas; at Physicis considerare satis est illas virium rationes, quæ in rerum natura generatim obtinent. Itaque duas in hoc articulo distinguemus motuum species; alli sunt motus *liberi*, corporum scilicet, quæ semel mota sibi deinde libere permittuntur; alii autem sunt motus *son liberi*, corporum nempe, quæ impedimento aliquo retinetur. Ad primam motuum speciem pertinet corporum projectilium motus; ad alteram autem pertinet motus pendulorum. De hac duplici motuum specie ex ordine tractabimus, premiso principio, ex quo universa pendet curvilineorum motuum doctrina.

Consideretur latus infinitesimum curvæ AB, AB, per quod labatur corpus B velocitate qualibet finita expressa per BC. (*Fig.* 12.) Jam ubi corpus pervenit in C, viam flectit per CD, ita ut producto latere BC, angulus externus BCM sit infinite parvus. Potest enim curva quælibet considerari tamquam composita ex planis inclinatis numero infinitis, et infinite parvis, quorum proinde inclinatio debet esse infinite parva, ut planorum inclinaturum series abeat in curvam continuam. Jam vero latus CD se habet tamquam obstaculum uniformem corporis motum secundum directionem BC retardans: quare vis finita BC dividi debet in vires duas, unam secundum directionem BN, vel CD lateri CD parallelam, et alteram BM vel NC perpendicularem ad CD. Sola infinita expressa per BN corpus describit latus CD eodem tempore, quod describeret latus BC, ideoque æquales sunt CD: et BN motu uniformi eodem tempore percursæ, quæ quidem omnia manifesta sunt, si revocentur in memoriam, quæ de virium compositione, et resolutione demonstrata sunt. Porro in hac demonstratione ponitur, abesse vim omnem elasticam, et resistentiam quamlibet. Est autem vis expressa per NC, vel BM quantitas infinitesima primi ordinis, cum sit sinus anguli infinitesimi BCM, cujus radius

dius est BC exprimens vim finitam ; vis autem NC tota consumitur in premendo latere CD, nihilque confert ad velocitatem per curvam. Igitur velocitas corporis B per latus CD est ad illius velocitatem per latus BC, ut BN ad BC. Jam centro B radio BN describatur arcus NI, erit BI=BN, ac proinde CI exhibebit velocitatem amissam. Sed arcus NI considerari potest tamquam recta infinite parva ex angulo recto N in hypothenusam BC perpendiculariter demissa : ergo NC est media proportionalis inter CB, et CI ; sed CB est quantitas finita ; NC infinitesima primi ordinis; ergo CI est infinitesima ordinis secundi, ac proinde corpus curvam describens ex latere infinitesimo in aliud contiguum transiens, non amittit nisi velocitatis partem infinitesimam ordinis secundi, ac proinde per finitum curvæ arcum descendens amittet dumtaxat velocitatis partem infinitesimam ordinis primi, hoc est, nullam ; atque hoc est universalissimum curvilinei motus principium. Jam primam motuum speciem consideremus.

II. Ex præalti montis vertice explosus intelligatur globus missilis secundum directionem horizontalem ; alia quælibet directio considerari posset, sed directionem hanc omnium simplicissimam, et commodissimam nunc adhibere satis sit. Jam si vis globo missili impressa fingatur infinite parva, vi gravitatis in terram globus perpendiculariter recideret; si autem vis impressa ponatur infinite magna, secundum directionem horizontalem globus perpetuò movebitur. Hæ sunt duæ extremæ hypotheses, inter quas infiniti alii casus esse possunt, sed eos dumtaxat exponemus, qui ad Physicam pertinent. I. Globus missilis projiciatur per rectam horizontalem AB (*Fig.* 13.) et interea vi gravitatis constanti perpendiculariter urgeatur secundum directionem AR. Jam recta AB divisa intelligatur in partes innumeras æquales, ut AE vi semel impressa temporibus æqualibus descriptas, rectæ illæ representare poterunt tempora; sunt enim tempora inter se, ut spatia motu uniformi descripta; si autem ad singula divisionum puncta ducantur rectæ ad horizontem perpendiculares, ut QE, ita ut rectæ illæ sint, ut quadrata rectarum AE; spatia singulis temporibus motu uniformiter accelerato descripta per easdem rectas exhibentur. Itaque corpus motu composito describet diagonalem virium AE, EQ, cujus hæc erit natura, ut nempe rectæ EQ, vel AH semper sint, ut quadrata rectarum AE vel QH, ductis scilicet AE, HQ, et AH, EQ parallelis; sed hæc est

est natura curvæ, quam *Parabolam Apollonianam* vocant Geometræ, ut nempe *abscissæ* semper sint ut quadrata *ordinatarum*, ergo gravia projecta in hac gravitatis lege Parabolam describunt. Evidens autem est, eamdem manere demonstrationem, etiamsi projectionis directio fuerit ab horizonte utcumque obliqua; tota enim demonstratio pendet ex duorum motuum compositione, quorum unus est uniformis, alter autem uniformiter acceleratus. Porro quæcumque sit projectionis ad horizontem inclinatio, eadem manet motuum illorum natura, ac proinde et eadem natura curvæ. II. Luna revolvitur circa terram, ideoque globi missilis instar projecta intelligi potest secundum directionem tangentis orbitæ, et interim vi centripeta tendens in terram. Verum in primo casu ob exiguas à tellure distantias gravitatem tamquam constantem fingere, illiusque directiones velut parallelas habere licet, quæ quidem hypothesis ad corpora cœlestia transferri non potest; cùm ob magnas distantias, neque constantem gravitatem, neque illius directiones velut parallelas considerare liceat. Jam evidens est, globum juxta telluris tangentem minori velocitate emissum describere arcum minorem, majore autem velocitate emissum describere arcum minorem, majore autem velocitate arcum majorem, atque aucta adhuc velocitate longius pergere, ita ut prætergredi possit totum telluris ambitum, et ad montem, unde projectus fuerat, redire. Fingamus jam corpora quælibet de regionibus altioribus projici, et ad terram, vel Solem, aut quodlibet punctum vi centripeta tendere pro varia corporum velocitate, et vi gravitatis describentur arcus vel concentrici, vel excentrici, atque in suis orbitis pergent corpora ad modum Planetarum per cœlos vagari. Sed hæc brevitèr annotata sint; de hoc argumento jam aliqua diximus attractionis doctrinam explicantes, atque rursus dicendi recurret locus in Astronomia; de motu pendulorum jam paulo fusius dissserendum.

III. Pendulum vel *simplex* est, vel *compositum*; pendulum simplex appellatur filum puncto aliquo suspensum, quod tamquam inflexibile, et gravitatis expers consideratur, altera autem extremitate pondere onustum: si filum plura habeat annexa pondera, pendulum compositum appellatur: penduli *oscillatio*, aut *vibratio* appellatur motus alternus, quo virga penduli circa fixum suspensionis punctum itum, et reditum absolvit: si autem pendula duo suas vibrationes eodem tempore absolvant,

pen-

pendula illa dicuntur *isochrona*. Si pendulum aliquod simplex CP. (*Fig.* 14) in linea verticali constituatur, in puncto infimo P quiescit, ideoque punctum illud vocatur punctum *quietis*. At si pendulum attollatur ad punctum A, et deinde sibi permittatur, motu accelerato relabetur in P. Et quidem penduli motum considaremus in puncto aliquo N, atque ponderis gravitas absoluta repræsentetur per NG; hæc dividi poterit in vires NH, NI, quarum prima cum tota dirigatur ad punctum suspensionis C, ipsius puncti resistentia omnino extinguitur; altera autem, quæ est secundum directionem tangentis, exprimit gravitatem relativam, atque vi illa corpus motu accelerato descendit ad punctum P, ubi vis NI omnino evanescit. In hoc tamen puncto quiescere non potest pendulum; sed per vim inertiæ acquisitam servans velocitatem ascendit versus B; ita tu æquales sint arcus AP, PK, descendendo et ascendendo descripti, atque etiam æqualia descensus et ascensus tempora. Verum dum corpus ex P versus K ascendit, perpetuò agit vis relativa gravitatis secundum directionem oppositam NI, ac proinde in puncto b extinguit omnes velocitatis gradus acquisitos; quare corpus propria gravitate relabitur, non secus, ac ex puncto A primum descendit. Hæc autem omnia manifesta sunt ex articulo præcedenti et ex numero primo articuli hujus.

IV. Tempora descensuum per curvas similes, et ad horizontem similiter inclinatas, esse in ratione subduplicata laterum homologorum, ex locis citatis facile etiam colligitur: etenim latera minima HG, GF, FD, (*Fig.* 15.) itemque hg, gf, fd exhibeant infinitesimas curvarum partes similes, et ad horizontem similiter inclinatas; jam tempus per GH est ad tempus per hg, ut $\sqrt{GH}$ ad $\sqrt{hg}$. Similiter tempus per GF est ad tempus per gf, ut $\sqrt{GF}$ ad $\sqrt{gf}$, sed (per hypothesim) $HG : hg = GF : gf$; ergo $\sqrt{HG} : \sqrt{hg} = \sqrt{GF} : \sqrt{gf}$; ac proinde tempus per GF est ad tempus per gf, ut $\sqrt{HG} : \sqrt{hg}$. Simili ratione tempus per FD est ad tempus per fd, ut $\sqrt{HG} : \sqrt{hg}$; ergo tempus totum per $HG + GF + FD$ est ad tempus totum per $hg + gf + fd$, ut $\sqrt{HG} : \sqrt{hg}$, hoc est, in ratione subduplicata laterum homologorum.

In-

Inde autem pendet universa pendulorum per circulares arcus excurrentium doctrina. I. Velocitas penduli CB in puncto infimo B, est ut chorda BK (*Fig.* 16.) arcus KDB ex puncto K descripti: etenim ducatur KF ad CB perpendicularis, erit velocitas penduli in descensu per arcum KDB acquisita æqualis velocitati, quam corpus acquireret cadendo ex altitudine FB, ac proinde ut $\overline{FB}$; sed (ex elemetis Geometriæ) BF: BK = BK : BA, ideoque $BF \times BA = BK^2$; ergo cum sit BA constans, erit BF, ut BK^2; ideoque $\sqrt{\overline{BF^2}}$. est, ut BK: quare velocitas acquisita in B, quæ est ut $\overline{BF}$, erit etiam ut BK, nempe ut chorda; quæ quidem proprietas circuli eximiæ est utilitates, præsertim ubi ad experientiam revocandæ sunt conflictuum leges in proximo articulo demonstrandæ. 2. si pendula duo arcus similes describant, erunt vibrationum tempora in ratione subduplicata longitudinum pendulorum, ut ex præcedenti demonstratione patet s sed numerus vibrationum eo major est, dato tempore, quo minus est vibrationis unius tempus; seu quod idem est, numeri vibrationum sunt in ratione subduplicata inversa longitudinum pendulorum : quare datis duorum pendulorum longitudinibus , datoque vibrationum numero tempore aliquo ab alterutro pendulo peractarum , invenietur numerus vibrationum eodem dato tempore ab altero pendulo confectarum dicendo : longitudo penduli unius est ad longitudinem penduli alterius , ut quadratum numeri vibrationum dati ad quadratum numeri vibrationum quæsiti ; et viceversa invenietur penduli longitudo talis , ut datum quemlibet vibrationum numerum dato tempore perficiat. 3. si pendula duo fuerint isochrona, erunt vires gravitatis acceleratrices ut pendulorum longitudines. Sunt enim vires constantes , ut spatia iisdem temporibus descripta , spatia autem in hoc casu sunt similes pendulorum arcus , qui proinde sunt , ut longitudines pendulorum ; quare et vires gravitatis in eadem sunt longitudinum ratione ; quod quidem maxime valet ad definiendum gravitatis incrementum , vel decrementum in variis terræ locis , ut deinde explicabimus.

V. Hactenus consideravimus pendulum simplex , quale nullum existere potest in rerum natura ; nulla enim est virga , quæ gravitate omni careat , ac proinde pendula omnia sunt composita. Rem breviter exponemus , quantum difficultas patitur. Si bi-

bina pondera filo suspensa in diversa à puncto suspensionis distantia suas oscillationes peragant, virgaque ipsa concipiatur inflexibilis sine pondere, et sine vi inertiæ; pondus, quod puncto suspensionis propius est, suas oscillationes citius absolvere debet; contra autem tardius, quo à puncto suspensionis remotius est in ratione scilicet subduplicata distantiarum. Id quidem contingeret, si pondera oscillationes suas seorsim peragerent; verum quia penduli virga omnino rigida, et inflexibilis ponitur, suas oscillationes eodem tempore pondera absolvent, atque ita componentur inter se velociores, et tardiores ponderum motus, medio quodam tempore suas vibrationes perficere debeant. Jam si inveniatur punctum aliquod, in quod bina pondera collecta suas vibrationes eodem tempore perficerent, illud punctum dicitur *centrum oscillationis*, ejusque à puncto suspensionis distantia erit longitudo penduli simplicis pendulo composito isochroni. Quod autem diximus de binis ponderibus, idem quoque intelligi potest de alio quolibet ponderum numero, ac proinde et de infinitis ponduscculis per virgam penduli dispersis, in quo quidem casu gravitatis fili ratio habetur. At si filum sit subtilissimum, ita ut illius pondus cum ipso globi

bi

bi appensi pondere comparatum sit valde exiguum, et præterea si valde exigua sit globi diameter cum fili longitudine comparata, jam pendulum velut simplex considerari potest. Quia vero sublimior Geometria exhibet generales formulas, quarum ope invenitur centrum oscillationis, ideoque pendulum compositum ad simplex reducitur, satis nobis fuit penduli simplicis doctrinam explicasse; alia autem plurima, quæ in hoc articulo brevius diximus, ex sequenti conclusione magis fient manifesta.

CONCLUSIO.

Gravitatis terrestris inæqualitatem demonstrant accuratissime instituta pendulorum experimenta.

Demonstratur: si observetur longitudo penduli isochroni in duobus locis, erunt vires in iis locis, ut pendulorum longitudines, ex antea demonstratis. Licebit ergo gravitatis incrementum perspicere, diligenter observata in variis terræ locis penduli isochroni longitudine. Quanta autem in capiendis hujusmodi experimentis adhiberi debeat diligentia, repetendum est ex monumentis Parisiensibus anno 1735. nihil enim accuratius, ac religiosius tradi potest, quam quod ibidem hac in re præscripsit Vir Clarissimus Dominus de Mairan. Hæc autem præcipue curanda monet. 1. accura-

ta

ta habenda est mensura pedis Parisiensis, vel altera quælibet mensura, cujus ad pedem parisiensem nota sit ratio, ita ut decima, et, si fieri potest, centesima lineæ parte non aberret. 2. parari debet globus exacte rotundus, diametro circitèr unius pollicis, ex materia bene compacta. 3. adhibendum est filum flexibile, nec ita complicatum, ut oscillationes laterales mutet in conicas, quas quidem diligenter evitari multis de causis expedit. Optimum omnium, et jam fere ab omnibus adhiberi solitum, est filum, quod paratur ex foliis *aleos*. Fili autem pondus si fuerit millesima pars ponderis globi, in pendulo pedum 3. linearum 8. attollit centrum oscillationis, una quartadecima parte lineæ unius; in aliis casibus ea elevatio erit quam proxime, ut longitudo fili directa, et ut pondus globi inverse, quod demonstrat vir prælaudatus. 4. summa utendum est diligentia in capienda distantia puncti suspensionis à centro globi, vel ab imo globi puncto; habita autem distantia puncti suspensionis à centro, si ei addantur $\frac{2}{5}$ tertiæ proportionalis post ipsam, et globi semidiemetrum, habebitur penduli longitudo. 5. demum paratum sit oportet horologium accuratum,

quod

quod dirigatur per appulsum stellæ alicujus ad telescopium immotum, vel Solis ad lineam meridianam; oscillationes autem maxima cura, et sine ullo erroris periculo numerandæ sunt.

Tanta autem adhibita diligentia, quæ in re subtilissima omnino quidem necessaria est, jam certo definitum habemus, penduli isochroni mensuram breviorem fieri pergendo à Polis ad Æquatorem, contra vero longiorem ab Æquatore ad Polos. Ita ergo comperta est gravitatis inæqualitas in diversis terræ locis, ut nemo sit, qui de ea dubitet. Non defuerunt quidem doctissimi etiam viri, qui observationibus per Europam institutis, gravitatem ubique æqualem se invenisse, profiterentur; verum quod minus felicitèr successerit observatio, summo consensu nunc tribuunt Physici iis methodis, quæ tum in usu erant minus perfectæ, et perpolitæ, ita ut exiguum gravitatis discrimen tam exiguis locorum intervallis debitum deprehendere nequaquam licuerit. Hinc observationes multo accuratioribus instrumentis institutæ sunt in plurimis, et admodum dissitis terræ locis; omnium autem observationum fide certo constat gravitatis inæqualitas. Hìc autem longius esset describere varias pendulorum longitudines, quarum tabulas videre re est in eximiis operibus, quæ de telluris figura paucis ab hinc annis in lucem prodiere.

Quamvis ad determinandam gravitatis inæqualitatem solius penduli isochroni mentionem fecerimus, evidens tamen est, pari successu adhiberi posse pendulum non isochronum: etenim ex doctrina motus uniformitèr accelerati in præcedenti articulo explicata, spatia crescunt, ut quadrata temporum, eadem manente vi acceleratrice; si autem vires acceleratrices diversæ fuerint, seorsim tamen consideratæ uniformes maneant; quo major est vis acceleratrix, eo majus est spatium dato tempore percursum, ac proinde spatia sunt, ut quadrata temporum, et vires acceleratrices conjunctim; ideoque vires acceleratrices sunt, ut spatia descripta directè, et quadrata temporum inversè. Jam vero in casu pendulorum spatia sunt, ut longitudines pendulorum; erunt ergo vires gravitatis, ut longitudines pendulorum directè, et quadrata temporum oscillationum inversè, Igitur manente penduli longitudine, vires gravitatis sunt, ut quadrata temporum oscillationum reciprocè. Itaque patet, ejusdem penduli ope gravitatis comparationem in diversis terræ locis institui posse; tanta enim diligentia numerus os-

cil-

cillationum dato tempore determinatur, ut ne dimidiæ quidem oscillationis error committi possit. Hac methodo gravitatis inæqualitas primum detecta est à *Richero*, cujus observationes jam antea commemoravimus.

Ut tota hæc quæstio maximi sane momenti in bono lumine collocetur, meminisse oportet, duplicem considerari posse gravitatem: aliam nempe *primitivam* nulla vi centrifuga perturbatam, aliam autem vi centrifuga imminutam, quam gravitatem *actualem* appellare licet; totam rem brevitèr explicabimus, ut facere solent, qui telluris circa axem rotationem admittunt. Sit AB diametèr Æquatoris, cujus P, p Poli, sitque DE (*Fig.* 17.) semidiameter paralleli cujusvis. Quoniam in circulari motu vis centrifuga dirigitur ad partes circuli descripti centro oppositas, in Æquatore A dirigetur ad partes oppositas centro terræ C per CA; in parallelo D ad partes oppositas centro paralleli E per ED. Jam vero gravitas ubique dirigitur ad centrum terræ C, saltem quoad sensum, nimirum in A per AC, in D per DC. Præterea directio CA est penitus contraria directioni AC; at patet ex motuum compositione, et resolutione directionem vis centrifugæ per ED referendam esse ad directiotionem vis gravitatis per CD, nempe vim centrifugam in D exprimat recta DO, hæc resolvatur in ON ipsi CD normalem, et in DN secundum directionem ipsius CD. Hæc sola pars vis centrifugæ opponitur directioni gravitatis in D. Jam facile invenitur ratio vis centrifugæ in D secundum directionem DN ad vim centrifugam in A: etenim exprimat AI vim centrifugam in A, erit ex demonstratis de vi centrifuga AI ad DO, ut AC vel DC ad DE. Præterea ob triangulorum DCE, ODN similitudinem, erit iterum CD ad DE, ut DO ad DN, ideoque compositis rationibus CA2 ad DE2, ut AI ad DN. Ex hac demonstratione æstimari potest effectus vis centrifugæ in quolibet terræ loco; patet autem, vis centrifugæ effectum talem esse, ut gravitati primitivæ minus detrahat pergendo ab Æquatore ad Polos, et quidem duplici de causa; tum quia decrescit ipsa vis centrifuga, quæ in Polo evadit nulla, tum quia ejus directio gravitatis directioni minus directe opponitur. Ex his etiam facile dederminatur ratio vis centrifugæ ad gravitatem primitivam. Si fingamus corporis alicujus sub Æquatore gravitatem omnem sublatam, jam posito rotationis motu corpus illud per telluris tangentem elaberetur, ideoque minuti unius secundi intervallo

su-

supra ipsum telluris globum attolleretur tota illa altitudine, quæ est inter tangentem, et arcum minuti unius secundi tempore descriptum, quæ quidem lineola tangente, et arcu comprehensa ex elementis Geometriæ facile invenitur. Hæc exprimet vim centrifugam sub Æquatore; addi autem debet spatio, quod corpora sub Æquatore minuti unius secundi tempore libere descendendo percurrunt, atque ita habebitur gravitas primitiva sub Æquatore, quæ proinde conferri poterit cum vi centrifuga data, atque ita dicendum de aliis quibuslibet terræ locis. Sed hæc paucis indicasse sufficiat; convenientius enim explicabuntur, ubi de figura telluris; in hac conclusione solam gravitatis variationem demonstrandam suscepimus.

Objic.: doctrina pendulorum hactenus explicata omnem excludit medii resistentiam; at certissimum est pendula impedimentis plurimis obnoxia esse. Et quidem aeris resistentiam maxime retardantur; in ipso suspensionis puncto mutuus fit attritus, atque hinc oritur aliud omnino inevitabile impedimentum. Itaque sic argumentari licet: gravitatis variationem non demonstrant experimenta illa, quæ nulla sufficienti diligentia institui possunt; atqui cet.: ergo cet.

Resp.

Resp. C. maj. N. min. Aeris, aut mutui attritus impedimento tribui non potest differentia, quæ in pendulorum longitudine observata est. Et quidem iisdem impedimentis afficiuntur pendula tum sub Æquatore, tum versus Polos. Neque est, quod dicant, aliqua fortasse de causa majorem esse aeris resistentiam versus Æquatorem, ac proinde et majorem penduli retardationem. Et certe in tam exigua velocitate exigua omnino esse debet, et fere nulla aeris resistentia, quæ si quid agit, ubique eodem fere modo motum retardat, et potius minus sub Æquatore ob minorem aeris densitatem, majori scilicet calore vigente. Præterea etiam diligentissimi viri, qui pendulorum longitudinem observarunt, nullam prætermisere diligentiam, ut penduli retardationem ex aeris resistentia oriundam cognoscerent, adhibitis quoque accuratissimis barometris, quæ atmosphære variationem indicarent; sed tanta diligentia necessaria quidem fuit, ut accurate, et adamussim definiretur vera penduli longitudo, mediocris autem diligentia satis fuit, ut variatio penduli innotesceret; tanta enim est; ut observationibus etiam sine maxima subtilitate institutis sese conspicuam præbeat. Præterea omni caret verisimilitudine, observationes omnes in eumdem errorem perpetuò conspirare, quod nempe penduli isochroni longitudinem per gradus minorem faciant, pergendo à Polis ad Æquatorem. Porrò in præsenti conclusione generatim dumtaxat agimus de gravitatis inæqualitate; rem vero accuratius determinare pertinet ad Geographiam, ubi telluris figuram investigabimus.

Instabis 1.: in pendulorum observationibius non apparet summus ille consensus, qui tamen ad fidem faciendam necessarius omnino est. Circumferuntur plurimæ observationum tabulæ, quæ quidem à se invicem non parum discrepant. Imo Picardus per totam Galliam, et *Vanrburgi* eamdem invenit penduli longitudinem. Unde sic concludi potest: gravitatis variationem non demonstrant observationes illæ, quas erroris suspectas reddit earum dissensus; atqui cet.: ergo cet.

Resp. Dist. maj.: erroris suspectæ sunt observationes, quoad veram, et accuratam pendulorum longitudinem, transeat. quod longitudinem penduli generatim consideratam, N.: quare distincta min. N. cons. Re quidem vera plurimos observationum catalogos inter se minime conspirantes exhibuerunt doctissimi viri, sed quamvis ob rei difficultatem in eadem non consentiant penduli longitudine, in id tamen cons-

conspirat omnes, ut in præcedenti responsione observavimus, quod nempe pendulum ostendant brevius sub Æquatore, longius versus Polos. Quod autem *Coupletus* eamdem in universa Gallia invenerit penduli longitudinem, referri debet nimis exiguæ locorum distantiæ, atque etiam instrumentis minus accuratis pro ea, quam tales observationes postulant, subtilitate. Dixi autem *transeat*: tanta enim diligentia his nuperrimis annis itarata fuerunt experimenta, ut miranda omnino sit tanta consensio; tantillas enim habent differentias, quas nulla diligentissimorum virorum industria vitare potest.

Instabis 2.: durissima quæque metalla vi caloris extendi, frigore autem contrahi, certissimum est. Notissimum est Physicis instrumentum, quod *Pyrometrum* dicitur: hæc est illius structura. Constat ex lamella metallica, cujus extremitas una in denticulos desinit: hi autem denticuli axis perpendicularis cavitatibus, seu canaliculis inseruntur; axis autem rotæ horizontalis dentes ingreditur. Subtus lamellam metallicam aptata sunt ellichnia, quæ admoto igne flammam concipiunt. Rebus ita dispositis, lamella distenditur, illiusque proinde denticuli axis cavitates per vices subeunt et eumdem axem convertunt; revolvi autem non potest axis, nisi moveatur quoque rota superior horizontalis huic contigua: quare si centro rotæ aptatus fuerit indiculus, qui circumferentiam in gradus, graduumque partes divisam libere percurrat, ipsam lamellæ dilatationem ex graduum percursorum numero æstimare licebit. Tanta autem est dilatatio, ut circumferentiam integram indiculus aliquando describere videatur. Si vero ad calorem extinguendum aqua lamellam perfundas, ad pristinum locum retogrado motu redibit indiculus, ideoque et lamella justum contractionis statum recuperabit. Eamdem dilatationem accuratissimis observationibus expertus est Clarissimus *de Mairan*, soli igni, et aquæ ebullienti expositis metallorum virgis. Igitur probabile est, caloris vi sub Zona torrida crevisse longitudinem penduli, quod idcirco lentius moveri debuit; idem vero pendulum Parisios translatum rursus contrahebatur. Unde sic gravitatis inæqualitati referri non debent experimenta illa, quæ in alternam pendulorum dilatationem, et contractionem refundi possunt; atqui cet.: ergo cet.

Resp. N. min. Observatam penduli variationem caloris vi tribuendam non esse, indubitatum omnino est. Virga ferrea pedum sex æstivo Soli meridiano diu exposita, experimentis diligentèr institutis invenventa est maior, per duas tertias partes lineæ; ideoque per decimam octavam partem pollicis Parisiensis. Virga pedis unius ad ignem candefacta per dimidiam excrevit lineam. Primus calor ex Sole æstivo meridiano conceptus satis quidem vehemens in virga penduli pedum trium induceret unam tertiam lineæ partem. Altèr autem calor vehementissimus, igne scilicet excitatus, lineæ unius cum dimidia variationem exhiberet. At pendulum, quo utebantur diligentissimi viri, multo minorem calorem debuit concipere, nec igni expositum, nec solaribus radiis; imo caloris effectus summa diligentia impediebatur, vel redacto conclavi, in quod experimenta instituebantur, ad calidioris loci temperiem, quod igne admoto, et adhibito Thermometro in Laponia præstitit Dominus *de Maupertuis*, vel notando oscillationum discrimen singulis gradibus caloris debitum, quod Thermometri ope diligentèr perfecit *Grahamus*; hac enim adhibita diligentia variatio calori debita à tota penduli inæqualitate tuto detrahebatur His autem præsidiis exercitatissimi viri in plurimis locis plures observationes habuerant. *Torneæ* in Laponia inventa est longitudo penduli ad minuta secunda oscillantis pedum 3, linearum $9\frac{1}{100}$

Parisiis pedum 3, linearum 8, $\frac{67}{100}$, sub Æquatore pedum 3, linearum 7 $\frac{21}{100}$. Hanc autem tanta differentiam vi caloris tribuendam non esse, ex hactenus dictis facile patet.

Instabis 3. quamvis gravitatem minorem sub Æquatore ostendant pendulorum observationes, inde tamen minime colligi potest gravitatis inæqualitas, ab Æquatore ad Polos certam servans legem: etenim fingamus gravitatem, qualem requirit Nevvtoniana hypothesis, in ratione reciproca duplicata distantiarum à singulis materiæ particulis, fingatur quoque terra sphærica homogenea, ac dematur sub Æquatore B sphæra materiæ, cujus radius BI (*Fig.* 18.) contineat milliaria quatuor; jam detrahetur in B pars circitèr millesima gravitatis. Nam terræ semidiameter CB est milliarium circitèr 4000. et attractio in sphæram CB est ad attractionem in BI, ut BC ad BI, sive ut 1000. ad 1, quod antea demonstravimus; at in B nullum observari poterit decrementum gravitatis. Est enim attractio puncti F in sphæram IB, ad attractionem puncti B in eadem, ut BI2, ad FI, siva proxime ut ut IB2 , ad 2BC2 ; sive 16. ad 32000000; nimirum decrementum gravitatis in F , erit $\frac{1}{2000000}$ decrementi in B , et $\frac{1}{2000000000}$ gravitatis totius. Si jam sphære BI transferatur in F , eodem argumento ibi crescet pars millesima gravitatis , nihil in B , eritque differentia inter B et F pars quingentesima gravitatis. Si dupla sphæræ diameter adhibita fuisset , prodiisset differentia dupla , nimirum pars ducentesima , et quinquagesimaquarta , qualis fere per observationes pendulorum invenitur ; quamvis autem gratis omnino fingatur sub Æquatore in B existere cavernam ingentem , cujus diameter sit milliarium octo : certum tamen est multo minus materiæ sub Æquatore , quam sub Polis contineri ; nam ob ingentem calorem perpetuum corpora omnia rariora sunt versus Æquatorem ; at versus Polos perpetuis nivibus , et glacie rigent omnia. Præterea observationes pleræque in America factæ sunt in locis maritimis , immenso Oceano cinctis , cujus et magna est profunditas et ingens extensio; reliquæ in Europa observationes institutæ sunt in locis à mari remotioribus , et supra maris superficiem ita elatis , ut illa major à centro distantia minus detrahat gravitatì, quam addat tanta materiæ quantitas late circumfusa. Ex his omnibus sic aliqui solent argumentari. Certum gravitatis incrementum, vel decrementum non ostendunt inæqualitates illæ, quæ recensitis causis tribui possunt; atqui cet.: ergo cet.

Resp. transeat maj. N. min: ad majorem dico *transeat*, in præsenti enim quæstione sermo est dumtaxat de grauitatis inæqualitate, non vero de hujus inæqualitatis lege et causa; at pro mero figmento certe haberi debent in locis quibusdam cavernæ, in locis aliis montes; ecquis enim facile crediderit per universam tellurem tali ordine montium, cavernarumque seriem distributam fuisse, ut certis pendulorum legibus accuratè respondeat? Et quidem observationes non tantum sub Æquatore et prope polos, sed etiam in locis aliis plurimis, et longius à montibus fuerunt institutæ. Tandem versus Æquatorem eminent altissimi montes, quorum ea fuit vis attractiva, ut pendulum à perpendiculari directione septem secundorum intervallo dimovere potuerit, ut antea observavimus. Verum juxta objectionis hypothesim tellus sub Æquatore montibus eminere non debet, sed contra cavernis ingentibus hiare. Hic autem data iterum occasione de montium attractione pauca revocabimus, ex quibus intelligagatur, altioribus quoque montibus exiguam omnino vim tribuendam esse, illosque minimam continere materiæ quantitatem, si cum massa telluris conferantur. Ponamus montem tria milliaria altum, qualis est circiter altitudo montis *Chimboraco*. Hunc montem exhibeat sphæra D in superficie telluris, quam tangat recta CLD, (*Fig.*19.) erit gravitas in L in tellurem ad gravitatem in D in sphæram, ut sphærarum radii (ex demonstratis) gravitas autem in L in tellurem ad gravitatem in D in eamdem in ratione reciproca duplicata distantiarum LC, DC, à centro ejusdem, ac proinde si DH exprimat gravitatem in terram in D, erit BC : LC2. == LC : DH, et completo rectangulo ODHA, dirigetur gravitas per DA ex motuum compositione. Jam vero in triangulo rectangulo DHA dicatur: ut DH est ad HA, ita radius ad tangentem anguli HDA; quia autem data est semidiameter telluris, quæ minor est milliariis parisiensibus 3940, ac proinde et ipsa DH, dabitur angulus HDA qui invenitur 1''. 18''. Talis ergo esse deberet aberratio penduli prope montem *Chimboraco*, quæ tamen aberratio per observationem prodiit dumtaxat 7'. Hic afferre placuit demonstrationem antea omissam, principiis necesariis nondum constitutis. Hinc patet ingentes etiam

etiam montes minimam habere densitatem pro ratione voluminis: quare certum est, montes illos cavitatibus seu cavernis hiare. Illæ autem telluris inæqualitates, quæ tantæ nobis videntur, et minimæ tamen sunt cum tota telluris massa comparatæ, probabilissime referendæ sunt in vehementiores aliquas telluris confusiones, quarum effectum ultra superiores telluris partes propagatum non fuisse, verisimillimum est. Itaque ex his omnibus colligitur ad explicandam gravitatis inæqualitatem sine ulla ratione fingi montes et hiatus certa lege per universam terram dispersos. Ceterum quamvis sæpè dixerimus, gravitatis legem per observationes pendulorum hìc à nobis non determinari, nemo tamen putet, id contrarium esse constitutæ antea attractionis legi in ratione distantiarum duplicata decrescentis: etenim hanc attractionis legem demonstravimus inter corpora cœlestia magnis intervallis à se invicem remotissima, in quibus proinde diversam densitatem negligere licuit. Gravitatem terrestrem in eadem quoque ratione decrescere ostendimus, sed gravitatem consideravimus in eodem dumtaxat telluris loco; nullam vero rationem habuimus illarum inæqualitatum quæ ex varia telluris densitate aliisque causis originem habere possunt. Tandem inæ-

qua-

qualitates illæ nihil repugnant demonstratæ attractionis legi, cum oriantur ex ipsa attractionis lege in ratione directa massarum et duplicata inversa distantiarum. Sed ut jam sæpe monuimus, fusior explicatio ad alium locum pertinet, ubi de figura telluris.

Instabis 4.: pendulorum observationes haberi non possunt nisi facta comparatione cum horologii motu. At horologia constant ex variis partibus, quæ singulæ impedimentis plurimis afficiuntur; humido vel arido cœlo magis vel minus lubricæ fiunt rotæ, modo velociores, modo tardiores; hinc fit ut pendulum horologii in longiores vel breviores arcus excurrat, ac proinde idem non servetur singularum oscillationum tempus. Tandem vitium aliud, quod in pendulo simplici jam notavimus, in horologiorum pendulis multo magis crescit ob partium multitudinem et varietatem, nempe pro varia cœli temperie mutantur, varieque extenduntur et contrahuntur plurimæ horologiorum partes; hinc mutatur centri oscillationis situs. Ex his omnibus ita concludi potest: in certis causis, et sine ulla lege variis tribui potest diversa penduli longitudo, si incertus omnino sit horologiorum usus, quantum in re tam subtili desideratur; atqui cet.: ergo cet.

Resp

Resp. C. maj. N. min. Re quidem vera horologiorum partes singulæ variis mutationibus sunt obnoxiæ; at comparatione diligentèr instituta inter horologii Solisque aut stellarum motum, innotescere facile potest an horologium errorem aliquem admittat. Præterea ad vitandam mutationem ex cœli temperie oriundam adhiberi debent artificia, de quibus jam supra mentionem fecimus. His horologiorum incommodis plurima parata sunt remedia. Grahamus celeberrimus instrumentorum artifex utilissimum sane tantis malis remedium excogitavit. In extrema penduli virga suspendit tubum mercurio plenum ita ut tamen in tubo spatioli aliquid superesset, per quod mercurius ipse caloris vi dilatatus cum virga intra tubum ascenderet, descendente interim tubo ipso, atque ita centrum oscillationes suo loco maneret. Est et alia ejusdem erroris corrigendi ratio: suspenditur pondus diversorum metallorum lamellis ita inter se connexis, ut dum altera lamella magis distenta ultra alteram itidem distentam pondusque deprimentem excurrit, ipsa pondus sursum attollat, et priori altitudini restituat, imo etiam non nihil majori, ita ut ipsius virgæ centri oscillationis descensus compensetur, totiusque penduli centrum oscillationis suo perstet loco. Neque hic hìc prætermittendum est aliud artificium non minus ingeniosum, quod paucis ab hinc diebus excogitavit peritissimus horologiorum artifex Parisiensis *Lepautius*. Accuratissimis observationibus notum sit oportet, quantum dilatetur virga metallica pro dato quolibet thermometri gradu; hos autem dilatationis gradus cepit *Lepautius* ex *Bougueri* et *Ellicotii* virorum diligentissimorum experimentis. Deinde curvam delineavit cujus radii in æquales virgæ dilatationibus semper forent proportionales, ita ut anguli quos radii singuli cum ipso divisionis initio continent, semper crescant, ut gradus thermometri. Id vero obtineri posse, evidens est descripto circulo, et in suos gradus diviso, non secus ac dividitur thermometrum, hoc est, in partes 40; nam Parisiis intra hos limites consistit altitudo liquoris in thermometro; patet autem hanc curvam imitari spiralem quam *archimedeam* à suo inventore dicunt Geometræ. Tandem compertum est, partem centesimam lineæ in dilatatione virgæ per horas 24 id efficere, ut pendulum retardet minuto uno secundo. Jam si radii centesima parte lineæ pro singulis divisionibus minuantur, manifestum est, punctum curvæ, quod quadragesimæ divisioni respondet, centro propius esse quadragenti centesimis partibus lineæ,

seu

seu duabus quintis lineæ, quam sit ipsum curvæ initium. Quæ cum ita sint, in descriptam curvam flectatur lamella metallica, eaque sub ipsa horologii suspensione collocetur: aptata etiam acu, quæ thermometri gradibus respondeat. Totum ergo negotium huc redit, ut pro tempore aliquo dato observetur gradus thermometri, curandumque ut acus eidem gradui respondeat. Hoc idem instrumentum alteri quoque graviori malo remedium affert. Rotarum cardines in horologiis oleo imbui solent; olei autem particulæ æstivo tempore vi caloris solutæ fluunt, tempore autem hiberno frigoris vi constringuntur et indurescunt. Hinc liberiores vel difficiliores sunt oscillationes. Verum cum malum istud ex eadem causa pendeat, nempe, ex gradu thermometri, idem quoque adhibetur remedium, augenda nempe est radiorum inæqualitas. Igitur non solum minui debet spiralis radius centesima parte lineæ, seu quadragesima parte circumferentiæ totius circuli, sed mulctari etiam debet quantitate huic alteri effectui debita, et per observationes cognita.

Superest tandem, ut de vibrationum inæqualitate aliquid adjungam. Re quidem vera horologiorum pendula in breviores longioresque arcus variis de causis sæpe ex-

cur-

currunt; verum arcus illos licet inæquales iisdem quam proximè temporibus describi demonstrant Geometræ; quod ut intelligatur, brevis sermo haberi debet de celeberrima quadam curva, quam *cycloidem* appellant, Cyclois est curva linea, quam describit punctum aliquod in circuli circumferentia pro lubitu assumptum, interea dum circulus totus super lineam rectam revolvitur. Hujus curvæ genesis repræsentari solet per imaginem clavi in rotæ superficie defixi; dum nempe rota per planum circumvolvitur, clavus in aere cycloidem percurrit: de prima cycloidis inventione acerrime certatum est circa annum 1643. inter *Torricellium* et *Robervallium*, illo primam cycloidis considerationem tribuente in Italia *Galilæo*, hoc autem in Gallia *Mersenno* nostro. Sed quidquid sit de illa concertatione quæ in rixas apertasque inimicitias deinde exarsit, solam rei utilitatem, minime vero gloriam considerabimus. Plurimas inter et quidem elegantissimas cycloidis proprietates unam præ aliis afferemus, quæ ad præsentem casum pertinet; si nempe cyclois ita invertatur, ut crura sursum tendant, punctum autem infimum horizontem tangat, tum è quavis distantia demittatur grave per ipsam cycloidem, eodem omnino tempore per ar-

cum

cum utcumque magnum vel parvum descendet. Itaque patet hanc cycloidis proprietatem ad pendulorum usum transferri posse; si nempe efficiatur ut virga penduli in cycloide suas vibrationes absolvat; hac enim arte servatur temporis æqualitas, mutata utcumque arcuum descriptorum longitudine. Illud autem commodum sequenti artificio obtineri potest. Si curvæ cuilibet ex ejus parte convexa advolvatur filum, tum evolvatur itaut pars evoluta semper tensa maneat, punctum fili quodcumque curvam quamdam lineam delineabit motu illo per aerem. Curva quam filum complectitur, dicitur *evoluta*; curva autem quam filum in aere describit, curva *evolutione genita* appellatur. Curva genita fere semper admodum diversa est ab evoluta. At ceteris proprietatibus cycloidis hæc addenda est sane elegans; si nempe à summo vertice cyclois evolvatur, se ipsam generat sibi prorsus æqualem, ita ut binæ semicloidies in situ erecto positæ, et è parte convexa in ima sui parte sibi conjunctæ integram cycloidem generent. Quamobrem si binæ lamellæ semicycloyales in ima parte convexæ invertantur deorsum, itaut ima pars evadat summa, et ex ipso lamellarum angulo appendatur filum quod semicycloidis perimetro æquale sit, pondus imo

fi-

filo suspensum oscillationes suas in cycloide peraget, isochronas prorsus, sive in ampliores arcus excurrant, sive brevioribus arcubus se contineant, tempore semper æquali. Hanc cycloidis proprietatem ad horologiorum usum primus omnium traduxit *Hugenius*. In horologiis vel pondus appensum, vel lamina chalibea elastica per vim contorta, motum primæ rotæ imprimit à qua in rotam machinam derivatur. Jam diu in usu erat id machinarum genus, sed *Hugenius* eidem machinæ pendulum adjecit, ita ut cum illius oscillationibus celerioris rotæ motus connecteretur, dentesque singuli post singulas oscillationes procurrerent. Verum jam diximus, Geometris demonstratum esse, descensus per arcus circuli minimos etiam inæquales esse quam proxime isochronos: quare cum minimi sint circulorum arcus à pendulis descripti, tanta non est hac in re cycloidis utilitas. Præterea in pendulis simplicibus sola gravitate sollicitatis valere quidem potest cycloidis usus; sed minus felici successu horologiis aptatur. Et quidem ad penduli vibrationes præter gravitatem concurrunt quoque motrices horologii vires quæ penduli isochronismum turbare maxime possunt: quare minimos circulorum arcus præferendos esse, ipsa quoque experientia

 edoc-

edocti sunt horologiorum artifices. Sed hæc pauca dicta sint quantum patitur nobis imposita doctrinæ facilitas.

ARTICULUS IV.

De corporum conflictu.

I.

TRia distingui debent corporum genera; *dura*, *mollia*, *et elastica*. Dura dicuntur quæ ad mutandam figuram nulla vi cogi possunt. Mollia, quæ figuram ita mutant, ut mutationi resistant: eam autem amissam recuperare non nitantur. Elastica tandem dicuntur ea quæ figuram amissam recuperare nituntur. Rursus autem corpora vel sunt perfecte elastica, si nempe restituantur eadem vi, qua fuerunt compressa; vel imperfectè elastica, si restituantur vi minori. Corporum perfectè elasticorum restitutionem ita exprimere solent Physici. Dicunt nempe, in corporibus perfectè elasticis, *vim restitutivam æqualem esse vi compressivæ* Has definitiones exemplo illustrabimus. Globi duo elastici sibi mutuo occurrint; primum quidem in puncto sese contingunt, sed partes contingentes, et sese mutuo prementes cedunt magis ac magis ad ad certos usque limites, ac proinde augetur per gradus contactus magnitudo, donec partes compressæ per eosdem gradus, sed velocitatis ordine inverso, sese restituant, et ad pristinum statum redeant. Jam ut inter corpora elastica et non elastica comparatio instituatur, fingamus corpora dura AB (*Fig.* 20.) longa elastrorum serie connexa esse; si A moveatur versus B, id fieri non potest nisi comprimantur elastra, ac proinde corpus A, agit in B per elastra interposita, atque magis ac magis hæc elastra comprimentur, donec corpora duo æquales secundum eamdem directionem velocitates habeant: in hoc autem statu nulla vis aget in elastra; ac proinde vim elasticam exerent, et laxari incipient, sed inverso velocitatis ordine. Itaque in corporum elasticorum conflictu considerandæ sunt actiones duæ. In prima scilicet actione res se habet non secus ac si corpora essent omni elasticitate destituta; at cessante prima actione statim altera incipit, elastra nempe restituentur eadem vi, qua fuerunt compressa, si perfecta sit elasticitas. Igitur in prima actione extinguitur velocitas qua corpora ad se invicem accedebant, seu, ut vocant, velocitas *respectiva*; in altera autem actione corpora à se invicem recedunt eadem velocitate respectiva, qua nempe ad se mutuo accedebant in prima actione. Unde patet, motus quantitatem ab unoquoque corpore acquisitam vel ammissam in prima actione æqualem esse quantitati motus acquisitæ vel amissæ in actione altera; ita ut quantitas motus per conflictum acquisita vel amissa in corporibus perfecte elasticis duplo major sit, quam in corporibus perfecte duris. Quod spectat corpora imperfecte elastica, idem est in prima actione effectus ac in corporibus perfecte elasticis; verum quia vis restitutiva minor est vi compresiva, minor quantitas motus in secunda actione acquiritur vel amittitur. At quia ex data corporum elasticitate, data etiam est ratio vis compresivæ ad vim restitutivam, seu ratio velocitatis respectivæ ante conflictum ad velocitatem respectivam post conflictum; evidens est, quantitatem motus in prima actione acquisitam vel amissam in eadem ratione augendam esse post conflictum. Tandem quod spectat corpora mollia, quorum partes cedunt, sed ad pristinam non redeunt figuram, prima actio eadem est ac in corporibus perfecte elasticis vel perfecte duris; illorum velocitas respectiva per conflicrum extinguitur, et unius corporis instar progrediuntur, cum nulla sit vis restitutiva. Illud autem discrimen inter omnia

cor-

corpora probe notandum est. Corpus molle tempore finito motum suum alteri communicaret, eo scilicet tempore, quo cedunt corporis partes, et ipsam corporis diametrum percurrunt; si corpus perfecte molle fingantur. At in corpore duro, cujus partes cedere non possunt, unico temporis puncto indivisibili communicatur motus. Tandem in corpore perfecte elastico tempore finito motus producitur; cedunt nempe corporis partes, et crescente compresione, motu retardato ad se invicem accedunt; donec tandem continuo agat vis restitutiva, qua fit ut partes motu accelerato ad pristinam properent figuram.

II. Omnes conflictuum leges hoc uno principio innituntur; in quavis scilicet binorum corporum collisione, quantum motus lucratur corpus unum secundum datam directionem, tantum quoque lucrari debet corpus alterum secundum directionem oppositam; quod quidem evidens est ex actionis et reactionis æqualitate. Porro duplex casus contingere potest; vel enim corpora tendunt ad easdem partes, vel ad partes contrarias. Si primum, quidquid motus additur corpori fugienti, id detrahitur corpori incurrenti, ac proinde eadem manet tota motus quantitas post conflictum, quæ fuit ante conflictum. Si secundum,

 quid-

quidquid motus amittit corpus unum secundum propriam directionem, tantum quoque perit in corpore altero; illa enim corpora agunt in partes propriæ directioni oppositas. Igitur in hoc casu eadem manet differentia motuum post conflictum, quæ fuit ante conflictum. Duæ autem hujus principii partes ex duplici axiomate arithmetico facile patent: si nempe duæ fingantur quantitates, ex quarum una tantum detrahitur, quantum additur alteri, eadem manet quantitatum summa: si vero ex duabus quantitatibus æquales hinc inde partes detrahantur, eadem manet quantitatum differentia. Jam vero antequam collisionum leges ex demonstrato principio colligamus, observandum est corporum conflictum, vel *directum* esse, vel *indirectum*. Directus quidem dicitur, si corporum sibi occurrentium directio sit in eadem linea recta; indirectus autem vel obliquus appellatur, si corporum directiones angulum inter se contineant. De corporum conflictu directo, deinde de indirecto agemus.

III. Si corpora duo non elastica sibi invicem occurrant ad easdem partes, vel ad partes contrarias, in utroque casu post conflictum instar unius corporis progredientur; sed in primo casu, velocitas communis post conflictum erit æqualis quantitati

mo-

motus ante conflictum per summam massarum divisæ ; in casu autem altero æqualis fiet differentiæ quantitatum motus ante conflictum divisæ per summam massarum : si nempe corporum massæ dicantur M, m, velocitates ante conflictum V, v, velocitas communis post conflictum erit

$$1. \frac{MV + mv}{M + m} \quad 2. \frac{MV + mv}{M + m};$$

et quidem communem esse velocitatem post conflictum, seu corpora duo post conflictum instar unius corporis progredi, evidens est. Cum enim corpora illa ponantur omni elasticitate destituta ; nulla est ratio, cur à se invicem resiliant vel separentur. Facile etiam patet in primo casu velocitatem communem æqualem esse quantitati motus ante conflictum per summam massarum divisæ : etenim quantitas motus eadem manet ante et post conflictum ; est autem quantitas motus productum ex massa in velocitatem; habebitur ergo velocitas, dividendo quantitatem motus ante conflictum per summam massarum. Simili ratione patet, in casu altero velocitatem æqualem esse differentiæ quantitatum motus ante conflictum per summam massarum divisæ ; cum enim eadem maneat motuum differentia ante et post conflictum, sitque quantitas motus ut fac-

 tum

tum ex massa in velocitatem, evidens est, ad habendam velocitatem id efficiendum esse, ut nempe differentia motuum à massis liberetur, quod fit dividendo per massas. Jam hujus secundi causas aliquas conditiones expendamus. Si massæ et velocitates fuerint æquales, erit $mv = MV$, ideoque $MV - mv = o$; quare velocitas nulla est, et ambo corpora post conflictum quiescunt. Si massæ fuerint æquales, quiescat autem massa m, erit $\frac{MV - mv}{M + m} = \frac{MV}{2M} = \frac{V}{2}$; corpora nempe post conflictum dimidia velocitate progredientur. Si massa M quiescat, sitque valde magna et fere immensa respectu massæ m, erit $MV = o$, ideoque velocitas post conflictum fieret $\frac{mv}{M + m}$, ac proinde physice nulla ob massam M valde magnam.

IV. Ex demonstratis conflictuum legibus in corporibus omni elasticitate destitutis, facile colliguntur conflictuum leges in corporibus elasticis: etenim si corpora omni elasticitate careant, ex data velocitate communi post conflictum, et ex data cor-

po-

porum massa invenitur quantitas motus unoquoque corpore post conflictum, quæ si conferatur cum quantitate motus ante conflictum, habebitur quantitas motus per conflictum acquisita vel amissa. Jam vero in corporibus perfecte elasticis quantitas motus acquisita vel amissa duplo major est; in corporibus autem imperfecte elasticis mutatio motus augetur in ratione vis restitutivæ ad vim compressivam ex demonstratis: quare corpora elastica considerentur primum tamquam omni elasticitate destituta, atque inveniatur quantitas motus acquisita vel amissa; utraque duplo major fiat, si elasticitas fuerit perfecta, augeatur autem ita ratione vis restitutivæ ad vim compressivam, si imperfecta fuerit elasticitas, atque ita conflictuum leges pro quacumque elasticitatis hypothesi determinare licebit. Has autem leges exemplis illustrabimus. Si corpora omni elasticitate destituta et æqualia ponantur, illorumque unum quiescat, post conflictum dimidiata velocitate ad easdem partes velut unum corpus progredientur, ut patet ex demonstratis: quare corpus quiescens dimidiam motus quantitatem acquirit, quam amisit corpus incurrens. Jam si corpora sint perfecte elastica, duplo major fiat mutatio motus in unoquoque corpore; ergo corpus quies-

quiescens totam acquiret motus quantitatem, quam amittet corpus incurrens, quod proinde quiescet.

Alterum consideremus casum, dum nempe corpora ad partes contrarias tendunt, et facilitatis causa ponamus corpora æqualia et eadem velocitate moveri. Si corpora non fuerint elastica, ambo post conflictum quiescunt, ac proinde totam et æqualem motus quantitatem amittunt; verum in corporibus perfectè elasticis duplo major est mutatio; quare corpora perfectè elastica non solum amittere debent totam motus quantitatem secundum propriam directionem, sed contrariam et *negativam*, ut ita dicam, motus quantitatem acquirere; quare corpora ad partes contrarias à se invicem resilient æquali motus quantitate. Simili modo ad calculum revocari possunt aliæ quælibet motuum conditiones. Tandem si corpora fuerint imperfecte elastica, accuratissimis experimentis nota sit oportet ratio velocitatis respectivæ ante conflictum ad velocitatem respectivam post conflictum; atque in eadem ratione augeri debet mutatio motus. Observavit Nevvtonus, in globis vitreis velocitatem respectivam ante conflictum esse ad velocitatem respectivam post conflictum, ut 16. ad 15. quare si in globis vitreis æstimari de-

debeant conflictuum leges, hac proportione utendum est. Ceterum in præcedentibus demonstrationibus corpora omni elasticitate destituta, et perfecte dura consideravimus; qualia fortasse nulla existunt in rerum natura. Verum hanc quæstionem ad alium articulum in Physices progressu rejicimus. Interim patet, hanc hypothesim falsam an veram à nobis fingi potuisse, ut in corporibus elasticis conflictuum leges eruere liceret.

V. Demonstratæ hactenus conflictum leges pendulorum ope ad experientiam revocari solent. Globus A vibrationes suas perficiat in circulo EAF, itemque B in circulo æquali GBH (*Fig.* 21.) moveatur, et arcum RA descendendo, vel arcum at ascendendo percurrat. Demonstravimus jam velocitates in puncto infimo A fore, ut sunt arcuum ascendendo, vel descendendo descriptorum chordæ. Itaque effici facile potest, ut corpora, datis quibuslibet velocitatibus, inter se congrediantur; atque ex arcuum descriptorum chordis post conflictum invenitur velocitas acquisita vel amissa; atque ita per experientiam probari possunt conflictuum regulæ. Verum in instituendis hujusmodi experimentis calculo subduci debet aeris resistentia, quæ rem maxime turbat; in causa enim est, ut globus

A

A descendens per arcum EA ex R, ascendendo per AF non percurrat arcum æqualem, nec iterum revertatur ad R, ut contingeret in vacuo, sed deveniat ad punctum aliquod V. Nevvtonus ad habendam velocitatem globi A descendentis in aere per arcum datum præscribit, ut sublato altero globo B, demittatur libere globus A ex aliquo puncto R, noteturque punctum V, ad quod post duas oscillationes regreditur; tum pars quarta arcus RV collocetur in medio in ST, ut RS et TV æquentur inter se, nimirum ut VT ad VR sit in ratione 3 ad 8. Quod quidem ita se habere ex constructione patet; nam $VR = 2TV + \frac{1}{4}VR = \frac{8TV + VR}{4}$; ideoque $4VR = 8TV + VR$, et $3VR = 8TV$. His positis affirmat Nevvtonus, velocitatem in A globi decidentis ex S in aere eamdem esse, quæ foret in vacuo, si globus caderet ex T. Eodem modo si globus post collisionem ascendit ad S, inveniendum est punctum V, ex quo libere demissus globus ipse A post itum et reditum ita ascenderet usque ad r, ut esset rs = tu, et st quarta pars totius rv, sive quod idem est, ut rs sit ad rv in ratione 3 ad 8; affirmatque, velocitatem in A fore illam ip-

ipsam, qua in vacuo ascenderet ad t.

Hujus correctionis ratio facile patet. Nam RV est effectus resistentiæ aeris, qui in duplici illa oscillatione debetur binis dencensibus et binis ascensibus, ideoque ejus pars quarta ST debetur soli descensui; hanc partem in medio collocat ad habendum medium quemdam effectum; cum nimirum bini illi descensus et ascensus non sint inter se æquales, sed primus ascensus ac secundus discensus, æquales inter se, medii sint inter primum descensum et secundum ascensum. Hæc correctio exhibet velocitatem proxime solum, non accurate quæ nimirum in exiguua aeris resistentia parum à vera abludere possit; nam ad veram velocitatem determinandam multo sublimior et adhuc incerta resistentiarum doctrina requiritur; sed in re præsenti tantæ subtilitates sub sensum non cadunt. Testatur autem Nevvtonus, se plurimis experimentis diligenter institutis invenisse experimenta ipsa doctrinæ hactenus explicatæ omnino consentanea.

De corporum conflictu directo hæc pauca demonstrasse satis sit, ex quibus omnes conflictum casus facile derivari possunt. Ceterum quæstionem metaphysicam de motus communicati causa paucis verbis hic iterum revocabimus. Affirmat Malebranchius

chius motuum communicationem cum principiis physicis, aut cum aliqua corporum proprietate necessario conjunctam non esse, ita ut inter corporum duorum motum seu quietem nulla major sit connexio, quam inter corporum figuram, colorem cet. Hinc concludit celeberrimus metaphysicus, corporis incurrentis motum causam physicam non esse, cur corpus percussum moveatur, sed totam motuum communicationem divinæ voluntati, illiusque immediatæ actioni referendam esse. Certum quidem est, voluntatem Creatoris, omnium naturæ effectuum ac proinde et motus communicati primam et supremam esse causam; verum quod asserit Malebranchius, inter mutuuos corporum conflictus nullam majorem esse conjunctionem, quam inter illorum figuram, et colorem, id quidem parum accuratè dictum est. Et certe corporis alicujus figura et color ad corporis alterius figuram coloremque nihil omnino conferre possunt; at si corpus aliquod in aliud incurrat, necessum est, aliquam status mutationem contingere vel in corpore alterutro, vel in utroque corpore: etenim cum partes corporum ob illorum impenetrabilitatem ex eodem loco sese excludant, corpus aliquod incurrens motus directionem persequi non potest, nisi corpus percussum moveatur;

tur; quod si corpus incurrens post conflictum quiescat, jam idem corpus statum mutat, transiens scilicet ex motu ad quietem: quare oportet, ut in corporibus aliqua fiat status mutatio. Res alio exemplo confirmatur. Si corpora duo æqualia elasticitate destituta sese mutuò in partes directe oppositas æquali velocitate percutiant, ambo post conflictum quiescere ex illorum impenetrabilitate colligitur; ob eam rationem quiescere etiam debent corpora, si massæ fuerint in ratione reciproca velocitatum. Quæ cum ita sint, ex ipsis corporum proprietatibus fluere videntur conflictuum regulæ. Et re quidem ipsa ex vi inertiæ atque ex actionis et reactionis æqualitate pendent omnes, quas tradidimus conflictuum leges. Itaque nos quidem letet, qua vi aut virtute corpora motum inter se dividant; motus enim nihil in se reale est, sed tantum aliquis existendi modus, nec facilius intelligitur motus quam quietis communicatio; *virium*, *actionum* nomina adhibent plerique Philosophi, sed obscuris vocabulis rem implicant, non explicant. Concludendum ergo est, motuum communicationis principium metaphysicum ignotum nobis esse, ex corporum tamen proprietatibus pendere conflictuum leges, quas infinita sapientia ad fines in hujusmodi

di

di creatione propositos direxit et ordinavit omnipotens rerum omnium Auctor et Gubernator. Quamvis autem ex proprietatibus corporum pendere videantur percussionis regulæ, nemo tamen temerario inferat, leges illas omnino necessarias esse, et ab omnipotentis Creatoris voluntate nequaquam pendere: etenim Deus corpora omnia totumque universum libere creavit et conservat, eadem pro arbitrio destruere, annihilare, ubi voluerit, iterum creare potest; ac proinde corpora omnia omnesque naturæ leges infinitæ Dei omnipotentiæ subordinantur. Sed hæc conferantur cum iis, quæ de miraculis diximus in Metaphysica, atque etiam cum dicendis deinceps de essentialibus corporum proprietatibus.

VI. Indirectus corporum conflictus ad directum revocari potest. Sint corpora duo sphærica A: et B, quæ ex locis A, et B eodem tempore exeant secundum directiones AG, et BC (*Fig.* 22.) sitque velocitas corporis A ad velocitatem corporis B, ut AG ad BG. Describatur parallelogrammum ABHG, ducaturque DH. Centro G, et radio corporum A, B semidiametris æquali describatur arcus circuli, rectæ DH occurrens in L, I, agaturque LN parallela rectæ GA, itemque NR parallela rectæ GL: corporum duorum contra eodem tem-

po-

pore perveniunt ad puncta N, R, tumque corpora se mutuo tangent; nam ex triangulorum similitudine DN est ad NL, vel GR, ut DB ad BH vel AG, vel etiam ut velocitas corporis B ad velocitatem corporis A: quare spatia BN, et AR, eodem tempore describentur, et corporum centra eodem tempore puncta N, et R attingent. Quia vero recta NR æqualis est semidiametrorum summæ NR; evidens est, corpora sese contingere, sibique occurrere. Jam ducantur BM, AQ perpendiculares ad NR, erunt corporum conflictus iidem, ac si corpus A velocitate RQ occurreret corpori B velocitate MN secundum directionem NR: etenim velocitates corporum A, et B sunt, ut rectæ AR, et BN. Præterea motus AR resolvi debet in duos AQ, et RQ, itemque motus BN resolvitur in duos BM, et MN; sed motus AQ, et BM secundum directionis parallelas nihil conferunt ad conflictum; quare corpora ambo in se invicem agunt non secus, ac si occurrent sibi mutuò secundum directionem NR, cum velocitatibus RQ, MN. Itaque ex demonstratis patet, motus indirectos ad directos revocari, ideoque invenietur, ut ante, corporum velocitas post conflictum secundum hanc directionem; quo facto reperietur directio composita in hunc modum. Ponatur velocitas corporis A post coflictum === Rg (*Fig.* 23.) velocitas corporis B === Nm, sitque Rq æqualis et parallela rectæ AQ, itemque NI æqualis et parallela rectæ BM, compleanturque parallelogramma Rq Ag, NI Bm, moveri pergent corpora A, et B post conflictum per diagonales Ra, et Nb cum velocitatibus Ra, et Nb. Quoniam ergo motus indirectus ad directum revocatur, facile patet qua ratione conflictuum leges ac corpora utcumque elastica indirectis motibus in se invicem incurrentia transferri possint; varios casus percurrere longius foret atque superfluum.

VII. Ad conflictuum leges referuntur etiam quæ de corporum reflexione tractari solent. Sit MN (*Fig.* 24.) planum immobile, in quod perpendiculariter incidat globus F omni elasticitate destitutus; is post conflictum totam velocitatem amittet, ut ex dictis evidens est; cum nec in planum nec in globo quidquam sit, quod globum determinet ad regressum; et præterea corporis progressum ipsa plani immobilitas non permittit. Adveniat globus oblique per AC, et ducta AD perpendiculari ad MN, complectoque rectangulo ADCF, motus per AC compositus intelligatur ex motibus AD et AF, quorum alter AD

vel

vel FC elidetur à plano MN, manebit autem alter AF vel DC, ac proinde globus excurret versus N, et æquali tempore percurreret CE == DC, quæ erit ad AC, ut cosinus anguli ACD ad radium. At si globus fuerit perfecte elasticus, in primo casu delatus per FC regredictur itidem per CF eadem velocitate, qua advenerat, ut patet ex demostratis de elasticitate perfecta. Si autem adveniat per AC, resoluto, ut ante, motu in motus duos AD, et DC, vel FC, et CE, globus progredietur per diagonalem rectanguli FCEB, in quo cum latera CE, et EB, æquentur lateribus CD, et DA, et anguli ad E, et D sint recti; patet angulum ACD, qui dicitur angulus *incidentiæ*, æqualem esse angulo BCE, qui angulus *reflexionis* appellatur. Si globus fuerit imperfecte elasticus, et adveniat per FC, jam resiliet in F, ea scilicet velocitatis parte, quæ per conflictum recuperatur; ita ut CF semper sit in data ratione vis restitutivæ ad vim compressivam. Tandem si globus oblique adveniat per AC, servata velocitate per CE, et recuperata velocitatis parte per Cf vel Eb, resiliet per Cb, eritque angulus reflexionis ECb semper minor angulo incidentiæ ACD. Hæc omnia, quæ ex motuum compositione et resolutione facile colliguntur, vera sunt dumtaxatat, si ponantur conditiones quædam, nempe si planum fuerit perfecte lævigatum, ita ut mutuus partium attritus nihil officiat. Præterea consideravimus corpora velut puncta, aut etiam ea sphærica esse postulavimus, cum sphæræ in unico puncto sese tangant. Verum si diversas corporum figuras consideremus, res est sane ardua et sublimioris doctrinæ; at conflictuum leges exposuisse satis sit in corporibus sphæricis, ex quibus vulgares conflictuum et elasticitatis effectus licet intelligere. Tandem monendum superest, nullam nos habuisse rationem exiguuæ compressionis, quæ in ipso globorum conflictu contingit: compressio enim et reflexio fiunt per curvam quamdam; sed cum exiguus omnino sit tactus ille, quo globi comprimuntur, hac de causa nihil turbantur collisionum regulæ, quas quidem experientia confirmat.

VIII. Ex his omnibus, quæ in toto præsenti capite explicavimus, nascitur quæstio de *viribus vivis* magna animorum contentione agitata ubique gentium. Leibnitius occasione arrepta ex corporum ascensu uniformitèr retardato hanc controversiam primus invexit, quam deinde corporum elasticorum collisione aliisque plurimis argumentis tueri conati sunt magni

qui-

quidem viri. Cum videret Leibnitius, corpus dupla vel tripla velocitate projectum sursum ascendere ad altitudinem quadruplo vel noncuplo majorem, censuit distinguenda esse vina virium genera; illarum scilicet, quæ etiam sine motu habentur, ut est vis gravitatis, vis elastica quæ meram pressionem gignunt, ubi oppositis viribus impeditur motus; has vires idcirco vires *mortuas* appellavit, quo nomine eas secernere voluit à viribus in corpore motum aliquem habente admittendis, quarum effectus sit ut velocitatis quadratum, easque idcirco vires *vivas* nominavit. Eamdem virium distinctionem ex corporum elasticorum collisione confirmant Leibnitiani; cum enim in globis elasticis in se invicem utcumque incurrentibus, productum ex quadrato velocitatis in massam idem inveniatur post collisionem, quod erat ante, inde inferunt, in corporibus esse aliquid, quod respondeat massis ductis in quadrata velocitatum, quod illæsum remaneat, et ab uno corpore in aliud transeat, vim scilicet vivam, quæ perpetuò conservatur. Mirum sane, quam multas hæc quæstio contentiones excitavit, aliis vires vivas æstimantibus ex massa et simplici velocitate, aliis ex massa et velocitatis quadrato. Pro quadrato velocitatis Leibnitiani omnes in Germania steterunt, pro simplici velocitati Cartesiani in Gallia, Nevvtoniani in Anglia, apud Italos divisa studia. Verum quamvis inter celeberrimos viros etiam num hodie acrius ferveat philosophicalis illa, eam tamen in solo nomine positam esse, mihi facile persuadeo. Et quidem in memoriam revocandum est, quod sæpe sæpius monuimus, vis nomen ambiguum omnino esse, nullamque distinctam notionem habere, nisi effectum aliquem intelligamus. Itaque vis nomine nihil aliud clare significari potest nisi illa proprietas, qua fit, ut corpora ad motum concitata, vel obstacula superent, vel iis resistant. Quo major est superata obstaculi alicujus resistentia, eo major censetur vis, quo quidem vocabulo nulla entitas corpori inhærens intelligi debet, sed merum factum seu effectus. His jam explicatis, corporum motibus opponi possunt tres obstaculorum species. Vel enim insuperabilia sunt obstacula, ita ut omnem qualemcumque destruant motum; vel obstacula eam dumtaxat præbent resistentiam, quæ ad extinguendum corporis motum satis sit, illumque statim extinguit, ut sit in æquilibrio; vel tandem obstacula paulatim et per gradus motum destruunt, ut fit in motu retardato. Quia autem obstacula insupera-

ra-

rabilia motum omnem sistere valent, ad corporum vires æstimandas nihil conferre possunt; itaque superest ut virium mensuram aut in æquilibrio, aut in motu retardato investigemus. Quod æquilibrium spectat motus quantitates æquales esse consentiunt omnes, ac proinde vires in hoc casu ex sola velocitate æstimandas esse, fateantur necesse est. Neque etiam repugnat, in motu retardato vires ex motus quantitate æstimari: etenim si vis nomine intelligatur resistentiarum summa, quam obstacula quælibet corporum motibus afferunt, jam nulla difficultas esse potest: et quidem evidens est quantitatem motus amissam tempore infinitessimo esse ut productum ex resistentia in tempus infinitessimum, ac proinde resistentia tota est ut productorum illorum summa, sive ut tota quantitas motus amissa. Porrò virium notioni convenientissimum est, vim corporum hoc modo æstimare; nullam enim obstaculi ideam habemus, nisi quatenus resistit, ac proinde resistentiarum summa sive quantitas motus amissa, quæ idem resistentiæ proportionalis est, considerari potest tamquam obstaculum superatum, ac proinde vires vivæ hoc modo consideratæ ex producto massæ in velocitatem æstimari debent. At si nomine vis vivæ intelligatur alter effectus, puta numerus obstaculorum, quæ superantur, jam alia prodit virium mensura; etenim ponamus, globum aliquem projici in elastrorum seriem velocitate duplo, triplo maiori; in primo casu elastrorum compressorum numerus erit quadruplo major, in casu secundo erit major noncuplo, et ita deinceps, quod facile patet; nam quo majus est spatium percursum, eo major est elastrorum, quæ in spatio continentur, numerus, ac proinde numerus elastrorum est, ut spatium percursum, hoc est, ut quadratum velocitatis. Itaque patet, totam quæstionem huc revocari; an vires vivæ æstimari debeant ex primo, vel secundo effectu, nempe ex ipsa resistentiarum summa, vel ex ipso obstaculorum numero. Præterea observandum est, effectum aliquem majorem longiori tempore produci; ita si diversis velocitatibus in exemplo præcedenti projiciantur globi contra plura elastra, globus qui dupla velocitate projicitur, quatuor elastra comprimit, sed longiori tempore scilicet duplo, ac proinde mirum non est, quod dupla velocitas tempore duplo effectum quadruplum producere debeat. Pari ratione corpus sursum projectum velocitate duplo majori ad quadruplam altitudinem ascendit, sed tempore duplo. Hæc ergo altera est quæstionis

am-

ambiguitas, an scilicet in virium effectibus æstimandis haberi debeat ratio temporis, vel non: hæ autem considerationes à Physicorum arbitrio omnino pendent. Hac facta distinctione et accurate constituta definitione, jam omnibus, quæ proponi solent, argumentis statim parata est responsio. Neque immorandum est principio, quod *virium vivarum conservationem* appellant; nempe in globorum elasticorum conflictu productum ex quadrato velocitatis in massam invenitur idem ante et post collisionem. Principium illud ex sola elasticitatis natura atque ex actionis et reactionis æqualitate unice pendet. Et quidem si globi non fuerint perfecte elastici, velocitatum quadrata ac proinde et vires non servantur. Hanc quæstionem *logomachia* laborare non solum demonstrant ratiocinationes jam explicatæ, sed magis ac magis manifestum fiet, si rem ita consideremus; nempe corpus vel tendit dumtaxat ad motum obstaculo aliquo impeditum, vel revera movetur velocitate uniformi, vel denique illius motus obstaculo aliquo retardatur, ac tandem omnino extinguitur; in his omnibus casibus diversus est effectus à corpore productus, corpori tamen nihil novi accedit, sed illius actio dumtaxat varie applicatur. Itaque dum dicitur, vim corporis in certis casibus qus ut velocitatem, in aliis ut quadratum velocitatis, nihil aliud significatur, nisi effectum in quibusdam casibus esse ut velocitatem, in aliis autem ut quadratum velocitatis; atque etiam probe notanda est *effectus* significatio, quæ ut plurimum vaga est, et definitione indiget. Et quidem in tribus enuntiatis casibus effectus vocabulum diversam habet significationem; in primo casu solam tendentiam exprimit; in secundo spatium dato tempore descriptum et constans designat; in tertio tandem casu spatium usque ad motus totius extinctionem percursum denotat; in his autem casibus singulis nulla habetur ratio temporis, quo actio consumitur. Accurate ergo notandum est corporis *tendentiam* ad motam, prout est diversimodè applicata, varios producere effectus, quorum alii sunt velocitati, alii autem velocitatis quadrato proportionales. Ex his patet, quo sensu intelligi debeat vulgatissimum axioma: *causæ suis effectibus sunt proportionales*; obscure quidem enuntiatum est axioma illud, cum eadem causa diversos effectus producere valeat. Igitur ita restringi debet hac propositio, ut nempe effectus causis suis proportionales sint, si causæ eodem modo agant; quod quidem probe observandum est, persæpe enim fit ut principium illud,

quod

quod est omnino inutile vel saltem vago modo expressum, incautos Philosophos in paralogismos adducat. Hæc satis dicta sint de celeberrima controversia, quæ licet superflua omnino, et inter *logomachias* rejicienda videatur, præstantissimis utilissimisque operibus occasionem dedit.

APPENDIX.

De quibusdam capitis præcedentis utilitatibus.

I.

DE corporum descendentium motu uniformiter accelerato in præcedenti capite sermonem habuimus. Ex demonstrata accelerationis lege statim intelligitur, quantus debeat esse corporis ex alto delapsi impetus, quem quidem maximum esse oportet in minimo etiam corpore, dummodo tamen maxime sit descensus altitudo. Hic igitur prætermittendum non est luculentissimum divinæ providentiæ argumentum; cum enim minimæ aquæ guttulæ, levissimique nivis flocculi aut grandinis globuli ex alto cœlo delabantur, durissimas etiam cervices nostras tanta vi facile frangerent, nisi Deus Optimus Maximus, opposita aeris

re-

resistentia, nostræ conservationi providere voluisset. Maximam fluidarum particularum percussionem vulgatissima experimento exhibere solent Physici. Tubus vitreus aliqua ex parte aquam continet, pars autem superior aere vacua est; tubus hoc modo comparatus manu agitatur, ita ut uqua ad partem tubi superiorem ascendat et deinde in fundum recidat. Aqua fundum percutiens minima licet quantitate et ex minima altitudine, lapidis ictum sonumque imitatur, atque tubus paulo vehementiori manu succussus in frustra dissilit, qui vis levissimum ictum excipit, si aerem contineat. Id autem, oblata occasione, pro religioso Institutionum nostrarum fine breviter observatum sit.

Quamvis autem tales nobis proponamus erudiendos auditores, qui non armorum strepitum, sed religionis pacem amare debent; explicatæ tamen doctrinæ in arte *ballistica* sive *tormentaria* utilitatem exponere licebit. Sit AL altitudo, ex qua grave descendens, velocitatem acquireret projectionis velocitati æqualem; tempore, quo grave descendit per AL (*Fig.* 25.) percurreret motu uniformi spatium duplum ipsius AL, puta AI. Erit autem, ex antea demonstratis, EQ ad AL, ut quadratum temporis per EQ, quod idem est ac tempus

mo-

motus æquabilis per AE ad quadratum temporis descensus per AL, quod idem est ac tempus motus æquabilis per AI, ideoque ut quadratum AE ad quadratum AI, sumptisque AL, AI, AV continue proportionalibus, hoc est, sumpta AV quadrupla ipsius AL, erit rectangulum ex AL, et AV æquale quadrato ipsis AI; ac proinde ductis extremis et mediis habetur $EQ \times AL \times AV = AL \times AE^2$, sive $EQ \times AV = AE^2$, et $AV : AE = AE : EQ$; quare rursus patet gravia horizontaliter vel oblique projecta Parabolam describere. Ex hac demonstratione tota pendent ars ballistica, atque ad facilem usum comparari poterunt tabulæ, quarum ope data vi pulveris pyrii quantitate, datisque loci feriendi distantia et altitudine, invenietur elevatio *Mortarii*, sive quod idem est, angulus, quem directio globi tormentarii efficit cum horizonte.

Nihil hac in re brevius et elegantius legitur, quam quod tradidit D. de Maupertuis in Mon. Paris. ann. 1731. hoc fere modo; rem analytice exprimamus. Sit $AE = t$, $EA = z$, $AL = a$, ideoque $AV = 4a$; erit $EA \times AV = 4az$, et $AE^2 = t^2$, ac proinde habetur æquatio ad Parabolam $t^2 = 4az$. Jam vero Parabola AQ ad lineam horizontalem AB facile refererfertur. Linea *Jactus* AE, ut vocant, sive directio mortarii cum horizonte AB datum efficit angulum, cujus tangens dicatur, n, sitque $AH = x$, $QH = y$; sumpto AH pro radio $= 1$; erit AH ad HE, ut radius ad tangentem, ac proinde $HE = nx$. Igitur $EQ = EH - QH = nx - y$, et $AE^2 = AH^2 + HE^2$, hoc est, $tt = xx + nnxx$: quare si in prima æquatione $tt = 4az$, loco tt et z, substituantur præcedentes valores; habebitur $nnxx + xx = 4nax - 4ay$. Jam hujus formulæ usum consideremus. Data sit distantia horizontalis loci feriendi $AC = b$, ejus altitudo $CP = c$, in præcedenti æquatione erit $x = b$, et $y = c$: quare mutabitur in hanc $nn + bb = 4nab - 4ac$. Hinc per radicum extractionem et vulgares æquationum regulas facile invenitur directio mortarii $n = \frac{2a}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{4a^2 - 4ac - b^2}$, ubi signum $\pm$ designat signum positivum vel negatativum; ac proinde patet, duplicem esse posse mortarii directionem: etenim sive adhibeatur signum +, sive — restitutis quadratis, eadem redit æquatio. Si locus P sit horizonte, jam evanescit PC, ideoque $n = \frac{2a}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{4aa-bb}$. Si

lo-

locus P sit infra C, erit $n = \frac{2a}{b} + \frac{1}{b}\sqrt{4aa + 4ac\ bb}$. Si data sit directio mortarii, erit, $a = \frac{nn\,bb + bb}{4nb - 4c}$; quare invenietur velocitas *projectionis*, seu vis pulveris pyrii. Itaque patet, ad usum ballisticæ artis faciles expeditasque tabulas imperitis etiam militibus parari posse ope hujus formulæ, quæ quidem ipsa sola continet quidquid in magnis voluminibus scriptum invenitur, atque eam ob causam prætermittere nolui hoc elegantissimum problema ex primis Algebræ principiis facile intelligendum. Ceterum in doctrina ballistica hactenus explicata nullam aeris resistentis habuimus rationem, quam experitissimi quidam viri considerandam esse affirmant, alii vero negant: quare in hac inter peritissimos etiam viros opinionum varietate nova experimenta diligentius iteranda esse, censeo. Porro hoc quidem certissimum est resistentiam maxime minui, si globus missilis sub exiguo volumine maximum pondus continet, ac proinde in hoc casu experimenta ad doctrinæ veritatem magis accedunt.

In

II. In hoc ipso capite pendulorum doctrinam explicavimus; hæc autem est maxima pendulorum utilitas, ut accuratam exhibeant temporis mensuram. In motu quærendam esse temporis mensuram, demonstravimus in Metaphysica. Si motus sit uniformis, spatii descripti partem accipimus pro unitate, et deinde æquales ejusdem spatii partes consideramus. Tempus, quod hoc modo per motum uniformem metitur, tempus *medium* et *uniforme* appellamus; at tempus *apparens* et *verum* dicitur externa quælibet et sensibilis per motum temporis mensura, qua vulgus vice veri temporis utitur, ut hora, dies, mensis, annus. *Æquatio temporis* vocatur differentia inter tempus verum et tempus medium. Æquabilem censent Astronomi diurnum communum motum, qui ex diurna terræ revolutione circa proprium axem oritur; at inæquale est temporis intervallum inter binos appulsus Solis ad Meridianum; illud autem temporis intervallum *diem astronomicam* vocant. Sit S Sol (*Fig.* 2.), AB portio orbitæ telluris, linea MD repræsentet Meridianum aliquem, cujus planum productum transit per centrum Solis, dum tellus versatur in A Progrediatur deinde tellus in sua orbita per arcum AB ad B; interea dum completur una telluris revolutio circa axem

axem, completa revolutione, Meridianus MD perveniet ad situm md priori MD parallelum; ideoque Meridianus in hoc statu nondum per Solem transit, neque incolis, qui sub Meridiano illo degunt, fiet meridies, sed oportet ut Meridianus dm motu angulari feratur, describatque angulum dBf, donec Meridiani planum per centrum Solis transeat. Exinde fit, ut dies solares una telluris revolutione circa axem longiores sint.

Si Meridianorum plana ed orbitæ terrestris planum normaliter insisterent, et tellus æquabili semper motu orbitam suam percurreret, post peractam à Meridiano aliquo revolutionem, ob md, et MD parallelas, angulus dBf esset æqualis angulo BSA, et arcus df similis arcui AB; atque ob tempora semper æqualia arcus AB, ac proinde angulus df esset sibi semper æqualis; ideoque dies omnes solares æquales essent, tempusque apparens cum medio congrueret. At res longe aliter se habet; inæqualis enim est telluris velocitas, quæ in motu anuuo est reciproce, ut perpendiculum ad tangentem demissum, ex antea demonstratis. Præterea Meridianorum plana non sunt ad Eccliptícam; sed ad Æquatorem normalia. Sola hæc causa, dempta etiam terrestris motus inæqualitate, dierum inæqualitatem produceret; nam Ecclipitica efficit cum Æquatore angulum $23\frac{1}{2}$; si autem dividatur Eccliptica in exiguos arcus æquales, qui Solis iter, posito ejus motu uniformi, singulis diebus repræsentent, ductis per Polos mundi, et per singula divisionum puncta circulis Meridianis, æquales non sunt Æquatoris arcus his Meridianis comprehensi; ac proinde nec æquale semper est temporis intervallum inter binos appulsus Solis ad Meridianum. Hic autem pro commoditate, majorique facilitate, modo telluris modo Solis motum adhibemus; res enim proinde se habet quoad motum apparentem.

Quæ cum ita sint, etiamsi fingamus Solem uniformi motu in Eccliptica progredi, non tamen per binos appulsus Solis ad Meridianum definiri potest tempus medium. Itaque adhibent Astronomi fictitios quosdam dies inter se æquales, et inter longiorem brevioremque diem medios; quod ut efficiant, numerum horarum, quibus Sol in Eccliptica defertur, considerant, tempusque totum in tot dividunt partes, quot sunt horæ, quarum 24 diem integram constituunt. Quoniam autem nullum novimus in natura corpus, quod motum perfectè æqua-

æquabilem conservet, qui tamen motus solus idoneus est ad dies, horasque æquales connotandas, fingunt Astronomi aliquod sidus, quod in Æquatore versus Orientem semper incedant, et motum suum nusquam intendat aut emittat, sed uniformiter Æquatorem percurrat eodem tempore, quo Sol Eccliptica videtur describere. Talis sideris motus tempus æquale et verum repræsentabit, ejusque motus in Æquatore diurnus esset 59' 8'', qualis scilicet est medius Solis motus in Eccliptica; ac proinde dies æqualis et medius per appulsum hujus sideris ad Meridianum definitus æqualis erit tempori, quo tota circumferentia Æquatoris, seu gradus 360 per Meridianum transeunt, et insuper 59' 8'', hoc autem additamentum idem semper manet, ac proinde dies omnes medii inter se æquales erunt. Cum ergo Sol inæqualiter secundum Æquatorem Orientem versus promoveatur, aliquando citius hoc sidere Meridianum attinget, aliquandò serius ad eumdem appellet. Hæc differentia ea ipsa est, quam *temporis æquationem* appellavimus; hac autem aliquandò ablata, aliquandò addita, evidens est tempus medium revocari ad verum, et viceversa verum ad medium. Porro hæc æquatio excurrit per 31' partim hinc, partim inde, ita ut inæqualitatum omnium summa quadrantem horæ superet dimidio minuto. Itaque dierum astronomicorum inæqualitatem explicavimus.

Ejusdem generis inæqualitas habetur etiam inter binos appulsus ad Horizontem, quod temporis intervallum diei italicæ durationem definit; sed in hac temporis mensura multo major est inæqualitas ob multo majus discrimen inclinationis Eccliptica ad Horizontem. Hìc apud nos Romæ harum dierum tanta est inæqualitas, ut tres horas superet, atque inde fit, ut horologium, quod æquabili motu feratur, accuratè referre non possit per totum annum nec astronomicas et communes Europæ horas, nec Italicas, sed accelerari debeat idemtidem et retardari, vel inde jam promoveri, jam retrahi; sed hoc incommodum in communi Europæ horologio multo minus est, quam in Italico. Hìc autem, data occasione, prætermittenda non est sæpius renovata ab imperitis hominibus controversia de horologii Italici cum Astronomico consensu, et de hora meridiei quæ in hoc stabilis est, in illo variabilis; dierum inæqualitatem non perpendunt hi pertinacissimi viri, quod indoctorum hominum vitium est, et ab infantia ipsas horas consideravunt tamquam certam quamdam et

R 2 cons-

constantem mensuram, quæ 24. vicibus repetita diem compleat. Inde autem fit, ut crasse errent, et in conciliandis italicis astronomicisque horis sese variè implicent. Illud tandem adjiciendum, stellarum fixarum regressum ad Meridianum, et ad quemvis cœlestis spæræ circulum eodem quam proxime fieri tempore, quo diurna revolutio peragitur; cum stellæ proprios motus perquam exiguuos habeant, ita ut in singulis conversionibus discrimen ab æquabili diurni motus intervallo sensum omnem penitus effugiat; sed motus illos deinde explicabimus in Astronomis. Explicata temporis æquatio non solum adhibetur ab Astronomis; sed etiam ad ordinanda in usu civili horologia usurpatur. Hinc intelligitur, qua de causa pendulum, quod tempus medium demonstrat, non consentiat cum Sole, qui tempus verum indicat; sed modo citius eat, modo tardius. Eadem de causa mirari minimè debemus, quod horologia etiam à Fabro elaborata cum horologiis solaribus non conveniant; hinc *Solem dicere falsum* audent Astronomi. Hæc pauca indicasse satis sit, quæ subjecto Tyronum oculis terrestri vel cœlesti globo debent explicari.

III. Horologia pendulis instruere primus omnium docuit Hugenius in opere immormortali : *de horologio oscillatorio* ; quod quidem præclarissimum inventum eximiam hujus capitis utilitatem satis demonstrat; pauca igitur de horologiorum structura et ex præcedentibus facile colligenda hìc adjungam. Pendula horologiis ita communiter aptari solent. Rota, quam vocant *occursus*, horizontaliter volvitur, ac proinde *librator* supra rotam extenditur, ejusque *pinnæ* duæ, quarum plana angulum rectum comprehendere solent, ita denticulis inferuntur, ut pinna altera denticulo impellatur, dum opposita à suo denticulo se eximit; id autem facile obtinetur, si rota numerum imparem denticulorum habeat, et libratoris axis per centrum rotæ transeat. Facilitatis ergo consideremus horologium duabus tantum rotis instructum; prima seu inferior rota 120 denticulos habere ponatur, eaque duas circulationes intra horam fingatur absolvere; hæc ergo æquivalebit rotæ denticulorum 240. Secunda rota habeat rotulam denticulorum 5; dum quinque denticuli majoris rotæ transeunt, unam circulationem secunda rota absolvet. Jam per divisionem inveniendum est, quoties quinarius numerus contineatur in 240, *quotiens* erit 48; quare intra horam secunda rota circulationes 48 absolvet. Ponatur autem, secundam rotam constare 35 denticulis,

quo-

quorum quilibet duas vibrationes efficit, cum bis libratorem attingant; quare singulis circulationibus efficiet vibrationes 70. Jam multiplicetur numerus 70 per 48, habebuntur 3360 vibrationes simplices intra horam. Calculus perinde se habet, si eadem manente rota inferiori 120 denticulorum, mutentur rotula, et secunda rota. Itaque prima rota sit denticulorum 120, quæ duas circulationes intra horam efficiat, ideoque æquivaleat rotæ denticulorum 240; rotula secunda sex habeat denticulos; dividatur numerus 240 per 6, quotiens erit 40; quare secunda rota quadragesies intra horam rotatur; habeat autem denticulos 45; et quia, ut jam dictum est, denticulus quilibet, singulis circulationibus bis libratorem attingit, duplicetur is numerus, fientque 90, quæ multiplicentur per 40, et habebuntur vibrationes simplices intra horam 3600; hoc est vibratio quælibet simplex minutum secundum æquabit.

Simili ratione initur calculus pro alio quolibet rotarum numero. Instructum ponatur horologium rotis tribus, quarum prima dentes 122 habeat, secunda rotula dentes 7, rota secunda 60, rotula seu axis tertiæ rotæ habeat denticulos 8, rotæ occursus 15.: hoc modo habebitur vibrationum numerus. Dividatur 112 numerus dentiticulorum primæ rotæ quæ singulis horis semel circumvolvitur, per 7, nempe axem secundæ rotæ, invenietur rotam secundam intra horam decies sexies circumvolvi; habet autem hæc rota denticulos 60; quare multiplicentur 16 per 60, invenitur 960; ideoque intra horam 960 denticuli rotæ secundæ transeunt, qui numerus dividendus est per 8, axem tertiæ rotæ, quæ proinde 120. circumvolutiones absolvet. Habet autem hæc rota 15 denticulos, qui vibrationes simplices 30 perficiunt; quare multiplicentur 30 per 120, invenientur vibrationes simplices 3600, quarum una minuto uni secundo æquivalebit.

Ex his omnibus intelligitur praxis horologiorum artificibus vulgatissima; quærunt scilicet numeros, qui exprimunt, quoties numerus dentium rotæ alicujus denticulos rotæ alterius contineat; illos autem numeros *exponentes* vocant. Itaque ex demonstrata pendulorum doctrina determinari debet numerus vibrationum penduli dati, quo tempore rota aliqua circulationem unam absolvit; quod quidem facile habetur, cum sit numerus vibrationum dato tempore peractarum in ratione subduplicata inversa longitudinis penduli. Numerus vibrationum inventus dividatur per 2, quotiens erit productum ex omnibus exponentibus, sive

quod

quod idem est, duplum productum ex singulis exponentibus æquatur numero vibrationum penduli, durante una rotæ inferioris revolutione, ut ex dictis evidens est. Itaque si construendum proponatur pendulum aliquod rotis instruendum, primo notum esse oportet numerum vibrationum penduli, quo tempore rota una suam circulationem perficit; tempus illud ponatur unius horæ, pendulumque ad minuta secunda suas oscillationes componat, ita ut singulæ vibrationes sint minuti unius secundi, seu pars $\frac{1}{3600}$ unius horæ. Itaque interea dum rota semel circumvolvitur, pendulum absolvet vibrationes 3600, qui numerus erit duplum productum ex singulis exponentibus: quare si exponentes dicantur r, s, t, erit $3600 = 2rst$, ac proinde $1800 = rst$. Quia vero exponentes r, s, t, sunt quantitates indeterminatæ, patet id effici posse, ut nempe rotæ occursus eumdem circulationum numerum dato tempore conficiat, mutatis rotarum axiumque dentibus, dummodo productum ex singulis exponentibus maneat. E. G. Ponamus horologium pluribus instructum rotis, quarum una denticulos habeat 48, dentibus 8 donata sit rotula, cujus axi affixa sit

sit rota dentibus 40 instructa, habeatque rotula dentes 6, et illius axi inferatur rota dentium 36, quæ cum rotula dentium 6 connectatur; cum hac rotula jungitur tympanum vel rotæ occursus; numerus circulationum rotæ occursus, interea dum prima rota circulationem unam absolvit, erit $\frac{48}{8} \times \frac{40}{6} \times \frac{36}{6} = 240$; si autem alii adhibeantur numeri $\frac{45}{10} \times \frac{50}{8} \times \frac{36}{10} = 240$, alia prodit rotarum series priori æquivalens. Ex his paucis derivari possunt plurima ad praxim utilissima. Ceterum unusquisque facile intelligit, explicatam rotarum combinationem non solum valere in majoribus horologiis pondere appenso sollicitatis, sed etiam in horologiis portatilibus, quæ elastro aliquo moderantur. Hæc autem omnia subjecto Auditorum oculis horologio exponi debent.

CA-

CAPUT II.

De extensione et reliquis inde pendentibus corporum proprietatibus.

SUB duplici ratione considerari potest extensio, vel quatenus est *sensibilis*, seu *physica*; vel quatenus est notio *abstracta*, seu *metaphysica*. Extensio primo modo considerata est effectus certa corporum actione in organis corporeis productus, quo fit, ut corporum superficies tactu percursæ plures à se invicem diversas partes seu varias partium distantias nobis repræsentent. Extensio considerata quatenus est notio *abstracta*, est ipsa notio materiæ à qualitatibus sensibilibus, et quibuscumque limitibus per mentem separatæ. Hæc altera extensionis species ad Metaphysicam proprie pertinet, et spatii *imaginarii* nomine generatim venire solet. Si autem spatium undequaque expansum certis corporum distantiis, atque intervallis restringamus et limitemus, spatium illud determinatum dicitur *vacuum*. Itaque duplex extensio rursus intelligi potest *penetrabilis* et *impenetrabilis*. Extensio penetrabilis seu vacuum, illa est quæ corpora admittit; impenetrabilis autem vel

so-

soliditas, quæ corpora excludit. Evidens autem est *figuram* nihil aliud esse, quam diversam partium extensionem diversumque ordinem, ac proinde in idem caput referri potest corporum *figurabilitas*: quare totum caput illud in quatuor articulos dividemus. 1. erit de extensione penetrabili; 2. de impenetrabili; in 3. de corporum figurabilitate differemus; in 4. tandem explicatis octo universalibus corporum proprietatibus, de corporis natura ultimum articulum adjungemus.

ARTICULUS I.

De extensione penetrabili.

I.

CErtissimum est nullam extensionis etiam penetrabilis notionem sine corporum interventu, sive tactu et motu nos acquirere; etenim fingamus hominem sensuum omnium facultatibus præditum, qui tactus organum in unicam dumtaxat materiæ portionem sine ullo motu exercuerit, extensionis notione careret talis homo, eamque acquirere inciperet, ubi primum moveretur. Et re quidem ipsa, corporis alicujus extensionem non cognoscimus, nisi tac-

tactus organo ipsam corporis superficiem continue et successivè percurramus. Neque satis est, ipsam corporis superficiem moveri, interim quiescente organo, ipsum quoque organum moveri necessum est: etenim per motum extra propriam existentiam, ut ita dicam, erumpimus, objecta externa agnoscimus, illorum dimensiones, distantias novimus. Ad extensionis notionem ita necessario pertinet motus, ut existente etiam unica atomo extensionis notionem possemus acquirere, si tactus organum moveretur, et successive ab illa atomo in diversis punctis afficeretur; etenim organi motus, et *impressionis succesivæ* continuitas ipsam atomum veluti multiplicant atque extendunt.

Re quidem vera extensionis sensatio per visus organum nobis etiam advenit, oculus amplissimum spatium, ad quod tactus non pervenit, longe lateque amplectitur, instrumentorum ope maximas etiam objectorum distantias metitur. Verum id fieri non potest, nisi oculus tactu fuerit edoctus, quod quidem domonstrat exemplum cæcinati, qui ablata cataracta oculorum usum acquisivit. Hanc historiam narravimus et explicavimus in Metaphysica, ubi de extensionis et spatii notione plura tradidimus. Id ergo compertum est, sine tac-

tus

tus exercitio nullum de objectorum dimensionibus, formis, distantiis, extensione fieri posse judicium. Neque extensionis ideam formare quis posset, etiamsi objectorum imagines in fundo oculi delineatas moveri fingamus; hi enim apparentes motus simplici *successionis* notioni originem præberent, non secus ac faceret tonorum vel odorum series, quæ successive auditus vel olfactus organa afficeret; sed nulla motus realis, ac proinde extensionis notio nasci posset. At tactus organum in ipsam materiam immediate agit, dimensiones, formasque corporum sentit, et quamdam experitur resistentiam, quam ad aliqui extra nos existens referre cogimur.

II. Quamvis extensionis notio ex ipsa corporum existentia ducat originem, immerito tamen inde colligeretur, nullam esse extensionem corpore vacuuam, seu penetrabilem. Hac de re magno animorum æstu in scholis disputatur Vacui existentiam negabant Peripatetici, possibilitatem negant Cartesiani. Ab utraque tamen Philosophorum secta longe differunt Leibitiani, qui nullam *realem* extensionem admittunt, sed extensionem quamlibet velut merum *phænomenon*, rerumque coexistentium ordinem arbitrantur. Hanc opinionem, quam in Metaphysica jam explicavimus, variis in lo-

locis opportunè revocabimus. Porrò licet sensuum testimonio circa hanc quæstionem nihil omnino definiri possit, vacuum tamen existere ostendunt rationes validissimæ. Ad presentem articulum pertinent conclusiones duæ.

CONCLUSIO.

Validissimis rationibus probatur vacuum.

I. Fingamus, nullum existere vacuum; corpora omnia sunt æqualiter plena, seu eamdem materiæ quantitatem continent sub eodem volumine, quod quidem fateri coguntur, qui vacuum negant. Demonstravimus autem, pondera quantitatibus materiæ proportionalia esse; igitur sub eodem volumine idem pondus habent corpora singula, quæ proinde forent ejusdem gravitatis specificæ: sed absurdum est, aurum, levissimamque plumam ejusdem dici gravitatis specificæ, ideoque et vacuum demonstrant experimenta.

II. In Physica notissimum est jam antea à nobis descriptum experimentum, quo nempe corpus quodlibet in vacuuo Boyliano æqualibus temporibus æqualia spatia percurrit, sive idem corpus in amplissimum volumen extendatur, sive in angus-

tis-

tissimum redigatur. Illud vero experimentum demonstrat, non solum aerem hauriri, sed etiam illius loco nullum aliud fluidum succedere: etenim quodcumque sit fluidum illud, quo major est corporis superficies, eo plures fluidi particulæ corpori descendenti resistunt, ac proinde corpus, mutata utcumque superficie, eadem non descenderet velocitate; imo corpora sibi liberé relicta per aerem non descenderent; aer enim foret ejusdem gravitatis specificæ cum corpore immerso, quod proinde aeri innataret. Hujus argumenti vis tota intelligetur, explicata deinde fluidorum doctrina: interim vero experimentis compertum habetur, idem corpus majori, vel minori volumine donatum per idem fluidum eadem velocitate non descendere; imo quiescere, si eamdem cum fluido habeat gravitatem specificam.

III. Demonstravit Nevvtonus, motum globi intra fluidum æque densum delati, ob ipsam fluidi resistentiam totum amitti eo tempore, quo globus percurreret $\frac{8}{3}$ diametri suæ partes. Hæc quidem demonstratio ad difficiliorem fluidorum doctrinam pertinet; interim tamen evidens est, et experientia compertum, fluida densissima

cor-

corporum motibus maxime resistere. At si nullum admittatur vacuum, jam fluida omnia talem habent densitatem, qua nulla major esse possit. Itaque à multis retro sæculis perturbatus, atque extinctus omnino fuisset globorum cœlestium motus, qui tamen certa, perpetuaque periodo absolvitur. Alia quidem plurima afferri solent argumenta, sed hæc pauca omnium validissima seligere satis sit, ex quibus tandem sic concludere licet. Admitendum est vacuum, quod experimenta, phænomenaque cœlestia demonstrant; atqui cet. ergo.

Obji.: admittere non repugnat fluidum aliquod subtilissimum, quod corporum omnium poros libere permeet, quod proinde in *campanam pneumaticam*, extracto aere, succedat, nullumque vacuum permittat. Neque etiam repugnat, fluidum illud esse omnis gravitatis expers, etenim quid prohibet, fluidum aliquod concipi sine conatu, vel *tendentia* ad centrum terræ? Hanc vim in subtilissimis flammæ, lucisque particulis minime observamus. Hinc Cartesiani ita argumentantur: ad demonstrandum vacuum diversam corporum gravitatem specificam maxime jactant, qui vacuum admittunt; atqui in prædicta hypothesi ratio illa evanescit omninò; ergo cet. Resp. C. maj. dist. min., talis hypothesis fictitia omninò est, et philosophandi regulis contraria C., hypothesis illa philosophica est, et philosophandi regulis consentanea, N. quare N. cons. Commentitium illud fluidum è cultiori Physica proscribendum esse, jam demonstravimus, ubi sermo fuit de vorticibus Cartesianis. Et re quidem ipsa hujus argumenti pondus gruvissimum ita senserunt Recentiores cartesianæ hypotheseos reformatores, ut vacuum admittere non dubitaverint. Quod spectat flammæ, lucisque materiam, tantilla est illarum gravitas, ut nullo experimento conspicua esse possit, omnemque Physicorum diligentiam longè fugiat. Hæc autem levitas, quæ *relativa* est dumtaxat, nostræ conclusionis veritatem apprime confirmat; inde enim evincitur, lucis particulas nihil fere materiæ continere, ac proinde et vacuum existere. Id rursus facili ratiocinatione intelligere licebit. Tanta est radiorum solarium velocitas, ut totum illud vastissimum spatium, quod Solem inter, nostrumque globum expanditur, brevissimo septem, vel octo minutorum intervallo percurrat, quod quidem demonstrant suo deinde loco referendæ observationes astronomicæ. Jam vero fingamus, minimam materiæ portionem, quæ sub experimentis cadere possit, in delicatulum visionis organum tanta, et fere immensa velocitate,

in-

incurrere, unico ictu solverentur omnino delicatissimæ oculorum partes et in pulverem redigerentur: recordandum enim est, vires corporum esse, ut productum ex quantitate materiæ in velocitatem, aut in quadratum velocitatis: quare cum ex perpetuo radiorum solarium fluxu offensionem nullam patiantur oculi; hinc patet exiguam omnino esse, et fere nullam in radiis solaribus materiæ quantitatem. Id vero magis, ac magis manifestum fiet comparatione instituta cum minimis globulis vi pulveris pyrii explosis, quorum tanta vis est, ut non solum homines, sed urbium quoque muros disjicere, et solo æquare valeant. Tandem fatendum est, nulla severa demonstratione ostendi posse talis fluidi impossibilitatem, cum ignota nobis sit intima corporum natura. Verum in hisce dumtaxat proprietates consideramus, illasque ad humanæ societatis utilitatem transferre conamur: quare etiam si tale fluidum liberalius concedamus, quod tamen philosophandi legibus repugnat, nobis perinde est, ac si nullatenus existeret; ideoque de hoc inutilissimo fluido nihil curare debent Physici, qui *multa scirent utilia, si non discerent superflua.*

Inst. 1.: ad explicandam motuum cœlestium perpetuitatem atque constantiam radiorum solarium exemplo iterum utuntur

Cartesiani. Et quidem solares radii sine ullo impedimento, sine perturbatione ulla sese mutuo decussant, et secundum quamlibet directionem intersecant. Fingamus ergo, planetas in simili fluido deferri, jam nullam resistentiam patientur; ponamus nempe, fluidi cœlestis particulas omni tenacitate et inertia esse destitutas, nullum errorem experientur cœlestes motus, ideoque evanescit alterum vacui argumentum. Unde sic argumentantur; non repugnat hypothesis illa quæ radiorum solarium exemplo confirmatur; atqui cet. ergo. Resp. N. min. Ad illam objectionem eadem fere est, quæ ac præcedentem, responsio: etenim quod solares radii sine ulla perturbatione sese mutuo trajiciant, id repetendum est ex illorum incredibili fere subtilitate et materiæ quantitate fere infinite parva. Hæc ergo summa radiorum mobilitas et directionis cujuscumque facilitas ipsum vacuum demonstrant. In hac objectione fingitur fluidum omni inertia et partium tenacitate destitutum; quod quidem fingere non minus absurdum est et philosophandi regulis contrarium, quam corpus aliquod gravitate spoliare.

Inst. 2.: non repugnat extensionem merum esse phænomenon, nullamque extensionem revera existere. Leibnitianam hac de re hypothesim in Metaphysica jam explicavimus:

mus: si nempe res plures tales sint, ut diversas in organis sensoriis impressiones, diversasque in nobis excitent ideas; jam res illas consideremus tamquam plures, ideoque extra se invicem existentes. Ex illa diversitatis notione per sensus et maxime per organum tactus acquisita nascitur notio extensionis. Pari modo quod corpus determinatam repræsentet figuram, magnitudinem, motum, id fit non quod res ita se habeat; sed nihil aliud significatur nisi corpus tale esse, ut illas nobis excitet ideas quas experimur. Unde sic argumentari licet; nullum existit vacuum, si extensio merum sit phænomenon; atqui hæc hypothesis non repugnat, cum nos lateat intima rerum natura; ergo cet. Resp. dist. maj., si extensio *sensibilis* merum sit phænomenon, hoc est, si mere *idealis* sit, nihilque *realitatis* extra mentem habeat, C. maj., si extensio merum sit phænomenon, hoc est, si nihil *substantialitatis* habeat, non sit tamen merum nihil, Neg. maj. dist. min. N. cons. Brevius explicari debet hæc objectio, quæ deinde in meliori lumine collocabitur, ubi sermo erit de corporis natura. Cartesiani dividunt corporum proprietates in *absolutas*, seu *primitivas*, et in *relativas*, seu *secundarias*. Proprietates absolutas dicunt illas, quæ ad tactum pertinent, extensionem imprimis et soliditatem;

reliquas vero, quales sunt odores, colores, sapores, soni cet. relativas appellant. Arbitrantur nimirum, proprietates absolutas eo modo in corporibus existere, quo nobis repræsentantur. At proprietates relativas tales esse, affirmant, ut certam ad nostras ideas habeant relationem, vi cujus tales ideas constanti lege in nobis excitant, ita ut tamen res longe aliter se habeat, ac nobis apparet. Verum alii subtiliores Metaphysici omnes omninò corporum proprietates æque relativas esse existimant, ignotam prorsus nobis esse intimam corporis naturam asserunt, nullamque proinde afferri posse accuratam definitionem, sed à nostro dumtaxat cognoscendi modo desumptam. Quod ut intelligatur, diligenter notandum est, ideas nostras proprietatibus illis similes omninò esse non posse, ut externæ hominis figuræ pictura est similis; nam horum utrumque et substantiale est et æque materiale; at idea ad mentem pertinet, nihilque substantiale aut materiale habet, quale est ideæ objectum; quare hoc similitudinis genus ne in ideis quidem per tactus organum excitatis haberi potest. Deinde notandum est, talem in omnibus ideis ad objecta ipsa haberi relationem; ut ab iisdem objectis eodem modo applicatis eædem in nostra mente excitentur ideæ, quod quidem in nostris institutionibus metaphysicis

cis fusè explicavimus. Itaque Philosophi illi nullum inter sensibiles corporum qualitates statuunt discrimen, easque considerant tantum velut actionem, quam corpora certis legibus in sensuum nostrorum organa exercent, ex qua sensatione certa idea in mente excitatur. Sed quidquid sit de variis illis Philosophorum placitis ad examen deinde revocandis, interim evidens est, hanc objectionem nostræ conclusioni minime contrariam esse, si probe recordemur cultioris Physices scopum; consideramus nempe sensibiles corporum qualitates, quatenus sunt effectus ad nos et humanæ societatis utilitates referendi. Porrò manifestum est, in hoc sensu negari non posse extensionem, *sensibilem* scilicet, quidquid sit de extensionis natura; sed *nostrum non est tantas componere lites.* At observandum est, cum *Idealistis* confundi non debere Philosophos, qui extensionem velut phænomenon habent. Et quidem Idealistæ corpora existere negabant, nostrasque omnes sensationes perpetuum errorem esse somniabant. Ad hac autem insania, quam in Metaphysica confutavimus, longe absunt prædicti Philosophi, qui corpora existere admittunt, et ex ipsa partium coexistentia extensionis notionem oriri, affirmant Eodem nimirum sensu extensionem phænomenon appellant, quo color phænomenon dici solet. In hac hypothesi evanescere, et submoveri omninò videtur tota de *vacuo* et *plano* controversia. Cum enim ex spatii et extensionis notione hæc quæstio originem habeat, tota huc revocatur, an scilicet extensio et spatium sint realitates quæ aliquid susbtantialitatis habeant, an vero in simplici partium coexistentium ordine consistant. Si quæstio ita explicetur, jam tota cadit; cum planum et vacuum mera sint phænomena. Itaque investigari non debet, utrum existat plenum aut vacuum; sed potius instituenda est quæstio, an per phænomenon vacui aut per phænomenon pleni naturam nobis possimus repræsentare. Imo cum hìc agatur de natura, non prout est in se, sed quatenus nobis apparet; non repugnat, vacui et pleni phænomena simul existere, si non in eodem casu, saltem in casibus diversis. Et re quidem ipsa pari jure nobis repræsentare licet extensionem ex partibus *similaribus* et sine ulla vi compositam, vel constantem ex partibus dissimilaribus et vi aliqua præditam. In primo casu Leibnitiani vacui, in altero autem pleni notionem formamus. Hæc autem explicatio conferri debet cum iis quæ de spatio et extensione diximus in Metaphysica. Ceterum hæc omnia, quæ incautis nulliusque attentionis hominibus frivola videri possent, utilissima tamen

es-

esse atque gravissima in appendice demonstrabimus.

Inst. 3. : si vacuum existere fingamus, jam nulla est ratio, cur corpora hunc vel illum locum occuparent; cum enim similares sint atque uniformes singulæ spatii partes, sine ulla ratione sufficiente ad Orientem vel Occidentem locata fuissent corpora, atque hinc in hypothesi vacui creationis impossibilitatem arguunt Leibnitiani, cum Deus sine ratione nil facere possit. Unde sic argumentantur: admittenda non est opinio illa, quæ receptissimo rationis sufficientis principio repugnat; atqui cet. ergo. Resp. N. maj. In effectibus materialibus admittendum quidem esse rationis sufficientis principium ostendimus in Metaphysica; at in effectibus liberis locum habere non posse, ibidem demonstravimus. Porrò creatio mundi pendet ab omnipotenti Dei voluntate quæ est suprema et ultima rerum creatarum ratio. Itaque principium illud in effectibus liberis etiam humanis rejiciendum omninò est, imo in effectibus liberis etiam humanis rejiciendum omninò est; imo in effectibus etiam materialibus parcè admodum adhiberi debet; neque tantam, quam Leibnitiani prædicant, utilitatam habere potest; cum enim nos ut plurimum lateat rerum sufficiens ratio, firmissima non sunt argumenta, quæ ex ra-

ratione sufficiente desumi solent. Principium istud adversus nostram conclusionem minime valere certissimum est ; dum enim vacuum admittimus, de spatii natura nobis prorsus ignota nihil pronuntiare audemus, atque satis nobis est rejicere *plenum Cartesianum*, neque aliquid affirmare volumus de obscurissima controversia, an plenum et vacuum pro phænomenis haberi debeant, ut explicavimus in præcedenti responsione. Igitur probe observandum est discrimen inter hypothesim Cartesianam et Leibnitianam; hæc ultimam tum plenum, tum vacuum ut mera phænomena judicat, neque hæc opinio iisdem laborat difficultatibus quibus obnoxia est Cartesiana hypothesis. Ita adversus plenum Cartesianum objici solet motus impossibilitas, cujus quidem objectionis non tanta est vis quanta in vulgaribus Physicorum libris jactatur ; at in Leibnitiana hypothesi nulla est omninò. Dum enim dicunt Leibnitiani, corpus aliquod data velocitate datum spatium percurrere, motus et spatii non intelligunt realitatem in rebus existentem, sed dumtaxat ideam confusam, quam mobilis perceptio diversusque coexistentiæ ordo in anima producunt. Hoc modo interpretandum esse ajunt celebratissimum Zenonis argumentum de Achille et Testudine. Et quidem minus verisimile existimant eo insaniæ umquam

quam devenisse aliquem, ut motum, prout est phænomenon, negare potuerit, eumque à Zenone negatum fuisse opinantur in eo dumtaxat sensu, quod notiones spatii, loci, temporis motusque sensibilis velut imaginarias habuerit. Ceterum tantum abest ut ex hac rerum physicarum obscuritate tantaque opinionum varietate aliquid utilitatis præclarissimæ huic scientiæ detrahi possit; quin contra hinc derivari possint utilitates maximæ, quas in appendice demonstrabimus.

CONCLUSIO II.

Corpora omnia innumeris poris pertusa esse demonstratur.

I. Corpora omnia etiam ponderosissima infinitis propemodum poris seu foraminibus cribrata esse, manifestum est exemplo crystalli. Nulla in crystalli superficie assignari potest pars vel minima quæ non sit eximiè pellucida. Hæc autem pelluciditas summa intelligi nequaquam potest, nisi ad opposita superficierum puncta radiis lucis pateat facilis transitus. Hinc evidens est crystallum non solum innumeris poris scatere, sed nihil fere materiæ omninò solidæ continere. Inde autem ad examen revocari potest auri porositas; notum enim est experimen-

tis,

tis, pondus auri esse ad pondus crystalli sub eodem volumine ut 8 ad 1; quare quantitas materiæ in auro est ad quantitatem materiæ in crystallo ut 8 ad 1, ideoque aurum licet sit corporum omnium quæ nobis nota sunt, ponderosissimum, nihil fere habet materiæ, ac proinde infinitis propemodum poris pertusum est. Et quidem si aurum redigamus in tenues lamellas easque microscopio contemplemur, non solum apparent pellucidæ, sed variis modis implexæ innumerisque meatibus hiantes observantur. Simili ratione argumentando à *fortiori*, ut dicunt, demonstratur multo magis porosa esse corpora alia.

II. Præcedens demonstratio satis quidem esset; sed afferre non abs re erit experimenta nonnulla quæ utilissima esse possunt. Durissima etiam marmora à fluidis plurimis penetrantur, à spiritu vini, à spiritu terebinthinæ. Parare docuit Clarissim. Dufajus in Mon. Paris. ann. 1728 et 1732 liquores plurimos, qui compactissimos quoque lapides facile pervadunt suaque relinquunt vestigia. Hinc si liquores illi variis tingantur coloribus, atque in aliqua superficie ducantur lineamenta, per varia lapidis strata ad oppositam usque superficiem liquorum vi transmitti poterit imago quælibet suis picta coloribus. Notissima est Physicis perspiratio insensibilis quæ à primo obser-

va-

vatore Sanctorio, nomen *Sanctorianæ* retinuit; ex octo alimentorum libris quas aliquis uno die sumeret, quinque circiter hìc apud nos, ætate vegeta, vita commoda, victu moderato, per transpirationem elabuntur; hujus tamen transpirationis copia major vel minor est pro regionum varietate diversaque cœli temperie. Omnium animalium cutis scatet vasis innumeris, quorum aliqua *absorbentia*, alia *exhalantia* vocantur. Hæc vascula quæ sub squamulis *epidermidis* oblique patent, tantæ sunt subtilitatis ut computante Leenvvenhockio in spatio unius arenæ globulo non majori hient, plusquam 125000 hujusmodi meatus. Hi, *absorventes* scilicet, subtilissimis particulis ingressum; isti autem, nempe *exhalantes*, exitum permittunt. Ex hac corporis humani porositate intelligitur balneorum usus, per totam corporis superficiem introductis aquæ particulis ad sanguinem usque, cujus moleculas nimium cohærentes dividunt, et ad circulationem faciliores reddunt. Hæc summa porositas in arboribus plantisque omnibus observatur: vegetabilia omnia è terræ gremio per poros suos succum nutritium hauriunt et per totam substantiam quaquaversum propagant. Legenda sunt pulcherrima hac de re experimenta quæ habuit Clariss. Halesius in *Statica vegetavilium*.

Ne-

Neque prætermittenda est ovorum porositas, ex qua trahi potest utilitas non exigua. In suprema ovi recens exclusi superficie videre est substantiam quamdam lacteam; hæc autem progressu temporis evanescit per ipsos corticis poros elapsa, atque hinc ova nutritioni minus fiunt idonea, et tandem corruptioni obnoxia. Ut autem hæc materia servetur integra ovaque à putredine liberentur, hoc remedium excogitavit Reaumurius. Ovi putamen adipe ovina, vel etiam *vernice*, ut vocant, facta ex spiritu vini, ex omni parte imbuunt; hoc artificio materiæ lacteæ exitus præcluditur, et ova per plures menses integra servari possunt, non secus ac si recens fuerint exclusa; quod quidem in longinquis navigationibus in primis utile esse potest.

In vulgaribus Physices institutionibus describitur attramentum quod *simpaticum* vocant. Hoc autem modo parari solet. Lythargyri vncia sumatur, quæ cum aceti distillati vnciis quinque vel sex misceatur; ubi autem acetum lythargyro probe saturum est, illud per chartam de more percoletur. Hoc liquore qui *acetum saturni* à Chimicis appellatur, utendum est ad exarandos characteres, quos non magis conspicies quam si aqua scripseris; verum si adhibeatur liquor alius mox dicendo artificio comparandus,

jam

jam characteres pulchrè fiunt conspicui. Itaque capiatur auri pigmenti unica una, quæ cum calcis vivæ unciis duabus misceatur, mixturæ immittatur aqua, habebitur liquor alter, quo imbuenda est charta aliqua characteribus antea descriptis imposita, centum etiam interpositis chartarum foliis; statim hujus liquoris particulæ multa permeant chartæ folia, et characteres qui antea oculos fugiebant, præclare nigros legemus atque mirabimur.

Ex descriptis experimentis patet, innumeris poris pertusa esse dura cujuslibet speciei corpora; unum dumtaxat in corporibus fluidis experimentum afferre satis erit. Fluidorum porositas inde facile colligitur, quod fluida quædam se invicem imbibant. Si intra tubum in quo oleum vitrioli continetur, certa infunditur aquæ quantitas et volumina respectiva notentur, mixtione facta atque fermentatione sedata, volumen invenitur justo minus. In aliis mixtionibus plurimis idem se expertum fuisse testatur Muskembroekius; sed generatim fluidorum omnium porositas ex diversa eorum gravitate specifica facile patet. Itaque ex his omnibus sic concluditur: admittenda est summa illi corporum porositas, quam capta in omni corporum genere experimenta demonstrant; atqui cet. ergo.

Ob-

Objic. Si corpora omnia innumeris poris pertussa sunt, jam absoluta corporum pondera non cognoscimus; ignota enim est materiæ quantitas, ac proinde et ignotum pondus quod materiæ quantitati proportionale est: atqui id repugnare videtur: ergo cet. Resp. C. maj. N. min. Nullum inveniri potest corpus perfecte solidum, quod quidem si invenire liceret, jam inotesceret quantitas materiæ in singulis corporibus, illorumque proinde pondus absolutum, conferendo scilicet datam aliquam materiæ portionem cum pari volumine diversorum corporum. Quamobrem cum tali corpore perfecte solido careamus, superfluis conjecturis indulgent otiosi Philosophi, qui fictitiis hypothesibus materiæ quantitatem determinare conantur; imo totum hoc universum ex materiæ quantitate valde exigua constare probabilissimum est, et prejudicatas hac de re vulgi opiniones demostrabimus, ubi sermo erit de materiæ subtilitate.

Inst. 1. Si tanta corporum porositas, in errorem nos perpetuo inducerent sensuum organa, falsisque sensationibus nos perpetuo deciperet Deus; atqui hæc illusio divinæ veracitati repugnat: ergo. Resp. N. maj. Plurimæ sensuum fallaciæ per ratiocinationem philosophicam ad examen revocari atque emendari possunt, nec sensibus temere credendendum est: *non est judicium veritatis in sensibus*, inquit S. Augustinus. Itaque Deus ad sensuum errorem nos minime cogit. Præterea superbissimos sese ostendunt Philosophi, qui humanas cognitiones ultra justos limites longius extendunt; pauca admodum nobimus in rebus philosophicis; atque in hac cognitionum nostrarum imbecillitate non violatur divina veracitas, sed contra maxime commendatur optimi numunis infinita bonitas, cui placuit eas tantum hominibus concedere cognitiones, quæ ad justas vitæ hujus utilitates, et ad finem ultimum, vitam scilicet æternam perducere possunt.

Inst. 2. Si corpora tot poris pertusa sint, jam per omnium corporum poros perpetua effluerent corpuscula, per ipsos quoque corporis humani poros necessaria ad vitam fluida erumperent; atqui hæc perpetua effluvia repugnant omnino: ergo cet. Resp. N. min. Re quidem vera ex singulis corporibus perpetua exeunt effluvia, quæ quidem ponderis jacturam aliquando demonstrant, interdum autem nullam, pro varia effluviorum subtilitate. Hanc effluviorum tenuitatem fere incredibilem ostendunt corpora odorifera, quæ per plures annos, absque ullo, quod observationibus et experimentis conspicuum esse possit, ponderis detrimento, subtilissimas emittunt particulas, quibus organi olfactorii papillas pungi atque vellicari necessum est. Quod autem per corporis humani poros necessaria ad vivendum fluida non erumpant, id repetendum est ex diversa fluidorum pororumque figura, cujus eam oportuit esse varietatem, ut in sani corporis statu necesariis fluidis exitum prohiberet. Itaque rursus semperque laudanda est divina bonitas, quæ admirabilem corporis nostri structuram ita composuit ut vivere possemus, et quantum ipse Deus vellet, viveremus, ad immortalem vitam deinde transituri.

ARTICULUS II.

De extensione impenetrabili.

I.

IMpenetrabilitatem jam definivimus eam corporis proprietatem, qua fit, ut singula corpora omnibus aliis corporibus undequaque prementibus resistant, et quamdiu aliquem occupent locum, corpora alia ab eodem loco excludant. Porrò hìc sermonem habemus de impenetrabilitate *sensibili*, qualem per contactum sese manifestat. Non desunt quidem doctissimi viri, qui nullam accuratam continuitatem, aut soliditatem ad-

admittunt, omnemque contactum immediatum excludunt. Censent ergo materiam omnem et corpora constare punctis prorsus indivisibilibus et inextensis, quæ puncta semper à se invicem distent aliquo intervallo, quod imminui quidem possit in infinitum, sed non possit auferri sine punctorum penetratione; putant scilicet puncta illa prædita esse quibusdam viribus, quas *repulsivas* appellant, vires nempe illæ imminutis in infinitum distantiis augentur in infinitum, ac proinde puncta in minimis distantiis cogunt à se invicem recedere, donec tandem in certa distantia adhuc tamen minima nullæ sint, tum directionem mutent, et mutato nomine dicantur attractivæ. In hac igitur hypothesi punctorum vires crescunt atque decrescunt, mutataque directione migrant ex attractivis in repulsivas et contra. Illa tamen puncta viribus attractivis et repulsivis donata firmissimas possunt massas constituere, ubi nempe posita sunt in iis à se invicem distantiis, in quibus imminuta vel tantisper distantia ingens habetur vis repulsiva, distantia autem aucta ingens habetur vis attractiva. Itaque ex harum virium natura oritur impenetrabilitas, non ex immediato contactu. Porro quamvis in hac opinione nullus sit contactus immediatus, existit tamen contactus physicus et sensibilis; tantillæ enim sunt punctorum distantiæ, ut omnem sensuum subtilitatem longe fugiant. De hoc argumento iterum oblata occasione breviter nobis dicendum erit: quia vero minima punctorum intervalla sub sensus non cadunt, res omnes perinde se habent quoad effectus physicos, quos quidem in nostris institutionibus unice considerandos nobis proponimus, hinc de impenetrabilitate sensibili et physica dumtaxat hìc sermo est.

II. Hanc impenetrabilitatis seu soliditatis speciem perpetuò experimur; sive enim quiescamus, sive moveamur, continuò deprehendimus alia corpora, quibus nostrum corpus innititur resistere, et resistendo impedire, ne telluris superficiem profundius penetremus. Dum quotidiana necessitate corpora contrectare cogimur, resistentiam manu sentimus, atque ex hac resistentia originem habent explicatæ antea conflictuum leges. Hæc proprietas corporibus omnibus competit, sive fluida sint, sive firma, sive dura et fixa, seu mollia et facile mobilia; fluida enim in vasculis conclusa atque compressa, resistentiam ostendunt, ne quidem excepto aere fluido tenuissimo. Quamobrem licet sensu tactus illam non deprehendamus resistentiam, nisi in materiæ partibus, quæ possunt tactus organum afficere; tamen per analogiam naturæ hanc eamdem resistendi

vim

vim ad corpora subtiliora sensibus impervia transferre licet. Ceterum patet, hanc corporum proprietatem cum vi inertiæ conjunctam esse, et ex ea pendere: atque hinc intelligitur ratio, cur præter vulgarem consuetudinem ultimo loco tractatum sit de extensione impenetrabili, atque etiam de penetrabili, cujus notionem ex ipsa impenetrabilitate haurimus atque derivamus.

III. Ex hactenus explicatis manifestum est, impenetrabilitatem sive soliditatem à corporum duritie longe distinguendam esse, quod quidem non satis accurate præstiterunt aliqui. Et quidem durities est firma quædam partium connexio saltem *sensibilis*, qua fit ut partes illæ ægre divelli possint, et molem quamdam constituant, cujus figura difficulter mutatur. At soliditas, de qua hìc agimus, mollioribus durisque corporibus competit. Nec confundi debet soliditas geometrica cum soliditate physica. His gradibus progrediuntur Geometræ. Corpora primum considerant simul cum sensibilibus eorum proprietatibus à quibus deinde abstrahunt, et tandem corpora velut quamdam extensionis penetrabilis, divisibilis, et figuratæ portionem contemplantur. Itaque corpus geometricum nihil est aliud, quam extensionis pars aliqua undequaque terminata. Tres hujus extensionis dimensiones generali velut prospectu primum spectamus; verum ad facilius determinandas proprietates singulas, unicam deinde separamus dimensionem, longitudinem scilicet, alteram postea adjungimus; nempe latitudinem et superficiem consideramus, tandem tres dimensiones simul, hoc est, totam soliditatem complectimur. Hinc facile refellitur duplex censorum genus. Alii sunt Sceptici, qui inconcussa Matheseos theoremata labefactare conantur, eaque falsis hypothesibus, commentitiis nempe lineis et superficiebus innixa esse obganniunt. Alii sunt imperiti quidam Physici, qui veritates geometricas velut superfluis abstractionibus fundatas fastidiosè traducunt. Ad hunc ipsum articulum referri potest celeberrima in scholis controversia de extensionis divisibilitate in infinitum; hæc quæstio nobis vivideter *logomachia* aliqua laborare, quod quidem in disputationibus plurimis persæpe contingit. Dum disputant Philosophi de extensionis divisibilitate, vel rem intelligunt de extensione *abstracta* et *geometrica*, vel de extensione *physica*, et de qualibet materiæ portione. Rursus autem divisibilitas illa vel est *geometrica*, hoc est, in qualibet extensione concipi possunt, et revera existunt partes numero infinitæ, vel divisibilitas illa est *physica* et *actualis*, ita ut extensio quælibet in infinitum dividi possit. Hìc est

ce-

celeberrimæ quæstionis status, jam partes singulas explicabimus.

IV. Physicam et actualem extensionis divisibilitatem in infinitum locum habere non posse evidens est ; cum experimentis certissimum sit post certum divisionum numerum sensibus nostris evanescere omninò extensionis phænomena, ita ut subtilissimis etiam organis sese subducat. Si quæstio sit de extensione physica et de qualibet materiæ portione, jam tota res pendet ex philosophicis litibus, quæ adhuc sunt sub judice: etenim cum ignota nobis sit intima corporum natura, certò asserere non possumus corpora ex simplicissimis inextensisque particulis esse composita ; in hac autem opinione manifestum est, materiam non esse in infinitum divisibilem. At si eam teneamus aliorum Philosophorum sententiam, quæ materiæ portionem quamlibet etiam minimam velut continuam et extensam admittit ; jam certum est, materiam esse in infinitum geometrice divisibilem. Itaque tota quæstio pendet ex corporis natura, quam quidem in ultimo Physices articulo, quantum patitur rei obscuritas, meditabimur, nostramque ignorantiam fateri non dubitabimus. Interim sit.

CONCLUSIO.

Extensio quælibet in infinitum geometrice divisibilis demonstratur.

I. Extensio quælibet geometrice considerata nullas habet partes determinatas; cum enim tota extensionis geometricæ notio in sola partium coexistentium conjunctione posita sit, indeterminatus omninò est partium illarum numerus, nec extensionis notionem ingredi debet. Itaque pro arbitrio assumi potest partium numerus, nempe fingere licet, in extensione aliqua contineri decem, vel mille partes cet. prout pars aliqua pro unitate adhibetur; ita linea aliqua duas continebit partes, si pars dimidia pro unitate habeatur, decem, vel mille partes habebit, si pars decima, vel millesima usurpetur pro unitate: quare cum unitas illa sit omnino indeterminata, indeterminatus etiam erit partium numerus, quem proinde numerum in seriem infinitam abire concipi potest: igitur extensio continua erit geometrice divisibilis in infinitum.

Hanc eandem ratiocinationem in qualibet corporum dimensione obtinere evidens est. Et quidem corpus triplici dimensione præditum suos habere debet limites, atque terminos,

nos, alioquin finitum non foret, atque determinatum. Igitur corpus habere debet reales limites, qui binas tantummodo habeant dimensiones in longum, et latum: etenim utcumque exigua profunditas assumatur, ejus pars interior ad terminum, seu limitem pertinere non potest. Is autem terminus latitudine sola, et longitudine præditus dicitur *superficies*. Item superficies quævis finita suum habere debet terminum, qui simili argumento latitudine careat, et is dicitur *linea*. Eodem pacto lineæ terminus erit *punctum* nulla extensione præditum. Igitur superficies, linea, punctum non sunt materia, seu corpus, sed meræ corporis affectiones, quæ sine ipso, et per sese subsistere non possunt, nempe haberi debent tamquam termini, et limites materiæ *reales* quidem, neque à nostra imaginandi vi pendet, quod dimensiones finitæ terminum aliquem, seu limitem habeant, qui ad ipsas non pertineat. Itaque nec superficies erit pars corporis, nec linea pars superficiei, nec punctum pars lineæ, sed realis terminus; nec proinde corpus repetitione, et suprapositione superficiei, nec superficies repetitione lineæ, nec linea repetitione puncti, sed ducta quodam continuò generabitur. Hinc statim patet, binas quasque superficies vel in unica coalescere, et congruere, vel corpus aliquod tripiici dimenmensione præditum intercipere, binas lineas intercipere superficiem : bina puncta intercipere lineam : nec ullam proinde superficiem superficiei, lineam lineæ ita proximam esse, aut punctum puncto ita vicinum, ut nihil mediæ distantiæ intersit. Ita si corpus, quod continuum concipiatur, et solidum, sectione quadam plana secetur, evidens est, alteram sectionem priori ita proximam fieri non posse, ut nihil corporis inter ipsas sit, sed nova sectio vel aliquid intercipiet, vel cum priore penitus congruet. Intervalli autem hujus medium aliquod erit, quod nimirum cum neutro extremo congruere potest, nec ipsa itidem extrema congruant, intervallo omni sublato : quare dimidii intervalli rursus haberi potest pars dimidia, et ita deinceps in infinitum ; ac proinde habebitur necessario divisibilitas in infinitum.

II. Eamdem extensionis divisibilitatem in infinitum evincunt argumenta geometrica innumera. Infiniti numero duci possunt circuli, alii aliis majores, qui eamdem rectam, et se invicem contingant in unico puncto, ideoque in infinitum dividere possunt finitum intervallum, quod inter tangentem, circulumque minimum intimum comprehenditur. Inter easdem parallelas duci possunt parallelogrammi, alii aliis longiores in infinitum, exiguo utcumque parallelogrammo

æqua-

æquales. Ex longissimæ cujusvis lineæ rectæ divisionibus quotcumque agi possunt lineæ parallelæ, ita ut extremæ transeant per extrema puncta rectæ cujusvis utcumque exiguæ, quam omnes secabunt in totidem æquales partes, quot partes illa longissima recta habebat, nec umquam exhaurietur exiguum illud intervallum, quod semper superest, nec rectæ congruent. Alia ejusmodi sexcenta adhiberi solent, quæ vim habent summam, et severam demonstrationem efformant pro spatii, et extensionis divisibilitate; si enim continua realisque extensio admittatur, jam superficies, linea, punctum non sunt mentis nostræ figmenta, sed realis extensionis reales termini. Nihil tamen ex Geometria petitum evidentius, faciliusque demonstrat extensionis divisibilitatem in infinitum, quam illud Geometris notissimum, quod nempe datis binis rectis possit semper inveniri tertia continuè proportionalis post ipsas. Si enim assumatur recta quævis utcumque parva, tum alia utcumque magna, quæ illam contineat vicibus quotcumque, semper invenietur tertia post hanc, et illam quam hæc totidem vicibus contineat, ideoque continebit hæc tot partes, quod libuerit; et quemadmodum nullus erit limes, ultra quem augeri non possit hæc magna linea, ita nullus itidem erit, ultra quem

quem illa tertia imminui non possit.

Hæc quidem argumenta ex primis Geometriæ elementis desumpta sunt ; sed iis quoque consulendum , qui rebus geometricis haud assueti demostrationum evidentiam facile non percipiunt ; quare libet argumentum unum physicum ex motu petitum proferre. Si extensum constaret ex indivisibilibus, æque veloces forent motus omnes , nec minus spatium eodem tempore percurreret segnissima testudo , quam velocissimus cursor : etenim non posset testudo minus spatium eodem temporis puncto percurrere ; indivisibile enim ponitur spatium temporis puncto indivisibili descriptum , ac proinde cum repugnet indivisibile alio indivisibili minus , spatium minus à testudine percurri repugnat , quare spatium æquale describet. Idem dicendum de alio quovis tempore , ac proinde spatia æqualia ab utroque semper describentur, et cursor velocissimus non plus conficiet spatii , quam testudo tardissima , quod est absurdum. Plurima alia ejusdem generis absurda ex eadem indivisibilium hypothesi colliguntur ; verum quæ dicta sunt , sufficiant. Ceterum evidens est , præcedentes demonstrationes valere etiam pro materiæ divisibilitate , si materia continuam extensionem habere ponatur : etenim singulis spatii partibus singulæ respondebunt materiæ

par-

partes, quæ proinde non secus, ac spatium erunt in infinitu divisibiles. Verum in hypothesi Leibnitianorum, et aliorum Philosophorum, qui inextensa, et simplicissima materiæ puncta admittunt, jam materia non erit divisibilis in infinitum, et ideo hanc nostram conclusionem de sola extensione enuntiavimus.

Objic.: si extensio divisibilis esset in infinitum, in quovis extenso existeret numerus partium infinitus, quo posito maximum sequeretur absurdum. Nam si numerus partium infinitus in quovis extenso daretur, nullus haberi posset motus, ne quidem per minimum spatium, cum in minimo spatio numerus partium sit infinitus: ergo cet. Resp. N. sequelam ant. et cons. Quamvis numero infinitæ sint spatii percurrendi partes, eæque nonnisi tempore aliquo à mobili percurrit possint; illæ tamen partes non sunt finitæ magnitudinis, sed infinitè parvæ, hoc est, ut vocant, *infinitesimæ*. Hinc, ut percurrantur, non egent tempore finito, sed tantum particula temporis infinite parva, nisi fingamus, mobilis celeritatem esse infinite exiguam. Ratio est, quia tempus non secus ac spatium dividi potest in partes multitudine infinite parvas. Itaque si mobilis celeritas finita sit, quælibet infinite parva spatii particula in homologa temporis particula à mobi-

bi-

bili absolvetur, ac proinde totum aggregatum multitudinis infinitæ particularum infinite parvarum spatii, seu totum spatium finitum describetur à corpore in aggregato multitudinis infinitæ tempusculorum infinitæ parvorum, seu tempore finito: quare falsum est, posita divisibilitate in infinitum, nullum haberi posse motum, ne quidem per minimum spatium, sive minimum spatium nonnisi infinito tempore percurri posse. Quod ut magis declaretur, probè attendi debet, jam antea fusius explicata temporis, motus, spatiique analogia. Tres illæ notiones ita necessario sunt conjunctæ ut una alteram indivulso nexus contineat. Nulla extensionis alicujus determinatæ clara idea haberi potest, nisi nobis exhibeamus mobilis alicujus velocitatem datum spatium dato tempore percurrentis; et viceversa mobilis alicujus velocitatem clare intelligere non possumus, nisi ope spatii dato tempore descripti. Hinc fit, ut ex tribus temporis, velocitatis, spatiique conditionibus, datis duabus, tertiam inveniant Geometræ, ut explicavimus in articulo de motu.

Inst. 1.: si extensio contineat partes numero infinitas, infinitum contineretur in finito; extensio enim finita haberet partes multitudine infinitas; quod quidem absurdissimum est: ergo cet. *Resp.* dist. ant. extensio

fi-

finita contineret partes numero infinitas, sed infinite parvas, C. ant., partes numero infinitas et finitæ magnitudinis, N. ant. quare N. cons. Hæc objectio falsa laborat hypothesi, quod nempe quantitas aliqua ex partium numero tantum æstimari debeat; cum tamen certissimum sit, eam ex partium multitudine ei magnitudine simul æstimandam esse. Igitur quantitas finita continere quidem non potest partes finitas numero infinitas; potest tamen dividi in partes numero infinitas et infinite parvas. Et quidem si partium magnitudo eadem ratione minuatur, qua earum numerus augetur, totum ex his omnibus partibus compositum idem manebit, ac proinde finitum erit, etiamsi partium numerus augeatur in infinitum. Exempla plurima suppedita Arithmetica, fatentibus ipsis adversariis, ubi nnmerorum series est infinita, manente tamen summa serie finita. Ita demonstrant Arithmetici seriem in infinitum continuatam $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}$ cet. unitati æqualem esse; at nemo negabit seriem hanc infinitas partes habere. Verum ut huic argumento aliisque id genus plurimis paretur responsio, tollenda est omnis vocabuli ambiguitas. Dum extensionem in infinitum geometrice divisibilem esse demonstramus, quæstio

tio minime est de *actuali* infinitæ divisionis possibilitate, hoc unum intelligi volumus, in minima qualibet extensionis parte minores alias concipi posse particulas, atque hoc ipsum est, quod divisibilitas in infinitum appellari solet; nomine enim infiniti venit id omne, cujus limites assignari non possunt.

Inst. 2.: si extensio quælibet infinita dividi posset in partes numero infinitas, magnitudo quantumvis exigua in tot partes dividi poterit, ac quælibet alia quantumvis maxima. Itaque æquabitur minimæ; imo omnes quotcumque magnitudines utcumque diversæ, æquales erunt utpote ex æquali partium numero, nempe infinito, constitutæ; quod quidem absurdum vitari non potest, nisi dicatur magnitudines esse infinitas alias aliis majores; hic autem infinitus infinitorum ordo à ratione omnino alienus videtur; ergo quocumque se vertant hujus opinionis patroni, multis sese implicant ambagibus et absurdis. Resp. N. seq. ant. et cons. Responsio ad primam objectionis partem patet ex responsione præcedenti: etenim quodnam est absurdum, duas magnitudines inæquales in eumdem partium numerum dividi? An quia partes sunt numero æquales, composita sunt æqualia? Si hoc verum esset, verum itidem foret pedem

di-

digito æquari; pes enim non secus ac digitus in duodecim partes dividitur. Quod spectat alteram objectionis partem, diversum nempe infinitorum ordinem, res est difficilior Ut autem hæc objectio, et tota simul quæstio in bono lumine collocetur, sublimem quantitatum infinitarum et infinitesimarum doctrinam, quantum per harum institutionum præscriptam facilitatem nobis facere licet, explicabimus.

Quantitatum infinite parvarum nomen hactenus adhibuimus, verum id fecimus brevitatis causa, et ut receptum servaremus loquendi usum. Et quidem nulla quantitas in se spectata et sine nostro cogitandi modo, aut infinite parva est, aut infinite magna, sed in se determinata est et finita, quod facile patet ex demonstratis de extensionis divisibilitate. Et certe data quavis magnitudine utcumque parva vel utcumque magna; alia semper minor in primo casu, et alia semper major in casu altero haberi potest; nobis enim licet quantitatem exiguam, vel ingentem considerare, primamque minuere, elteram augere, abstrahendo animum à quovis limite determinato. Priorem quantitatem dicimus *infinitesimam* vel *infinite parvam*, quantitatem alteram appellamus *infinitam* vel *infinite magnam*, accipiendo infinitum pro indefinito, quod diligenter notandum est; cum infinitum nusquam sit in rebus, sed in nostro concipiendi modo. *Finitam* dicimus quantitatem quamvis, quæ vel non concipitur variabilis, vel si concipitur variabilis, ultra quosdam determinatos limites variabilis non consideratur; rationem, quam duæ quantitate infinitæ habent ad se invicem, *rationem finitam* vocamus. Unam è quantitatibus quæ imminutæ concipiuntur ultra quoscumque limites et *ad arbitrium assumtam*, dicimus infinitesimam *primi ordinis*. Si sit quantitas alia, quæ ad hanc infinitesimam habeat rationem, quam ipsa infinitesima habet ad quantitatem finitam, quantitatem hanc dicimus infinitessimam *secundi ordinis*, et ita deinceps. Viceversa, si quædam quantitas sit ad finitam quantitatem illam, ut illa ad infinitesimam primi ordinis, eam dicimus infinitam *primi ordinis*, et eodem pacto superiores infinitorum ordines definivimus. Hæc autem quantitatum infinitessimarum notiones sunt omnino distinctæ.

His explicatis jam patet, diversos esse infinitorum et infinitessimorum ordines; nam circuli diameter, quæ finita est, se habet semper ad chordam ut est corda ipsa ad abscisam; ac proinde si in circulo fingatur chorda infinite parva primi ordinis, erit abscissa infinitesima ordinis secundi. Si autem chor-

chorda sit infinitesima ordinis secundi, erit abscissa infinitesima ordinis tertii si chorda si infinitesima ordinis tertii, erit abscissa infinitesima ordinis quarti et ita deinceps. Itaque ex infinitesimis primi ordinis statim derivari evidens est quantitates infinitesimas aliorum ordinum, ac proinde etiam varios finitorum ordines. Hinc non satis claram hujus doctrinæ cognitionem habuisse videtur D. Nivventit, qui concessis infinitesimis primi ordinis, alios infinitesimorum ordines rejecit. Id ergo probe recordandum est, infinite parvas et infinite magnas quantitates à nobis quidem admitti; sed in eo dumtaxat sensu, quod quantitates illæ sint indefinitæ, hoc est, ut augeri vel minui concipiantur ultra quoscumque limites. Constituta autem talium quantitatum definitione accurata, alteri objectionis parti satisfactum est, atque etiam aliis objectionibus plurimis, quæ ex quantitatum illarum natura non satis explicata desumi solent.

Superest, ut de earumdem quantitatum usu, quem quidem in nostra Physica aliquandò usurpavimus, breviter aliquid adjungamus. Usus omnis positus est in comparandis inter se quantitatibus finitis, earumque rationibus et affectionibus determinandis. Si comparatis inter se binis quantitatibus finitis, negligantur differentiæ, quæ ea-

earumdum quantitatum respectu sunt infinite parvæ, vera æqualitas haberi debet, nec ullus ne infinitesimus quidem error committi potest: etenim finitæ quantitates dicuntur illæ, quæ sunt in se determinatæ; infinite autem parvæ eæ vocantur, quæ concipiuntur minui ad arbitrium ultra quoscumque limites in se determinatos. Porro iis neglectis quantitatibus, nullus error ne quidem infinitesimus oriri potest; si enim inæquales essent infinitæ quantitates illæ, haberent differentiam aliquam in se determinatam. Quoniam autem quantitates infinitesimæ minui possunt ultra quoscumque limites id se determinatos, omnes simul poterunt esse minores differentia qualibet determinata. Itaque minus accurate loquuntur aliqui, dum dicunt, negligi posse quantitates infinite parvas, quia error est infinite parvus; revera enim nullus est. Igitur tota res huc reducitur, ut nempe, ad demonstrandam duarum quantitatum æqualitatem, ostendatur differentiam esse assignabili qualibet differentia minorem. Hanc autem methodum accuratissimam omnino esse, nullique errori obnoxiam, evidens est; tota enim pendet ex hoc Euclidis theoremate, nempe: *quantitates duæ sunt æquales, si differentia sit quantitate qualibet assignabili minor*; etenim si forent inæquales, differentia posset asignanari; quod est contra hypothesim. His fundamentis innititur calculus *infinitesimalis*, qui *primarum* et *ultimarum rationum* vel etiam *limitum* calculus cum Nevvtono rectius appellari potest.

ARTICULUS III.

De figurabilitate.

I.

Figurabilitas appellatur illa corporum proprietas, qua fit, ut externa illorum superficies in longum, latum, et profundum certo modo extendatur, atque terminetur, Intricatissimæ à Philosophis proponi solent quæstiones duæ: 1. est; an minimæ elementares particulæ, ex quibus corpora componuntur, perpetuam, ac determinatam habeant figuram, quæ nulla naturæ vi frangi possit: 2. autem est: an corpora per diversam minimarum particularum naturam specie distinguantur; an per solam earumdem particularum dispositionem. Sed quidquid sit de illis duabus quæstionibus speciali conclusione mox explicandis, certum est, corpora in tenuitatem immanem reduci posse; quod paucis utilioribus experimentis demonstrare satis erit. Auri ductilitatem fere incredibilem contemplemur, et ad calculum revocemus. Aurum mallea tenditur, et in lamellas extenditur. Pes cubicus auri pondus habet librarum 1349, seu unciarum 21584; nam 16 unciæ libram Parisiensem constituunt. Jam vero linea eamdem habet rationem ad pedem, quam habet 1 ad 144: quare si numeri ad potentiam cubicam evehantur, erit linea cubica ad pedem cubicum, ut 1 ad 2985084, hoc est pes cubicus lineas cubicas 2985984 continet; sed pes cubicus auri pondus habet unciarum 21584; ergo si per hunc numerum antecedens numerus dividatur, quotus $38 + \frac{7392}{24584}$ exprimet, quod lineas cubicas uncias auri comprehendat. Jam si ex uncia auri formetur cubus, illius latus seu altitudo erit $5 + \frac{2}{6}$; hæc enim est radix cubica numeri præcedentis, quam proxime: quare si numerus hic in seipsum ducatur, erit basis cubi $26 + \frac{25}{36}$ linearum quadratarum. Præterea sciendum est, artifices, qui aurum tundunt, ac in tenues lamellas extendunt, unciam auri ita attenuare et in tam

am-

amplam redigere laminam, ut ex illa commode ducant 2730 bracteas, quarum latera quaquaversum sunt linearum 34, neglectis segminibus, quæ tamen sunt ponderis dimidii. Jam si bractearum latera sunt 34 lin. erunt in bractea qualibet lineæ quadratæ 1156; ita ut, si bracteæ omnes in unam denuò coeant superficiem, habeatur superficies linearum quadratarum 3155880, cui numero si vel tertia pars pro segminibus addatur, id est, si addas 1051960, patet opifices ex unica auri uncia efficere 4207840 lineas quadratas visibiles; sed hujus superficiei amplitudo nempe linearum quadratarum 4207840 continet basim istius cubi, nempe $26 + \frac{25}{36}$ vicibus 159092: ergo uncia auri efformata in cubum $5 + \frac{1}{6}$ lineis alium, dividitur in lamellas quadratas 159092. Porro quodlibet lineæ quadratæ latus instrumenti acuti mucrone in 6 saltem partes dividitur, ac proinde integra quadrata linea in partes 36: quare si numerus linearum quadratarum 4207840 multiplicetur per 36, nempe per numerum partium in quavis linea facile visibilium, productum 151482240 exprimet numerum partium, quæ in unica auri uncia conspici possunt,

sunt; quod prorsus mirum videbitur.

Sed longe major apparet auri ductilitas, si tenuissimæ aureæ lamellæ argentum ac filum sericum circumvestientis crassities examinetur. Artifices massam argenteam sumunt ponderis 8 libr. quam componunt in cylindricam figuram, altitudinis duorum pedum cum digitis 8, seu lin. 384, cujus peripheria 2. dig. cum lin. 9. seu 35. lin. quæ si ducatur in altitudinem cylindri, superficies prodibit 13440. lin. quadr. superficiem hujusmodi aureis bracteis obducunt, quarum pondus semiunciam adæquat. Tum cylindrum sic inauratum per diversa laminæ chalybeæ foramina traiciunt, et massam illam ita extendunt, ut capillarem subtilitatem imitetur, et in ipsa tamen superficie inaurata maneat; atque hinc massa cylindrica in tenuissimum filum traducitur, cujus fili pondus grana 36 adæquat; in 150 pedes extenditur, ac proinde totus cylindrus in filum 307200 pedes longum extendi poterit; reducatur enim cylindri pondus in grana; libra gallica 16 uncias continet, hæc drachmas 8, drachma 3 scrupulos, hic 2 obulos, obulus 12 grana; pondus ergo 8. libr. continebit grana 73728. Itaque ad habendam longitudinem, ad quam totus cylindrus produci potest, dicatur 36: 150 = 73728 ad quartum proportionalem 307200, atque hæc erit longitudo tenuissimi fili: ergo semiuncia

au-

auri in tot visibiles partes distribui potest, quot lineas complectuntur pedes 307200, nempe 44236800 lineas; sed linea in 6 visibiles partes ad minimum dividi potest; quare si 44236800 numerus linearum quæ in 307200 continentur, in 6 ducatur, numerus 265420800 designabit partes visibiles in dimidia auri uncia. Verum postquam filum per angustissimum laminæ chalybeæ foramen trajectum est, inter duas rotas chalybeas lævigatissimas complanatur, et cylindrus in binas planities parallelogrammas reducitur, ac proinde numerus partium quadruplo major distingui poterit in tenuissima lamella quæ tamen semper continua et inaurata apparet; itaque numerus partium in auri semiuncia oculo inermi conspicuarum erit 1061683200. Postquam massa cylindrica in prædictam longitudinem exporecta est, tenuissima acquirit crassitiem, ita ut illus diameter vix æqualis sit crassitiei auri longissimam argenteam lamellam vestientis, quæ quidem crassities à Clariss. Reamurio statuitur non major $\frac{1}{274681}$ lineæ. Imo si consideremus auri bracteas non ubique ejusdem crassitiei, sed in aliquibus locis duplo graciliores apparere, crassities auri argenteam lamellam obducentis in quibusdam partibus

ma-

major non erit $\frac{1}{100000}$ unius lineæ ; quæ quidem crassities minor adhuc fieri poterit, si argentea lamina sic inaurata rotis diligentius fuerit subacta. Rem longius describere et calculi apparatum subjicere placuit, ob mirandam omninò et stupendam artis subtilitatem.

Quamvis tanta non sit vitri ductilitas, hæc tamen Philosophorum meditationibus dignissima est, et artificum laboribus aliquando fortasse perficienda. Notissimum est artificium, quo vitrum in longissima subtilissimaque fila protrahi solet. Vitri frustulum flammæ admovetur, vi ignis subigitur et in mollem veluti ceram redigitur. Quo facto, uncinus vitreus fuso vitro adhibetur et deinde retrahitur; uncino autem retracto abducitur filum vitreum massæ vitreæ perpetuò adhærescens; filum illud uncino interceptum rotæ circumponitur, et rota rapidissime pro arbitrio circumagitur, atque fila vitrea ipsam rotæ circumferentiam perpetuò amplectuntur. Tanta autem aliquando obtinetur filorum subtilitas,ut araneæ telæ tenuitatem æmulentur. Observavit Clarissimus Reaumurius, cum filorum tenuitate ipsam quoque flexibilitatem crescere, ita ut vitrea fila ad majorem subtilitatis gradum perducta pannos at-

que

que hominibus vestimenta præbere possent. Hujus utilitatis specimen aliquod videre est in puerilibus ornamentis ex mobili vitreorum filorum fasciculo contextis; talia enim ornamenta capiti imposita capillorum instar flectuntur, nec franguntur æris motu agitata. Plurima alia experimenta legere est in vulgaribus Physicorum libris, qui omnium manibus teruntur.

II. Admiranda planè est materiæ subtilitas, ad quam ars pervenire potuit; sed longe major est, et omnem imaginandi vim superat particularum tenuitas, quam in corporibus nonnullis ipsa natura demonstrat. Lucis radios, corporaque odorifera iterum contemplari satis esset; sed jucundissimum argumentum alio exemplo illustrare non abs re erit. Solertissimus naturæ indagator Leevvenhockius in aqua per aliquot dies asservata exquisiti microscopii ope, minima observavit animalcula, quorum mille centena millia vulgaris arenæ globuli magnitudinem non excedunt. Jam cum animalculum quodvis sit corpus organicum, perpendamus paulisper, quam delicatæ, et subtiles esse debent partes ad ipsum constituendum et ad vitalem actionem conservandam necessariæ. Haud facile concipitur, quo pacto in tam angusto spatiolo comprehendi possint cor, quod vitæ fons est, musculi ad motum necessarii, glan-

glandulæ ad liquores secernendos, ventriculus, et intestina ad alimenta dirigenda, et alia membra innumera, sine quibus animal esse non potest. Præterea cum singula memorata membra sint etiam corpora organica, aliis carere non possunt partibus ad suas actiones necessariis. Constabunt ergo ex fibris, membranulis, tunicis, venis, arteriis, nervis et his similibus canaliculis numero fere infinitis, quorum exilitas imaginationis vires longe superat. At his infinite propemodum minores esse debent partes fluidi, quod canaliculos decurrit, nempe sanguis, lympha, et spiritus animales, quorum in grandioribus animalibus incredibilis est subtilitas. En quanta in vilissimo animalculo portenta, divinæque omnipotentiæ argumenta! Ex tanta, et fere infinita *actuali* materiæ divisione evidens omnino fit, à præjudicatis vulgi opinionibus longe differre mundi hujus structuram. Sibi facile persuadet imperitum vulgus, corpora magnam continere materiæ quantitatem, illorumque partes siugulas stricte continuas esse; cum tamen certissimum sit, corpora etiam compactissima exiguam omnino et fere nullam habere materiæ portionem, eamque in tenuitatem incomprehensibilem esse divisam.

Neque hic prætermittendum est eximium problema, quod analytice solvit Clariss. Kei-

Keillius in institutionibus astronomicis. Problema est hujusmodi: *data utcumque exigna materiæ particula eam per spatium utcumque magnum ita distribuere, ut nusquam habeatur spatiolum vacuum majus data mensura utcumque exigua.* Facili ratiocinatione rem intelligere licebit. Fingamus pollicem cubicum materiæ solidæ in sphæram cavam ad Saturnum usque extendi, quod certe non repugnat, cum materia sit in infinitum divisibilis. Hæc autem sphæra exiguam habet crassitiem, omnino tamen solidam. Jam sphæra ad minima intervalla minimisque poris pertusa fingatur, ita ut pororum distantia et magnitudo datam mensuram utcumque exiguam non excedant. Tum ex decidua materia, quæ poros antea occupabat, componatur iterum sphæra, que priori sphæræ sit quamproxime contigua. Hæc autem secunda sphæra minimis poris rursus perforata intelligatur, atque ex materiæ ramentis tertia fiat sphæra, et ita deinceps. Manifestum est, hoc modo obtineri posse sphæram integram ex aliis sphæris ita compositam, ut eadem maneant phænomena, quæ in præsenti hujus mundi structura cernimus, eademque servetur apparens corporum continuitas. Jam vero ad propositas quæstiones duas redeamus. Cum itaque corpora quævis, corporumque partes naturæ artisque viribus in minima corpuscula

dis-

dissolvantur, à Philosophis quæsitum est, num primigeniæ corporum particulæ certos habeant limites, ita ut perpetuam servent figuram, atque ex sola homogenearum particularum conjunctione variaque dispositione repetenda sit diversa corporum natura, vel species. His præmissis sit.

CONCLUSIO.

De perfecta minimarum particularum duritiæ, diversaque illarum natura nihil affirmandum videtur.

Prob. 1. pars: nihil certo affirmare licet de illis quæstionibus philosophicis quæ nulla observatione, nullo experimento, nullaque satis valida ratiocinatione probari possunt; atqui cet. ergo. Prob. min. quod spectat observationes, et experimenta, res est evidens, cum minimæ etiam corporum particulæ, quæ ab elementorum tenuitate, si quam habent, longissime distant, nullis observationibus vel experimentis subjici possint. Neque etiam metaphysicis rationibus quidquam evinci potest. Re quidem vera nullum corpus perfecte durum in hac rerum universitate novimus; durissima quæque corpora in pulverem franguntur, ex silicibus ipsoque adamante fumum exprimunt solares radii in speculi ustorii foco collecti. Sed quid inde concludi

po-

poterit de primogeniis corporum elementis? Nihil sane. Neque falsa demonstrari potest eorum Philosophorum hypothesis quæ simplicissima materiæ elementa atque inextensa admittit, ut jam observavimus, et in sequenti articulo fusius explicabimus. Nec etiam invicte refelli possunt contrariæ opinionis patroni; quod enim de continuitatis lege proferri solet, demonstrationis vim non habere, ex objectionum serie manifestum fit.

Prob. 2. pars, quæ ex prima omninò pendet. Et quidem si nos lateat, utrum elemenra sint simplicissima, an extensa; utrum sint perfecte dura, an artis et naturæ viribus divisibilia, multo minus de elementorum natura aliquid pronuntiare licet. Æque felici successu per diversam elementorum naturam, vel per diversam elementorum similium dispositionem explicari posse videtur diversa corporum species. Et quidem mirum est, quantam specierum varietatem induant corporum partes variis motibus vexatæ atque mutatæ. Ad hoc argumentum referuntur quæ diximus in appendice ad caput tertium, atque de eadem re nonnulla adjungemus in objectionibus. His rationibus inductus Cartesius dicere ausus est: *da mihi materiam et motum, mundumque componam.* Hic autem data occasione, depellenda est conjecta in Cartesium calumnia, qua nulla gravior

es-

esse potest. Dum hæc verba protulit Car-te sius, materiæ creationem, et supremi motoris necessitatem inficiatus non est magnus ille Philosophus, sed nihil aliud significare voluit, nisi supremum rerum omnium auctorem figura dumtaxat et motu usum fuisse ad diversas corporum species distinguendas. Quod quidem breviter observatum volui, ut à falsis criminationibus religiose abstineant Auditores nostri ad pietatem magis quam ad scientias instruendi.

Obiic. adversus primam partem: Physicis notissima est lex *continuatis*, qua jûbetur nihil in rerum natura fieri per *saltum*, ita ut corpus ex aliquo statu ad alium transire non possit, nisi omnes percurrat status intermedios. Vi hujus legis corpus è motu ad quietem statim transire non potest, nisi singulos velocitatis decresentis gradus trajiciat. At si aliqua sint corpora perfecte dura, jam violatur lex illa: etenim si corpora duo perfecte dura æquali motus quantitate in partes contrarias sibi invicem occurant, ambo post conflictum statim quiescunt; si autem inæqualis fuerit motuum quantitas, corpus quod minorem habet velocitatem, directionem statim mutat, ut patet ex demonstratis conflictuum legibus. Unde sic argumentantur. Existere repugnat corpora illa, quibus admismissis violatur lex continuitas; atqui cet. ergo. Resp. N. maj. lex continuitatis tota innititur principio rationis sufficientis. Sic enim ratiocinari solent, qui hanc tuentur legem: status, in quo reperitur ens aliquod, suam habere debet rationem sufficientem, cur in tali statu existat potius, quam in alio. Hæc autem ratio contineri non potest, nisi in statu antecedenti. Igitur status antecedens continebat aliquid, ex quo natus est status subsequens; illi nempe duo status ita sunt inter se conjuncti, ut nullus possibilis sit status intermedius. Si enim inter statum præsentem et antecedentem aliquis foret status possibilis, primum statum natura mutasset nondum à secundo statu determinata, ac proinde sine ratione sufficiente. Hæc est vulgata apud Leibnitianos ratiocinatio. Verum de principio rationis sufficientis sæpius sermonem habuimus, illudque ita explicavimus, ut in præsenti casu minime valere possit. Itaque lex continuitas huic principio innixa tamquam universalis naturæ lex demonstrari non potest. Quidquid sit de lege illa in magnis corporibus observata, eandem in minimis corporum elementis vigere, nequaquam evincunt instituta in magnis corporibus experimenta, nisi ostendatur, ex ipsa corporum natura continuitatis legem profluere, quod certe nemo affirmaverit.

Quamvis autem perfecta elementorum durities nullo satis valido refelli possit argumento, hanc tamen ad intelligendam et explicandam specierum varietatem minime necessariam esse credimus. Neque enim vim maxima habere videntur hæc, quæ vulgo afferri, solent, nempe: natura semper est uniformis; ex iisdem seminibus eædem oriuntur plantæ; eadem nascuntur animalia; novæ non generantur corporum species: porro inquiunt Nevvtoniani, si dura non sint materiæ elementa, jam vehementissimis frequentissimisque naturæ motibus jactata perpetuo frangerentur. Hinc minimæ corporum particulæ modo subtiliores, modo crassiores factæ, modo duriores, modo molliores varias constituerent species, naturaque universa faciem perpetuo mutaret. His autem rationibus hæc in promptu esse potest responsio. Ad servandam specierum uniformitatem satis esset minima materiæ elementa nullis frangi viribus *actu* existentibus, quamvis tamen majoribus viribus superari possent. Præterea elementa illa viribus licet naturæ frangenda, suam tamen servare possent propriam unicuique speciei naturam. Itaque argumentum illud ponit, quod est in quæstione, nempe specierum diversitatem ex sola partium dispositione pendere; quam quidem hypothesim mox expendemus.

Obiic.

Objic. adversus secundam partem. Per diversam similium particularum coagmentationem et dispositionem simplicius atque elegantius explicatur specifica corporum diversitas. Et quidem infinita propemodum varietate, formam mutat eadem materiæ portio. Sic metalla liquantur, ignis vi dissolvuntur, corpora fluida imitantur, in minutissimum cinerem rediguntur, in alia transeunt corpora, variasque constituunt species. Hanc sententiam confirmare videntur colorati lucis radii prismate vitreo separati; ii enim nullam coloris diversitatem induunt: quare minima lucis corpuscula, quæ coloratum constituunt, sibi sunt simillima. Ex sola partium dispositione fit, ut corpora certos colorum radios reflectant, propriumque colorem exhibeant. His positis, sic ratiocinantur plerique Physici; tenenda est sententia illa, quæ divinæ simplicitati magis est consentanea, et innumeris experimentis confirmatur; atqui cet. ergo. Resp. N. min. quamvis infinita sit Dei simplicitas, perfectissimusque illius operandi modus, exigui tamen ponderis æstimari debent argumenta, quæ inde promere solent Philosophi, qui divinorum operum simplicitatem atque perfectionem ex limitato atque imperfectissimo nostro intelligendi modo metiri præsumunt: etenim quæ nobis videntur composita, simplicissima omnino sunt

Deo, qui omnia unico et simplicissimo intellectus actu cognoscit, itemque unico, et simplicissimo voluntatis actu decernit atque exequitur.

Quod reliquas spectat objectionis partes, certum quidem est, ex varia partium dispotione pendere plurimas *sensibiles* corporum species; verum quæstio non est de corporum *massis*, sed de minimis *moleculis*, quæ *elementa* solent appellari. Itaque mixtæ corporum species mutantur quidem, si naturæ, vel artis viribus separari, vel aggregari possint componentes particulæ. Verum diligentissimis experimentis compertum est, immutatas manere corporum species nonnullas, etiamsi vehementius torqueantur, variisque modis utcumque vexentur. Ita ex puriori aqua nil, nisi aquam, ex igne nil, nisi ignem, elicere valent Chymici. Porro etiamsi corpora omnia, quæ chymicis, physicisque experimentis agitari possunt, in varias transirent species, ad minimas corporum moleculas trahi non possunt experimenta illa; id ergo multo minus facere licebit, si corporibus quibusdam nulla mutatio vi etiam maxima inferri possit. Quod autem de diversis colorum radiis in objectione adjungitur, hoc unum probat pro varia corporum textura, variaque partium dispositione diversos reflecti colorum radios; at inde minime colligitur, simimillima esse radiorum corpuscula. Prolixiori responsioni non est hìc locus, sed ad colorum doctrinam pertinet. Ceterum licet in tota hac responsione de materiæ *homogeneitate* nihil affirmare velimus, haud potiori jure pronuntiant aliqui Philosophi, nulla esse nequidem duo simllima materiæ elementa. Tali ratiocinatione suam conantur probare opinionem, quam *principium indiscernibilium* appellant Leibnitiani. Si duæ sint perfecte similes materiæ portiones, ita ut una alteri substitui possit, *ceteris poribus*, jam nulla est ratio, cur hæc, vel illa hunc, vel illum locum occupet, cum ambæ eumdem locum occupare potuerint: id vero repugnare ajunt rationis sufficientis principio. At cum hoc principium ita generatim explicatum sæpe sæpius à nobis rejectum fuerit, et valide confutatum, non est, quod refellendo *indiscernibilium* principio diutius immoremur.

Ex hactenus dictis intelligitur, quid sentiendum fit de pervulgatis apud nonnullos Philosophos corporum elementis. Aristoteles quatuor enumerat corporum elementa, *terram* nempe, *aquam*, *ignem*, et *aerem*, ex his autem mixta omnia componi docuit: et re quidem ipsa, ex omnibus fere mixtis hæc quatuor corpora, vel horum aliqua eliciunt Chymici. At patet elementa illa esse

 sensibilia dumtaxat corporum principia, minime vero tamquam primigenia elementa considerari posse. Idem dicendum est de Chymicorum elementis. Corpus in elementa sua resolvendum, exempli causa *vinum* in clibanum mittant, subjectoque igne, quasdam partes solvunt in vapores, qui frigore addensati alio vase excipiuntur, fiuntque liquore acuti saporis, quem *mercurium*, *spiritum* seu *aquam vitæ* appellant. Deinde continuato igne liquorem saporis expertem exprimunt, quem *phlegma* vocant; idque facere pergunt donec glutinosa tantum materia, *mellis* instar in clibano supersit. Materiam illam glutinosam in ampullam retortam injiciunt, et subjecto igne *phlegma*, ut prius exprimunt: postea liquórem acidum, quem iterum *mercurium* dicunt; dein liquorem alium minus fluentem in modum olei ignique concipiendo aptum, quem *sulphur* nominant. Postremo quod in ampulla retorta superest comburunt; ejusque cineres in cymbium fictile immittunt, admixta aquæ portione; quæ cum brevi tempore salis saporem referat, percolando purgatur, remanetque in cymbio fictili pulverulenta quædam et expers saporis terra, quam *caput mortuum*, seu *terram damnatam* appellant. Aqua autem limpida alio vase excepta lento igne in vapores solvitur, tumque in fundo do vasis superest corpus durum et *friabile*, salis speciem referens, quod ideo *salem* dicunt. Hæc quinque elementa ex vino aliisque corporibus pluribus eruunt Chymici, ex corporibus aliis horum elementorum aliqua dumtaxat educunt. Hinc ex illis elementis variæ permixtis omnem oriri corporum varietatem, sibi facile persuadent.

His elementis tria alia substituit Cartesius, qui rem totam hoc modo explicavit, seu potius implicavit. Deus creavit materiam homogeneam; hanc divisit in particulas proxime æquales, tali scilicet modo, ut earum anguli spatium accurate replerent, puta in partes cubicas. Creatam et divisam materiam Deus moveri jussit ea motus quantitate, quam etiamnum eamdem invariatam in corporibus perseverare fingit Cartesius; hoc autem motu factum esse ait, ut omnes materiæ partes circa centrum commune et singulæ circa propium revolverentur. Ex hac rotatione mutuoque partium conflictu angulos abradi oportuit, indeque duo prodierunt elementorum genera; aliud nempe fuit pulvis tenuissimus et agitatissimus, quem materiam *æthercam* vocant Cartesiani. Aliud autem emersit ex attritis fractisque partibus, sed crassiusculis et ad motum minus idoneis. Tandem partes cubicæ abrasis angulis abierunt in sphæras ad motum maxime accommomodatas. Ex his tribus elementis universum dicunt compositum ; et quidem materia subtilis solem præsertim constituit nostri systematis planetarii centrum. Secundum elementum constant ex attritis particulis et in rotunditatem conformatis, *globulosa* materia dicitur, spatiisque cœlestibus replendis destinatur. Tertium denique elementum componit globum terraqueum ceterosque planetas. At materia *subtilis*, sive *ætherea* illa est, quæ replendis omnibus interstitiis sese citissimè accommodat. At hoc modo philosophandi fabulari omnino est ; atque hinc factum est, ut hoc cartesiani systematis commentum rejiciant severiores cartesianæ Physicæ reformatores. Quod autem spectat ad materiam æthercam, in tota Physices serie de ea jam plura diximus. Quia vero materia illa sub sensus cadere non potest, mirum non est, quod de hujus materiæ natura es proprietatibus tot hypotheses proferant Philosophi, qui conjecturis delectantur. Sed de hujus materiæ usu vel potius abusu sermo deinde sæpius recurret in Physica particulari. Ceterum quod in hac quæstione prolixius quidem tractari solita, rerum physicarum copiosissima, brevius egerimus, nemo nos tamquam justo breviores reprehendat ; brevissimas enim curtissimasque esse nostras hac in re cognitiones, ingenue fatemur.

AR-

ARTICULUS IV.

De corporis natura.

I.

CUM de universalibus corporum proprietatibus in universa Physica generali hactenus disputatum sit, hinc doctrinæ ordo postulat, ut celeberrimam de corporis natura sive essentia quæstionem adgrediamur, atque tandem primæ Physices parti finem imponamus. Hìc autem caveri maxime debet vocum ambiguitas. Observavimus jam in Metaphysica duplicem *essentiæ* significationem; vel enim essentia est *realis*, hoc est, primarium illud attributum, ex quo derivari possunt alia omnia attributa, quam quidem essentiam nobis ignotam esse demonstravimus; vel essentia est *nominalis*, collectio nempe omnium attributorum, quæ in re aliqua observantur. Rursus autem attributa vel sunt *essentialia*, vel *universalia* dumtaxat; hæc autem duo probe distinguenda sunt: fieri enim potest ut attributa quædam in omnibus corporibus deprehendantur, quæ tamen ad ipsam corporum naturam non pertineant, sed pro mera naturæ lege haberi debeant. His præmissis quæ quidem in Me-

Metaphysica, atque etiam in Logica accurate explicavimus, jam *corpus*, sive *materiam* definire licet substantiam *sensibilem*, quæ explicatas in Physica generali proprietates habet. Illas autem proprietates uno, ut ita dicam, oculi ictu contemplari, iterumque revocare operæ pretium est.

II. In præcedenti definitione notandum est diligenter, corpus dici *substantiam sensibilem*; hìc enim consideramus tantum corpus *physicum*, nihilque de simplicissimis, et inextensis materiæ elementis affirmare audemus. Et quidem si elementorum naturam investigantes, ea extensa esse, dicamus, nihil prorsus dictum videtur; rursus enim elementa illa alias haberent partes, aliaque elementa. Si autem ea extensa non esse dicamus, res videtur absurda; qui enim intelligi potest, id, quod extensum non est, extensionem aliquam constituere? Respondere quidem posset Leibnitianus, extensionem velut *phenomenon* habendam esse. Verum hypothesis illa, de qua frequens mentio jam ante incidit, precaria omnino est, totaque innixa sufficientis rationis principio, quod sæpesæpius impugnavimus. Alii autem, et quidem percelebres viri, corporis nomine intelligunt punctorum systema pro diversis viribus attractivis, et repulsivis pre varia spatii *realis* loca ad diversas distantantias dispositum, ut antea explicavimus. In hac scilicet opinione nullus est contactus *immediatus*, nulla *continuitas* vera, et accurata, sed *relativa* dumtaxat, *apparens*. Et certe à nobis persæpe creditur continuitas vera, quæ proculdubio est apparens. Si enim corpora quædam ad talem inter se distantiam constituta sint, ut sub angulo 16 minori videantur, in corpus unicum, perfecteque continuum coalescere oculis apparent.

Verum hæc opinio tota fundatur in ipsa continuitatis lege, quam quidem in omnibus corporibus, et in minimis materiæ elementis accurate demonstratam esse, nemo affirmabit. Quæ cum ita sint, præsens quæstio difficultatis, et *pesiculosæ plena aleæ* nobis videtur; quare ab ullo hac in re judicio nobis abstinendum esse, existimamus, subtilioremque controversiam sagacioribus ingeniis relinquimus. Unum observare satis erit, nihil omnino esse in his opinionibus, quod fidei vel leviter contrarium reprehendi possit; inter animas et corpora essentiale et intrinsecum semper manebit discrimen in his duobus positum, quod materia sit sensibilis, et cogitationis, ac voluntatis incapax; at spiritus neque sensus nostros afficiunt, neque possunt cogitare, aut velle. Nec quis sibi persuadeat, Metaphyphysicis detrahi desumptum ex materiæ extensione argumentum, quo scilicet validissime probant, materiam cogitare non posse; totam enim vim retinet argumentum, etiamsi corpus physicum constet ex simplicissimis, et inextensis elementis. Si autem elementa conjuncta cogitare non possint, ea quoque seorsim cogitare repugnat. Hæc autem omnia comparari debent cum iis, quæ de animæ spiritualitate in Metaphysicis institutionibus fuse et magno rationum pondere explicavimus.

III. Iisdem fere difficultatibus obnoxia est gravissima alia de *impenetrabilitate* controversia, an scilicet ad corporis essentiam proprietas illa pertineat. Et quidem si extensio inter essentiales corporis proprietates numerari non debeat, jam nihil absurdi videtur, quod plures corporis partes eumdem occupent locum; id quidem præter universales naturæ leges, et corporum omnium proprietates, ac proinde non sine miraculo contingeret; at immutabili corporum essentiæ minime repugnaret. Simili ratione si admittantur in minimis, et simplicissimis materiæ elementis vires quædam ad certos limites repulsivæ, ex quibus oriatur impenetrabilitas; illæ quidem vires pro naturæ legibus haberi debent, quas proinde leges Supremus naturæ Auctor suspendere, et im-

immutare potest, ideoque ad corporum essentiam non pertinent; cum essentias rerum immutabiles omnino esse et necesarias, demonstratum sit in Metaphysica. Nec minus difficilis atque implicata evadit quæstio in hypothesi Leibnitiana, justa quam *extensio*, *locus*, *spatium* pro meris phænomenis haberi debent, ac proinde et pro mero phænomeno haberi etiam posset immpenetrabilitas, quæ ex notione loci omnino pendet. Igitur in hac hypothesi extensio, et impenetrabilitas sunt proprietates corporum *relativæ* dumtaxat, non *absolutæ*, et *essentiales*. Sed quidquid sit de quæstionibus illis, nulla ingenii subtilitate umquam fortasse solvendis, certissimum est, inter universales corporis naturalis proprietates recensendam esse impenetrabilitatem.

IV. Quod spectat corporum vires, *gravitatis* scilicet, *attractionis*, et *inertiæ*; illarum quidem virium effectus in rerum natura constanter observamus; sed quid sint vires illæ, an ipsam corporum essentiam pertineant, nobis omnino ignotum fatemur; eas velut universales corporum proprietates habere nobis satis sit: in nostris enim institutionibus Physicis effectus præsertim consideramus, eosque calculo, quantum nobis licet, æstimamus, quod quidem sæpe vos monitos voluimus. Probe autem observari de-

debet virium illarum notio; neque credendum est, sibi mutuo repugnare vim inertiæ, et vim attractionis. Re quidem vera, si omnes materiæ partes sese mutuo attrahant, jam nulla erit perfecta quies in rerum natura, idque etiam verum erit in ipsa Peripateticorum scientia: etenim secundum Peripateticos cœlestia omnia corpora, quæ intuemur, in perpetuo sunt motu, et centrum gravium in ipso tellus centro positum est; ac proinde necessum est ad cujusvis lapidis jactum, æquilibrio nonnihil mutato, totam telluris molem commoveri. Id quidem vi inertiæ contrarium videri posset; corpora enim tenderent ad motum. Verum dum dicimus, per vim inertiæ corpora manere in quiete, seclusa vi qualibet impressa, res intelligenda est de quiete *apparente*; atque hinc patet, qua ratione intelligi debeat *quiescibilitas* inter naturales materiæ proprietates numeranda. Neque tamen dicendum est, materiæ motum esse necessarium; cum enim vim quamlibet motricem materiæ indiderit Supremus rerum omnium Auctor, hanc eamdem vim pro arbitrio potest auferre et corpora hac proprietate exuere. Tandem patet in iis, quæ hactenus explicavimus, contineri etiam *figurabilitatem* quæ ex mutua attractione viriumque varietate pendet. Sed meminisse oportet *vis* nomine nihil aliud à

no-

nobis intelligi nisi effectum aliquem. Itaque corpus naturale merito definivimus substantiam sensibilem octo universalibus jam recensitis proprietatibus præditam. Probe autem notandum est, proprietates illas à nobis dici *universales*, non *essentiales*. Si quis igitur corpus consideraret, omissa ex his proprietatibus aliqua, is quidem *incompletam* haberet corporis notionem, nec tamen essentiale aliquod corporis attributum prætermisisse dici posset.

V. Ex his quæ hoc in articulo explicavimus, lux fortasse aliqua accedere potest iis, quæ de *materia*, *forma*, et *privatione* obscure tradunt plerique *Scholastici*. Affirmant scilicet, omnium corporum principium esse materiam *primam*, formam, et privationem. Materiam primam definiunt, *quod neque est quid, neque quantum, neque quale, neque quidquam eorum, quibus ens denominantur*. Hæc autem definitio ita potest intelligi, ut materiam *indeterminate* et *abstracte* consideratam significet, non attenta illius forma. Verum ut fiat corpus aliquod *determinatum*, *formam substantialem* adjungi oportet; vocant autem formam substantialem id, per quod cingulæ corporum species à se invicem differunt. Hæc autem omnia, licet à veteribus Philosophis paulo obscurius dicta, cum Recentiorum opinionibus com-

componi fortasse possent; etenim si in corporibus admittamus vires quasdam *motrices*, *attractivas* scilicet et *repulsivas*, ex quibus oriatur specifica corporum differentia, vires illas pro formis substantialibus haberi minime repugnat. Et quidem illas *substantiales* appellari nihil absurdum est; etenim cum diversa motus directio diversaque velocitas vi motrice diversa generentur; mutationes illæ considerari possunt tam quam *modi*, qui proinde ad substantiam aliquam referri debent; atque hinc contingit, ut vires motrices tamquam modorum subjectum ac proinde tamquam substantiæ appareant; qua de causa formæ substantiales satis apte appellari potuerunt. Hanc explicationem à veteri Philosophia non longe aberrare colligitur ex ipsa formæ substantialis definitione; hanc enim his verbis definiunt Peripatetici: *actus primus substantialis unum per se cum materia constituens: principium motus et quietis per se et non per accidens*: ex qua definitione oritur alia forma, quam *accidentalem* dicunt, quæ nihil aliud est, quam *modificatio contingens*. Tandem quod spectat *privationem*, hoc vocabulum fecerunt Peripatetici, ut distinguerent corpus *factum* et *actuale*, seu, ut dicunt, *in facto esse*, à corpore *faciendo*, quod vocant *in fieri*. Corporis actualis duo distinguunt princi-

pia,

pia, materiam et formam, at corporis in fieri tria principia admittunt, materiam, formam et privationem; et quidem formam substantialem præcedere debet privatio. Hæc pauca de veteris scholæ opinionibus sine ullo partium studio observata sint, ut antiquos Philosophos à Recenciorum quorumdam reprehensione vindicemus; aliqui enim Recentiores nihil fere in veteri Philosophia inveniunt, quod non rideant, et Peripateticorum opinionibus sua non magis solida et probata substituunt dogmata, seu potius figmenta. Aristotelem virum fuisse ingenio excellentem, satis demonstrant plurima illius opera, quibus sane non parum honoris et gloriæ detraxerunt aliqui Interpretes. At non sine maxima Recentiorum injuria negari posset, in effectuum observatione et cognitione longe feliciorem et locupletiorem esse hodiernam Physicam, quambis post longam sæculorum seriem circa effectuum causas nihil fere plus scire datum sit, nec fortasse dabitur umquam, donec rerum effectuumque omnium causam D. Opt. Max. æternum intueamur.

APPENDIX.

De quibusdam capitis præcedentis utilitatibus.

I.

Amplissimam meditationum Philosophicarum copiam suppeditat caput præcedens: ex multis pauca utiliora seligemus. De summa corporum porositate perpetuisque effluviis sermonem habuimus; hinc vero occasionem nacti, quotidianas corporis nostri mutationes et vicissitudines contemplabimur. Accuratissimis observationibus compertum habuit Sanctorius ex octo alimentorum libris, quas quis quotidie sumeret, quinquagessimam circiter partem in corporis substantiam converti. Sumpta igitur quinquagesima parte 8. libr. provenient $5\frac{3}{25}$ semiunciæ, quas scilicet singulis diebus acquirimus, ac proinde per anni spatium corpori nostro accedunt 58. libr. $12\frac{4}{5}$ semiunciæ, hoc est, plusquam tertia pars totius corporis; tantumtumdem ergo per continuam dissipationem de corporis substantia decedere debet; alioqui in enormem excresceret molem. Jam vero si jactura eum in modum sese haberet, ut vetustissima corporis materia primum abiret, deinde quæ proxime minus vetusta est, et sic per gradus ad recentissimam usque, manifestum est ita omnino dissipari corporis nostri substantiam, ut post tres annos nihil vetustæ materiæ superstes esset, alia plane ejus locum occupante. At quoniam veteres succedentesque particulæ simul pro ratione utriusque quantitatis promiscue expelli debent, fieri non potest, ut omnis materia in auras avolet, etiamsi mille annos homo viveret. Rem exemplo illustrabimus. Ponatur vas aquæ plenum, continens 150 libras, ex quibus hauriantur $5\frac{1}{25}$ semiunciæ, et loco haustæ aquæ infundantur vini puri semiunciæ $5\frac{3}{25}$. Sequenti die ex hoc mixto detrahantur iterum semiunciæ $5\frac{3}{25}$, et dein adjiciantur $5\frac{3}{25}$ vini puri, et ita deinceps singulis diebus per annum integrum; quæritur quantum vini post an-

annum futurum sit. Problematishujus solvendi modum judicabimus: 150 libræ aquæ conficiunt 4800 semiuncias, ex quibus detractis $5\frac{3}{25}$ semiunciis aquæ, et iterum affusa æquali quantitate vini puri, remanent in vase $4794\frac{22}{25}$ semiunciæ aquæ cum $5\frac{3}{25}$ semiunciis vini permixtæ. Jam si secundo die ex hac mixtura rursus detrahas $5\frac{3}{25}$ semiuncias, et tantumdem vini puri adjicias, illæ semiunciæ detractæ $5\frac{3}{25}$ non ex aqua pura constabunt, sed tantillum vini continent, quod in eadem proportione erit ad aquam, ut $5\frac{3}{25}$ ad $4794\frac{22}{25}$, id est, numerus semiunciarum aquæ residuæ post secundam detractionem erit tertius proportionalis ad 4800 et $4794\frac{22}{25}$, quod quidem evidens est. Simili ratione, tertio die detractis ex mixto semiununciis $5\frac{3}{25}$ patet numerum semiunciarum aquæ residuæ esse quartum proportionalem ad 4800 et $4794\frac{22}{25}$ et ita porro: ergo completo anno, scilicet post 365am extractionem, residuæ aquæ pondus habebitur sumendo 366am proportionalem ad 4800 et $4798\frac{22}{25}$, seu evehendo $4794\frac{22}{25}$ ad 365am potestatem, et dividendo per numerum 4800 itidem ad 364am potestatem evectum, quod quidem laboriosissimum per plures menses calculum postularet. Ad rem per *logarithmorum* tabulas compendiose absolvunt Algebristæ, inveniuntque post completum annum remansuras in vase $3251\frac{1}{5}$ semiuncias aquæ, ideoque $1548\frac{4}{5}$ semiuncias vini. Exemplum ad præsentem casum transferatur Aquæ pura 150 libræ repræsentent materiam, ex qua corpus componitur, $5\frac{3}{5}$ semimiunciæ vini puri quotidie infusi referant novam materiam corpori nostro singulis diebus additam, erit materia vetus semiunciarum $3251\frac{1}{5}$ seu libr. 101, semiunciarum $19\frac{2}{4}$; nova autem substantia erit libr. 48, semiunciarum $12\frac{4}{5}$. Itaque corpus humanum tertiam fere substantiæ partem post annum integrum amittet, et protracto calculo invenitur elapso decennio superstitem futuram esse dumtaxat partem quinquagesimam. Prætermittendum tamen non est à nobis positum fuisse omnes corporis partes æquabiliter et uniformiter dissipari; quamquam certissimum sit ossium dissipationem multo lentiorem esse, quam partium fluidarum. Sed quidquid sit, ex his saltem manifestum est, in corporibus nostris velocissimam mutationem contingere, atque hìc perpetuæ vicissitudini obnoxias esse durissimas corporis nostri partes: et quidem nullum est in corpore animali os tam durum, tam compactum quod non nutriatur, ac proinde quod non mutetur, et partem sui amittat novamque recuperet.

Ec-

Ecquis non mirabitur omnipotentem Dei manum, quæ in corporis nostri structura, tot subtilissima disposuit instrumenta ad nutritionem et evaporationem necessaria! At singulos ætatis humanæ gradus, diversosque corporis nostri status paulo attentius contemplemur. In puerili ætate partes sunt tenellæ, viscosæ, aqua abundant, infinitisque canaliculis perforatæ, quos quidem canaliculos in ossibus, membranis, cartilaginibus, vasorum tunicls, tendinibus et in cute ipsa demonstrant injectiones anatomicæ. Hinc fit ut vis, quæ in corpore animali motus principium est, quæcumque sit vis illa, molliores partes facilius extendat. Progressu temporis rubustiores fiunt partes, atque confirmantur in adulta scilicet ætate; atque id tamdiu fit, donec tandem extendendis solidis haud amplius satis sint cordis vires. Attamen facile adhuc flexibilis manet *cellularis* textura, multis in locis pinguedinem sanguinemque admittit; hinc pinguiores fiunt adulti ad certum usque tempus, nec tamen crescunt. Provecta ætate textura cellularis fit crassior, rigescunt senum ossa, cartilagines in ossa convertuntur, vasa excretoria comprimuntur, minima orificia clauduntur, secretiones minuuntur, sanguis exsiccatur, et in singulos corporis partibus terrestrem veluti humorem de-

deponit. Hinc partes omnes duriores observantur, hinc crustræ osseæ in ipsis arteriis, in ossium superficie et maxime in vertebris deprehenduntur. His gradibus ad senectutem mortemque ipsam pergimus. Solvitur tandem fragilis hæc corporis nostri machina iterum reparanda et ad meliorem æternamque vitam revocanda.

II. *Resurrectio mortuorum*, inquit S. Augustinus serm. 150. *præcipua fides Christianorum*: et quidem, *statutum est hominibus semel mori, post hoc autem judicium:* ait S. Paul. ad Hebr. 9. Itaque cum increduli quidam impiique homines, ex iis quæ n. præced. diximus, plurima objiciant resurrectionis dogmati contraria, hinc officii nostri partes esse duximus sanctum illud religionis decretum spei timorisque plenum à cavillationibus vindicare. Quomodo, inquiunt, eæ corporis particulæ, quæ per insensibilem transpirationem assidue ævanescunt, in eidem corpus iterum coalescent? Illæ eædem particulæ in alia corpora, in aliorum hominum substantiam transeunt; objectioni vim addere conantur, fingendo hominum corpora ab animalibus carnivoris vel antropophagis hominibus absorpta. Qua ratione fieri poterit, ut unusquisque carnem suam repetat atque revocet? cum vinus hominis caro in carnem alterius transmigraverit?

rit? Porro quamvis *corporum resurrectio solius divinæ potestatis opus sit, cujus causas et rationem temere quis investigaret*, ait Athenagoras de mortuorum surrectione, everti tamen debent argumenta quibus fidem nostram oppugnare conantur religionis hostes. Igitur quamvis corporis nostri materia per insensibilem transpirationem avolaverit et in belluæ carnivoræ aut barbari hominis substantiam transiverit, Deus eamdem discernet et corpori, cujus erit, restituet. Particulæ omnes, quæ ab ortu ad mortem usque corpus nostrum per diversas ætates compegerunt, nobiscum non resurgent; tunc enim enormis magnitudinis monstra excitaremur, Deus eam nobis restituet, quam ipse decrevit, magnitudinem, de qua quidem magnitudine nihil fides docet. Nihil autem à ratione alienum est, imo ratio ipsa demonstrat, Deum omnipotentem dispersas materiæ particulas quæ unuscujusque hominis substantiam per totum vitæ decursum componebant, colligere et eligere posse, atque in eam quam jubet, magnitudinem revocare: *ita modificabitur illa in unoquoque materies, ut nec aliquid ex ea pereat, et quod alicui defuerit, ille suppleat, qui etiam de nihilo potuit, quod voluit operari*: ut ait S. Augustinus in Enchiridio cap. 90. quamvis ergo mortuorum resurrectio et omnes,

quæ

quæ ad eam pertinent, mutationes *divinæ sint potestatis opus*, altissimumque mysterium, id tamen rationi minime contrarium est; et certa fide tenendum, omnes homines in propria carne resurrecturos, ante divini judicis tribunal constituendos, ut probi donentur præmio, improbi autem supplicio mancipentur.

III. Quamvis in adorando Eucharistiæ Sacramento potentiæ, amoris et benevolentiæ thesauros effunderit et explicauerit Christus Dominus, non desunt tamen ingratissimi impiissimique homines, qui ad oppugnandum illud divinæ bonitatis mysterium, in disputationibus philosophicis de corporum natura ineptissimas cavillationes quærunt et audacissime jactitant. Cavendum quidem est, ne sacrosancta religionis mysteria curiosius scrutari atque explicare præsumant Philosophi; si enim opinio aliqua aut theologica, aut philosophica mysterii rationem ita afferat ut *nullum* fidei locum relinquat, hæc statim rejicienda est atque detestanda. At omnes ingenii sui vires intendere debent religiosi verique Philosophi, ut santissima fidei dogmata ab impiorum hominum conatibus defendant, eaque supra rationem esse, non tamen rationi contraria, ostendant. Quatuor sunt argumenta philosophica, quæ Novatores maxime jactare solent. 1. *corpus Chris-*

Christi simul esse in pluribus locis. 2. *corpus Christi veras non habere corporis proprietates, non esse quantum, locum non occupare.* 3. *accidentia panis et vini remanere post factam consecrationem sine subjecto.* 4. *accidentia illa habere omnes proprietates substantiæ.* Ex illis objectionibus duæ pertinent ad corpus Christi, duæ aliæ ad accidentia; quæ quidem omnes ex dictis de corporis natura facile refelluntur. Quod duas priores objectiones spectat, patet, rationi contrarium non esse, illum existendi modum, quo Christum in Eucharistia existere certa fide docemur: etenim de ipsa corporis essentia non consentiunt inter se Philosophi; imo plurimi apud ipsos Novatores cultissimi doctissimique Physici extensionem et impenetrabilitatem ad corporis essentiam non pertinere, sine ulla dubitatione affirmant; in qua quidem sententia duæ priores objectiones evanescunt. Certissimum omnino est corpus Christi in Eucharistia suam habere *quantitatem*; nempe partes revera sunt diversæ et extra se invicem, alioqui non esset corpus humanum. At quantitas illa, quam habet corpus Christi in Eucharistia, dicit quidem extensionem partium *in ordine ad se*, seu per eam quantitatem fit, ut pars sit extra aliam partem; sed non dicit extensionem *in ordine ad locum*, hoc est, per

eam

eam non fit, ut pars occupet locum. Igitur corpus Christi in Eucharistia nec *definitive*, nec *circumscriptive* continetur; non quidem definitive, nam corpus Chisti contineri definitive sub *speciebus*, est ita sub illis existere, ut non sit alibi, quod repugnat fidei, quæ docet, Christum esse in cœlis et in hostiis consecratis. Neque continetur circumscriptive, nam contineri circumscriptive est respondere variis spatii partibus, cum non habeat extensionem impenetrabilem. Ille quidem existendi modus nullum in rebus creatis exemplum habet, et miraculis plenus est, ac proinde merito vocatur *sacramentalis*, seu modus, qui soli Sacramento conveniat. At modum illum existendi absurdum non esse et divinæ omnipotentiæ ac rationi non repugnare, patet ex iis, quæ de extensione, impenetrabilitate, loco et spatio fuse disservimus.

Quod spectat *accidentia*: accidentium nomine intelligunt panis et vini qualitates, *colorem*, *quantitatem*, *saporem*. Eæ autem qualitates remanent in Eucharistia, iis afficiuntur sensus nostri, facta consecratione. Qualitates illæ à Concilio Lateran. IV. vocantur: *panis et vini species*: à Concilio Constantiensi dicuntur: *accidentia panis et vini*; Concilium Tridentinum Lateranensis Concilii phrasim retinuit. Observandum est,
du-

duplicem à Peripateticis distingui *quantitatem*, aliam *internam*, *externam* aliam: primam dicunt partes *entitativas*, et *substantiales*, quæ ita sunt de essentia corporis, ut iis sublatis destruatur corpus. Hæc quantitas corpus extendit in ordine ad se, hoc est, partes entitativas alias extra alias ita constituit, ut entitas partis unius tota sit extra entitatem partis alterius, et tamen omnes in eodem loco reperiantur. Quantitas externa nihil est aliud, quam extensio sensibilis, quæ partes jam extensas in ordine ad se, extendit in ordine ad locum. Hæc Peripateticorum opinio aliqua ex parte convenit cum hypothesi Leibnitiana, quæ corporum partes ab ipsa extensione distinguit, sed extensionem sensibilem velut merum phenomenon, non tamquam aliquid substantiale aut accidens absolutum admittit. De fide est, accidentia remanere sine subjecto *substantiali* panis et vini; at de fide non est ea non habere subjectum aliquod accidentale. Accidentia manere ajunt plerique Theologi in panis et vini quantitate, *externa* scilicet, quæ remanet in Eucharistia consecrata, et quantitatem illam aliasque sensibiles qualitates *accidentia absoluta* appellant, eo quod sine ullo subjecto maneant. Novam opinionem excogitavit, aut saltem maxime illustravit atque amplicavit Magnanus noster.

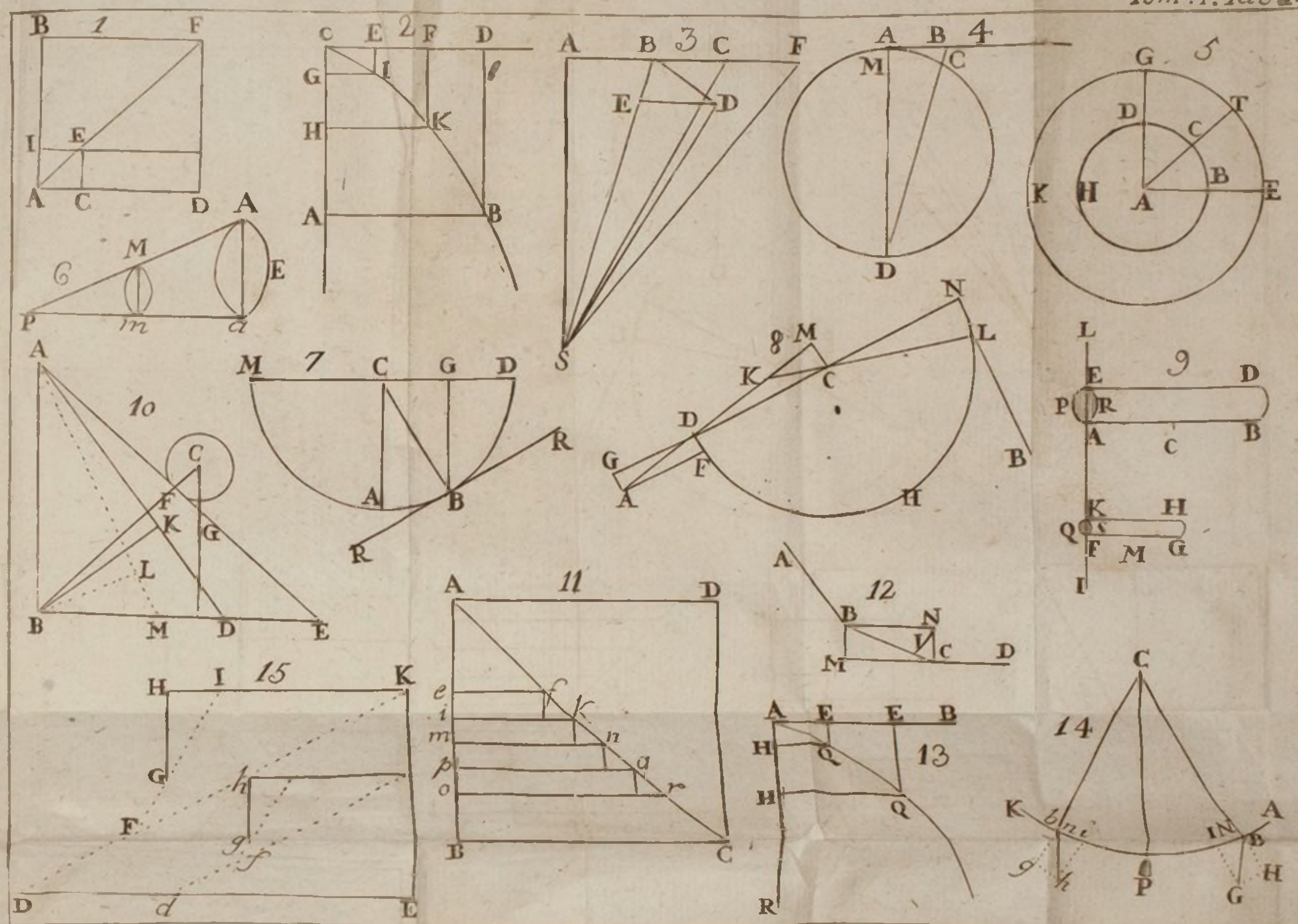
Spe-

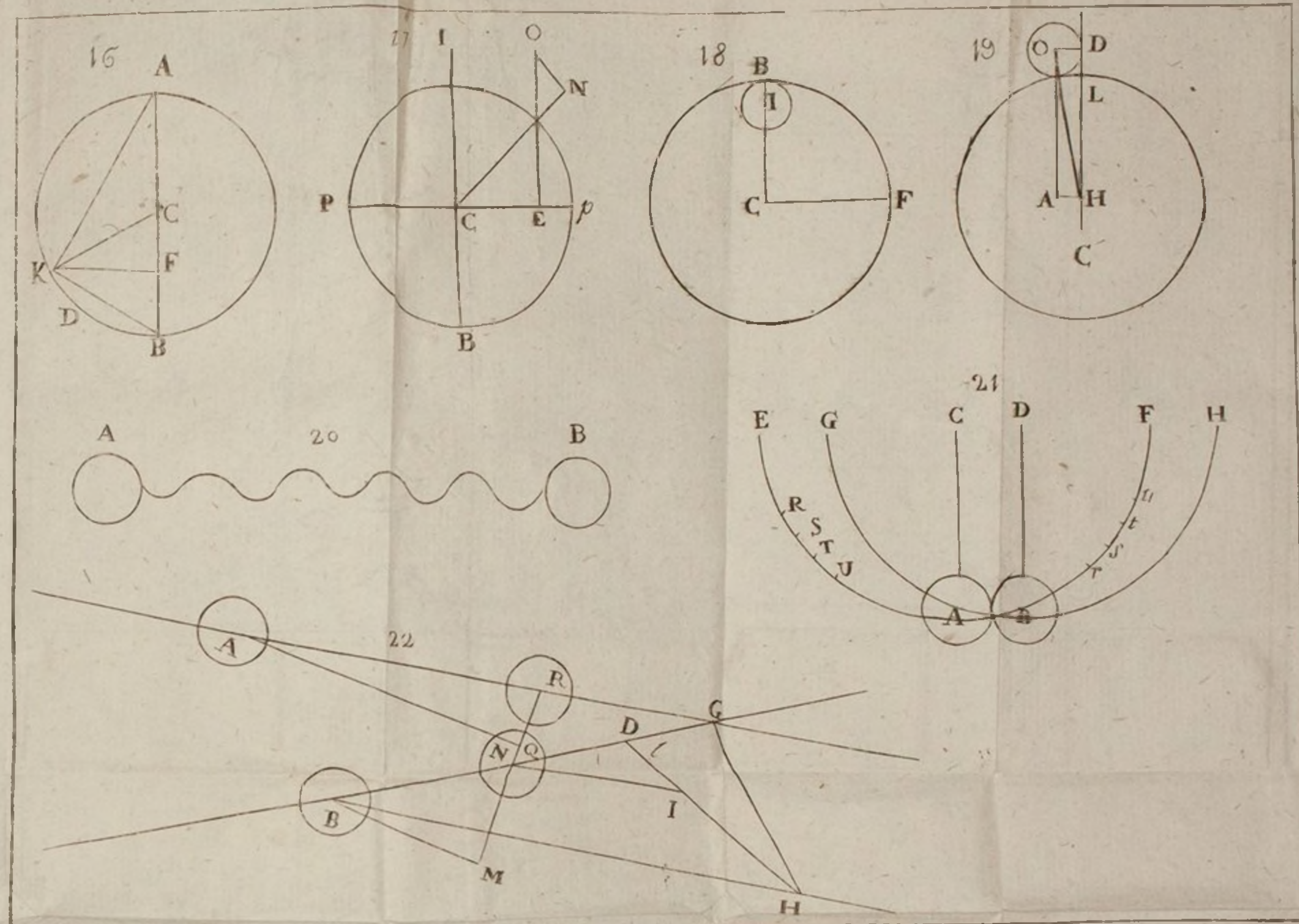
Species sensibiles, quas *intentionales* vocat, non aliud esse docet, quam actionem ipsam objectorum in sensus. Dum autem in Eucharistia non supersit panis substantia, in sensus illa agere non potest; sed Deus per seipsum soloque imperio supplet actionem substantiæ panis, facta in sensibus nostris eadem *modificatione* sive impressione, quam panis ante consecrationem producebat. Unum hic diligenter monere oportet, Concilia Lateranense, Florentinum et Tridentinum *accidentium* nomen non usurpasse, sed *specierum*. Quæ cum ita sint, catholica fide certum ac definitum non est accidentia absoluta ad fidem pertinere; sed hoc certissime tenendum est, totam panis et vini substantiam converti seu transmutari in corpus et sanguinem Christi; species vero seu accidentia remanere fidei auctoritate et sensuum judicio indubitatum est. Verum quid sint et in quo consistant species illæ, Ecclesia non pronuntiavit. Quamobrem dum Synodus Constantiensis damnavit hanc Vvicleffi propositionem: *in Eucharistia non manent accidentia sine subjecto*, censent Theologi censuram non cadere in accidentia, sed in accidentium subjectum, scilicet in substantiam panis et vini quam superesse dicebat Vvicleffus. Quod autem nutritionem spectat, responderi solet, vel

Deum

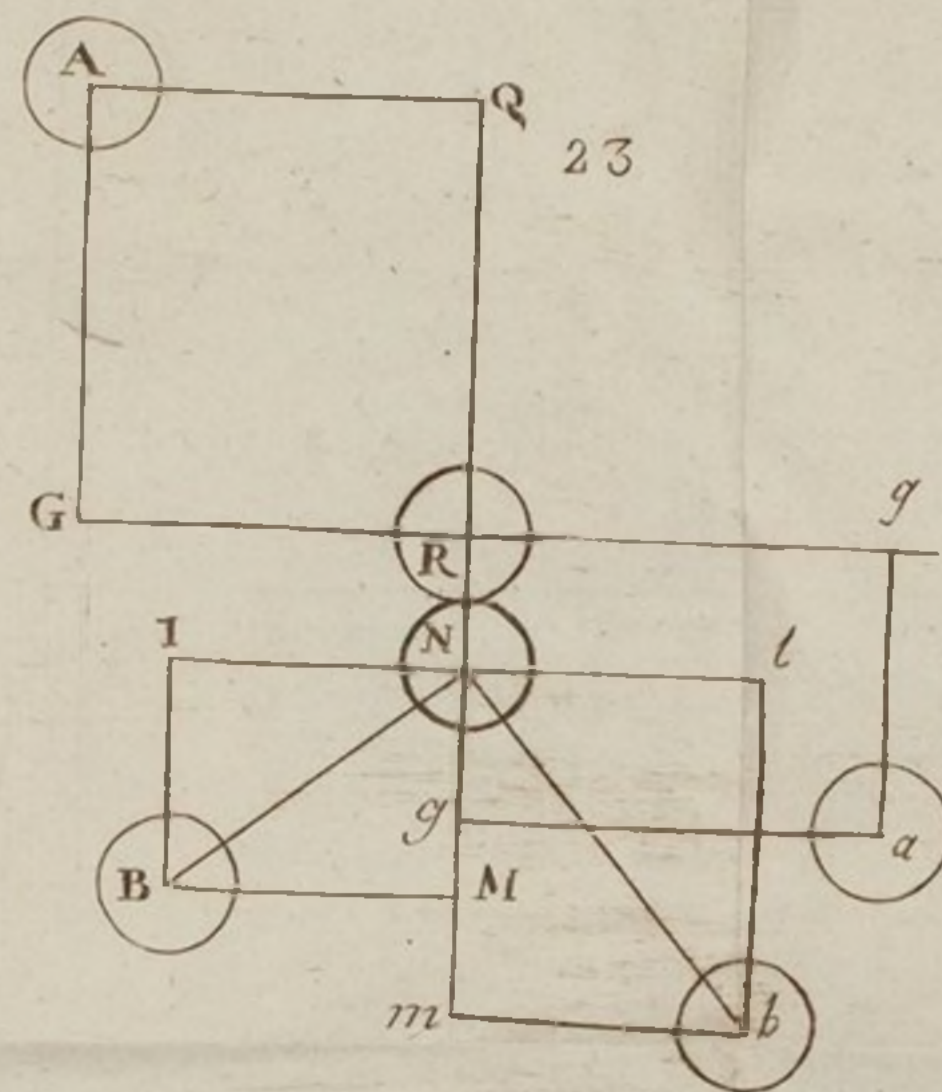
Deum aliam substituere materiam, qua corpora nutriantur, vel per se corpora nostra sustentare; qui enim corpora ex nihilo produxit, potest haud dubie illa sustentare ac nutrire. Itaque ex his omnibus concludere licet, sacrosanctum Eucharistiæ mysterium incomprehensibile quidem esse et ineffabile, non tamen à divina omnipotentia et ratione alienum: quare hanc appendicem absolvemus Concilii Tridentini verbis sess. 13. cap. 1. ubi sermo est de ratione, qua Christus est in Eucharistia: *quam etsi verbis exprimere vix possumus, possibilem tamen esse Deo, cogitatione per fidem illustrata, assequi possumus, et constantissime credere debemus*: quæ quidem verba non de hoc Sacramento tantum, sed de aliis omnibus fidei nostræ mysteriis sancte tenenda sunt.

FINIS.

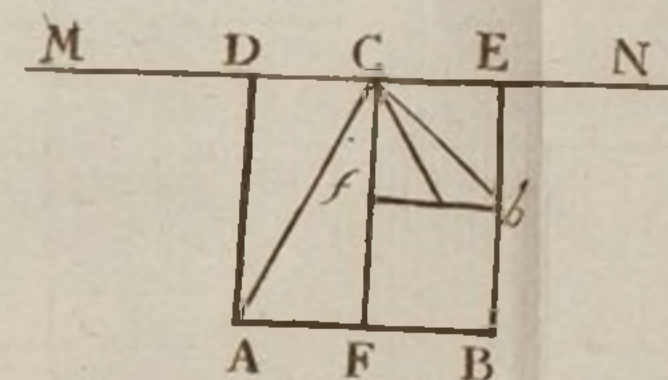

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15


16
A
C
F
K
D
B
17
I
O
N
P
C
E
p
B
18
B
I
C
F
19
O
D
L
A
H
C
20
A
B
21
E
G
C
D
F
H
R
S
T
U
u
t
s
r
A
B
22
A
R
G
D
l
N
Q
I
B
M
H

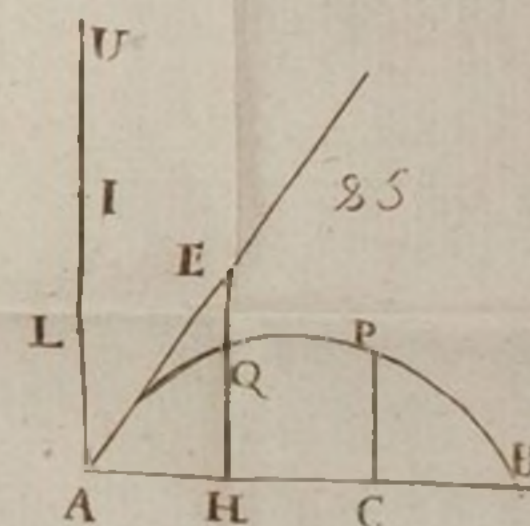
23



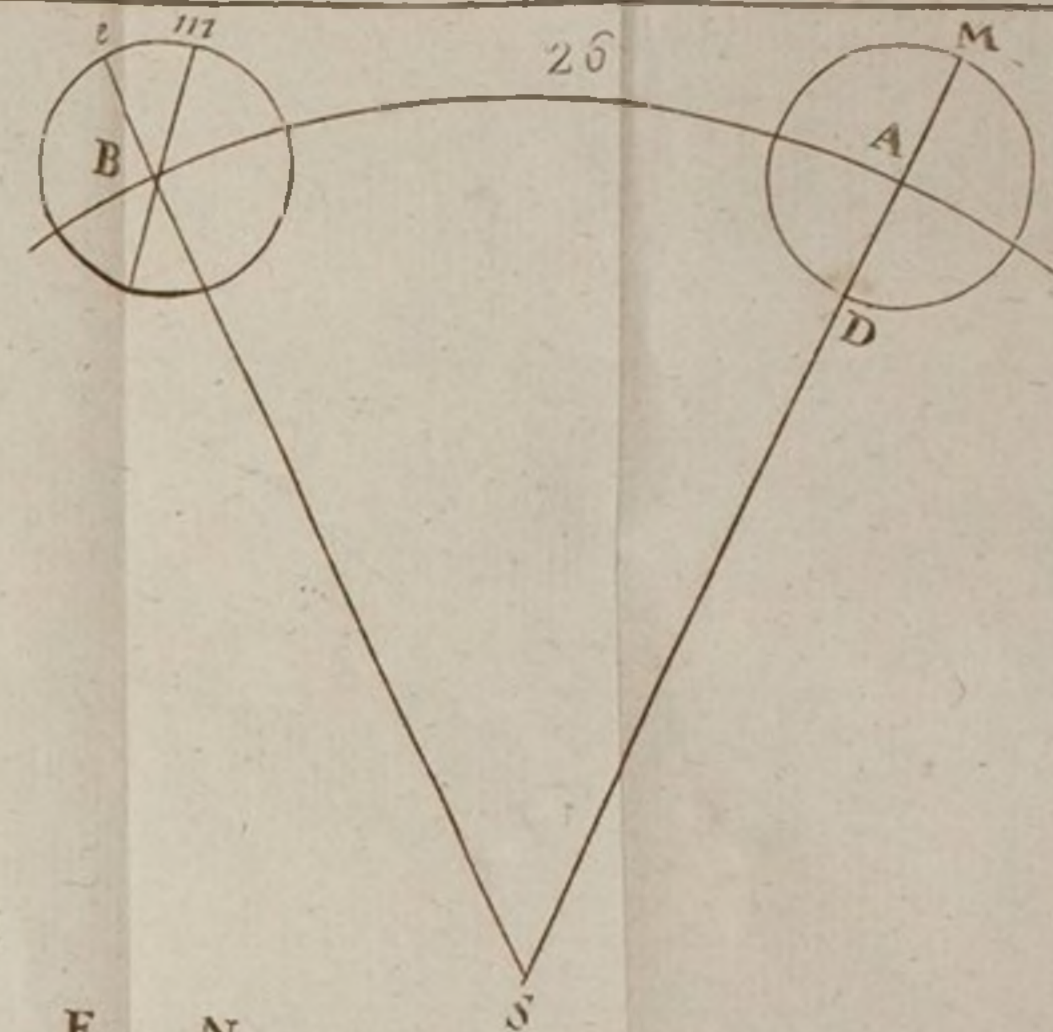
24



25



26



JACQUIER
EN
LATIN
3-4