DA GEOMETRIA À TOPOLOGIA: FILOSOFIA DO ESPAÇO MÉTRICO

FROM GEOMETRY TO TOPOLOGY: PHILOSOPHY OF METRIC SPACE

Ramiro Délio Borges de Meneses
Instituto de Bioética da Universidade Católica Portuguesa~Centro Regional do Porto e Instituto Politécnico de Saúde do Norte - Gandra e Famalicão. Portugal

Resumo: O grande ponto de partida da Geometria encontra-se naturalmente nos Elementos de Euclides. A Geometria ao estudar os espaços métricos, ao longo da sua história, foi sofrendo múltiplas generalizações métricas, tendo sido criadas as geometrias descritivas e projectivas, particularmente com Monge (1746-1818). Todavia, será de realçar a criação da Geometri Analítica por R.Descartes, em 1637. Assim, começam as aplicações da Álgebra à Geometria, criando-se novos espaços métricos, para já não falar nas gebneralizações de Riemann e de Lobatschfc, que deram marcante impulso ao desenvolvimento da mesma.

A Geometria, como ramo determinante da ciência da quantidade abstracta, acabou naturalmente por ser generalizada pela *Analysis Situs* , permitindo a formação de espaços tolpológicos, de grande aplicabilidade em geodesia e ramos afins das ciências físicas e engenharia. Naturalmente, que será nossa preocupação definir uma fundamentação filosófica, para os espaços métricos, como faremos ao longo deste estudo, que vá desde a gnoseologia até à ontologia regional, comio forma de fundamentare a quantidadsec abstracta, nos seus graus analógicos de existir, como entes abstracto.

Palavras-chave: Geometria, Topologia, espaço métrico, espaços topológicos, filosofia, gnoseologia, ontologia e aplicações.

ABSTRACT: Demonstrative geometry has been widely extended in the last 300 years, but the processes used and the generality of the results differ markedly from those of elementary geometry that is geometry as given in «Elements of Euclid». The projective geometry, conic sections, and the modern geometry of the triangle and circle, together, make up the bulk of what is called modern pure geometry. The descriptive geometry, a subject closely related to projective geometry, was introduced by Monge (1746-1818). And, finally, in 1637, R. Descartes published the first treatise on analytical geometry. This subject applies the powerful methods of algebra to geometry. Geometric problems of all kinds could now be solved by a general approach. Moreover, the new methods made possible the study of further problems not thought of by the ancients but lying at the heart of modern mathematics and mathematical physics. The non-euclidean mathematics has been enlarged to include a trigonometry, analytical geometry, and differential geometry, and the subject has been extended to more than three dimensions (the geometry of hyperspace). To conclude the new approach to geometry, I explain the new philosophical foundations.

KEYWORDS: Geometry, Topology, metric space, topological spaces, philosophy, gnoseology, ontology, and applications.

1. Introdução

A Matemática pura estuda entes de razão, isto é, a «quantidade pura», abstracta, da análise geométrica e algébrica. A geometria é um ramo da matemática que se refere como «quantidade espacial».

A segunda espécie de «quantidade» é a «espacial», como extensão pura para n-dimensões. O espaço euclidiano tem três dimensões, sendo limitado por planos. O plano é limitado por rectas e as rectas por pontos. Daqui surgem vários conceitos geométricos de Ponto, Recta e Plano.

Mas, pelas extensões sucessivas, existem várias espécies de espaços: puros, analíticos, topológicos, etc.

O Espaço (E) difere do «número». Contudo, a construção da Geometria Analítica, bem como a Geometria Diferencial, vieram mostrar que toda a análise da «quantidade» se pode fundar na teoria geral dos conjuntos[1].

Todavia, a teoria dos conjuntos (ou classes) está na base da Análise Matemática moderna, bem como nas novas leituras geométricas, como a Topologia, que necessita da noção de «conjunto», originando novas extensões. Poderemos dizer que a fundamentação lógica das generalizações da Geometria assenta na teoria das classes (conjuntos).

A Geometria é o ramo da Matemática que estuda as formas espaciais, suas estruturas, relações operativas e propriedades. Mas, existem variados graus de Espaço por causa das extensões da Análise: espaço euclidiano, não-euclidiano, espaço de Hilbert, espaços diferencial e topológico. Como a Topologia necessita da operação de «passagem ao limite», daqui se poderá auferir que a Análise Matemática emprestou elementos formais e operativos (funções, variáveis, etc.).

Por aqui vamos encontrar diferentes espécies de Geometria, que se poderão classificar pela teoria dos conjuntos ou pela teoria dos grupos.

De forma simples, poderemos classificar as geometrias da forma seguinte:

A Geometria pura (espacial) estuda os espaços como entidades métricas dimensivas (figurativas). Esta apresenta duas generalizações, ora como métrica (euclidiana e não-euclidiana) e a projectiva ou sintética, bem como a Geometria Descritiva.

Surgiu, porém, com De Fermat (1601-1665) e com Descartes (1596-1650) a Geometria Analítica, que marcou um grande avanço no pensamento matemático. A geometria analítica estuda os Espaços Analíticos pelo sistema dos números reais: *Pi* (*xi*). Trata-se, pois, de um novo método de tratar a Geometria em linguagem simbólica. Esta nova extensão geométrica apresenta-se sob duas formas, quer a «clássica» (que se afirma pelos espaços cartesianos e hiperespaço),

[1] Cf. V. M. DE SOUSA ALVES, *Ensaio de Filosofia das Ciências*, Braga, Publicações da Faculdade de Filosofia, 1998, 447; A. MANNHEIM, *Cours de Geométrie Descriptive*, Paris, Gauthier-Villars, 1886, 158-164.

quer a «moderna» (pelos espaços abstractos à Fréchet). Não poderemos esquecer a Geometria Diferencial, que foi iniciada por Riemann (1826-1866), ao observar que o teorema de Pitágoras poderá ser generalizado ao definir um novo comprimento pela noção de geodésicas:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j$$

Uma das mais notáveis generalizações encontra-se representada pela Topologia, que se caracteriza por estudar figuras qualitativas pelos conceitos de limite e vizinhança[2].

Ao longo deste estudo, apresentaremos a análise dos termos e conceitos fundamentais dos variados graus de «espaço», objecto formal da Geometria, como um conjunto transfinito de elementos abstractos em potência: pontos, rectas, números, funções, curvas, etc. Mas, os matemáticos definem o ponto, a recta, o plano ou o espaço conforme as diferentes axiomatizações: logicista, formalista e intuicionista.

Finalmente, surge a fundamentação filosófica da Geometria, que vai desde a determinação do valor e limites (epistemologia) até à fundamentação ontológica.

2. A Geometria métrica: pelos conceitos e axiomas

2.1. Geometria Euclidiana

2.1.1. A Geometria de Euclides foi a primeira forma de geometria métrica que se terá iniciado, em Alexandria, pelos «Elementos». Euclides (300 a.C.) foi um matemático de origem obscura, tendo escrito cerca de sete livros devotados à Geometria. A primeira forma fora apresentada como Geometria Plana. Os postulados da Geometria elementar são:

1. Um segmento de recta pode passar por dois pontos dados;

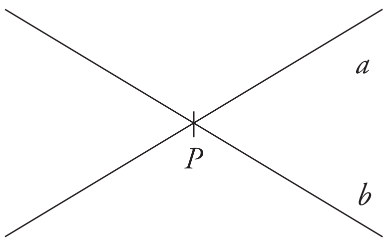
[2] Cf. J. VUILLEMIN, *Leçons sur la Première Philosophie de Russell*, Paris, Armand Colin, 1968, 282-289.

2. Uma linha-segmento pode ser passada indefinidamente ou limitada em qualquer ponto;
3. Um circulo pode ser descrito à volta de qualquer ponto dado com um centro e com um raio dado;
4. Todos os ângulos rectos são iguais;
5. Por um ponto exterior a uma recta só é possível fazer passar uma recta paralela à recta dada.

Segundo esta Geometria métrica, o segmento de recta, as rectas e as semirectas são conjuntos de pontos.

Por esta Geometria, o segmento de recta é a linha mais curta que se pode traçar unindo dois pontos. Por dois pontos distintos pode fazer-se passar uma recta e só uma. Deste axioma concluimos que duas linhas rectas distintas não podem ter mais do que um único ponto comum, a que se chama o —ponto de intersecção— das duas rectas ou o ponto onde elas se cortam[3].

Duas rectas, nas condições anteriores, dizem-se —concorrentes— ou —secantes—:



$a \cap b = P$; $P \in a$; $P \in b$
Apresenta-se, nesta figura, um ponto de intersecção

Também se conclui deste «axioma» que dois pontos definem um «segmento de recta», como porção da recta definida por esses pontos. Logo, o segmento é limitado pelos dois pontos e contém todos os pontos da recta, compreendidos entre eles.

[3] Cf. A. N. PALMA FERNANDES, *Elementos de Geometria*, 2.ª edição, Lisboa, Livraria Didáctica, 1964, 16-17.

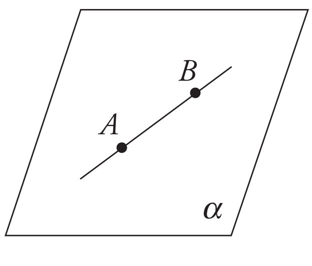
Os pontos de uma recta estão ordenados linearmente segundo os dois sentidos do percurso:

As semi-rectas opostas às semi-rectas *AB* e *BA* dizem-se prolongamentos do segmento *AB*.

Dois segmentos são iguais ou congruentes quando coincidem deslocando um deles e se pode fazer coincidir com o outro. A igualdade de segmentos tem certas propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva[4].

Mas, como resultado da medição de um segmento dá-se o nome de comprimento do segmento.

Um plano é uma superfície plana indefinida que contém a recta definida por dois dos seus pontos:



$A \in \alpha;\ B \in \alpha$

$AB \in \alpha;\ AB \subset \alpha$

Dá-se o nome de «domínio plano» ou superfície plana a qualquer porção de um plano. Mas, segundo o axioma de Pasch, todo o semi-plano é um domínio convexo.

Assim se poderá dizer que a Geometria é a ciência que estuda as propriedades de certas figuras, quanto à forma, extensão e posições relativas. Mas, isto afecta a Geometria métrica tal como encontramos na expressão de Euclides.

[4] Cf. R. FENN, *Geometry*, tradução do alemão, Berlim, Springer-Verlag, 2001, 63-78.

Assim, esta divide-se em duas formas: a Geometria plana e a Geometria do espaço, porque estudam as figuras, que não são planas, isto é, aquelas figuras em que não existe nenhum plano que contenha todos os seus pontos[5].

2.1.2. A Geometria Métrica começa por estudar os ângulos, que poderão ser, por um lado, côncavos pela união de dois semi-planos; por outro, como ângulo convexo pela intersecção de dois semi-planos. Atendendo à definição de figuras geométricas iguais, teremos: dois ângulos que se dizem iguais ou congruentes se coincidem ou deslocando um deles se pode fazer coincidir com o outro. Dois ângulos iguais, como figuras iguais que são, gozam das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. Todos os ângulos rectos e rasos são iguais.

Uma das realidades fundamentais são os «triângulos». Dados três pontos não colineares, chama-se —triângulo— (trilátero) à intersecção dos três semi-planos, cujas origens são as rectas definidas por aqueles pontos, dois-a-dois, e que contém o outro ponto.

A coincidência de dois segmentos iguais ou de dois ângulos iguais pode ter lugar por deslocamento, quer os segmentos e os ângulos sejam considerados isoladamente, quer façam parte de figuras que sejam deslocadas com eles[6].

Se por um ponto exterior a uma recta, se tirarem uma perpendicular e várias oblíquas:

a) a perpendicular será menor do que qualquer das oblíquas;

b) duas oblíquas, cujos pontos estão equidistantes do ponto da perpendicular, são iguais;

c) de duas oblíquas é maior aquela que tiver o ponto mais afastado do ponto da perpendicular.

Assim, qualquer ponto equidistante dos extremos de um segmento existe na perpendicular ao meio do segmento. Dois pontos, equidistantes dos extremos

[5] Cf. J. LUCAS MARQUES BARBOSA, *Geometria Euclidiana Plana*, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2000, 92-103.

[6] Cf. P. AMDREEV, E. SHUVALOVA, *Geometry*, tradução do russo, Moscow, Mir Publishers, 1974, 9-30.

de um segmento de recta, definem a recta perpendicular ao meio desse segmento. Como reciproco, deveremos salientar que qualquer ponto de uma recta perpendicular ao meio de um segmento está equidistante dos extremos do segmento: $AC = AD(AB \perp CD;\ CB = BD)$.

A recta perpendicular, ao meio de um segmento de recta, é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistante e dos extremos do segmento. Uma figura geométrica marcante foi a «circunferência» que é o lugar dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo. Na mesma circunferência, no mesmo arco ou no mesmo círculo todos os raios são iguais. Duas circunferências ou dois circulos são iguais se têm raios iguais e reciprocamente o diâmetro de uma circunferência ou de um circulo é igual ao dobro do raio. O mesmo diâmetro divide a circunferência ou o circulo em duas partes iguais. Um ponto exterior a uma circunferência ou a um circulo está a uma distância do centro maior do que o raio e um ponto interior a uma distância, menor do que o raio e reciprocamente. Dois arcos de uma circunferência ou de um círculo, cujos extremos podem coincidir, são iguais.[7]

Um lugar geométrico, segundo esta métrica, encontra-se traduzido pela linha poligonal (linha quebrada), sendo aquela que é formada por sucessivos segmentos de recta, tendo um extremo comum. Os segmentos, que constituem a linha poligonal, são os lados e os extremos dos segmentos que são os vértices. O número total de diagonais, que se podem tirar de um vértice poligononal, será igual ao número de lados, menos três ($n - 3$).

O número de triângulos, em que se poderá decompor um poligono, tirando por um vértice todas as diagonais, será igual ao número de lados, menos dois. Cada ângulo interno de um poligono regular de n-lados será igual a:

$$\frac{(n-2)2 \text{ rectas}^{8}}{n}$$

[7] Cf. E. AGAZZI, D. PALLADINO, *Le Geometrie non Euclidénne*, Milano, A. Mondadori Editore, 1978, 34-36.
[8] Cf. G. B. ROBINSON, «Geometry», in: *Collier's Encyclopedia*, Volume 10, New York, Macmillan Company, 1989, 686-687.

2.1.3. Dentro da Geometria Métrica encontramos a «geometria do espaço». Aqui, um plano é uma superfície indefinida, que contém a recta definida por dois quaisquer dos seus pontos. Deste axioma conclui-se que, uma recta não existente num plano, não pode ter mais do que um ponto comum com esse plano. Daqui surgem teoremas como: a intersecção de dois planos distintos, que têm um ponto comum, será uma recta: $\alpha \cap \beta$ = recta.

A Geometria Métrica termina com o estudo dos volumes ou dos sólidos, sendo a geometria a 3-dimensões. Aqui estudam-se os poliedros como sólidos limitados por superfícies. Os polígonos, que limitam um poliedro, são as faces, os lados e os vértices destes, sendo, respectivamente, as «arestas» e os «vértices» do mesmo. Um poliedro diz-se convexo quando fica todo para o mesmo lado em relação a qualquer dos planos das suas faces e no caso contrário diz-se concavo.

Logo, em qualquer poliedro convexo, o número de faces adicionadas com o número de vértices é igual ao número de arestas mais dois:

$$F+V=A+2$$ [9]

A Geometria dos volumes termina estudando as áreas e a dimensionalidade *in genere*. O verdadeiro início da Geometria terá sido com os chineses, em 3000 a.C., mas foram os gregos que começaram a sistematizar os conhecimentos com Tales de Mileto (575 a.C.) um dos sete sábios da Grécia, que bebeu os conhecimentos no Egipto[10].

2.2. Generalização das Geometrias Métricas

A proposição, apresentada por Euclides, descreve a imagem geométrica e surge como o axioma das paralelas (5º postulado de Euclides): No plano, por um ponto fora de uma recta, só se pode traçar uma paralela à recta dada.

---

[9] Cf. A. N. PALMA FERNANDES, *Elementos de Geometria*, 389.

[10] Cf. R. HARTSHORNE, *Geometry: Euclid and Beyond*, tradução do alemão, Berlin, Springer-Verlag, 2000, 1-7.

Mas, na extensão das geometrias métricas, porque é que Euclides o referiu como «postulado» e não como axioma? Vários génios da matemática, desde Proclo até Saccheri, Gauss, Lobatschevski e Riemann tentaram prová-lo como «teorema», uma vez que a sua evidência intuitiva não parecia ser de valor absoluto, mas relativo. Mas, tal postulado dependia da estrutura do espaço, ou seja, do seu «índice de curvatura»: $K = 1/R^2$. Daqui surgem três hipóteses possíveis:

a) Se a curvatura é nula ($K = 0$), então o enunciado do 5º axioma de Euclides é evidente *per se*, porque é indemostrável. E, logo, é possível a Geometria parabólica de Euclides;

b) Se a curvatura é negativa ($K < 0$), então o 5º postulado será diferente. Daqui surgirá a neogeometria hiperbólica de Lobatschevski e Bolyai;

c) Se a curvatura é positiva ($K > 0$), então, também, o enunciado do 5º postulado será diferente e serão possíveis outras duas neogeometrias: esférica e elíptica de Riemann.

Como generalizou Riemann, a Geometria depende de duas concepções fundamentais: a de variedade e a de medida da curvatura. Assim são possíveis várias geometrias, puras e analíticas, porque dependem da natureza, número e escolha dos axiomas.

O sentido da Geometria não-euclidiana poderá asseverar-se assim: «Euclid's bold assumption of the axiom of parallelism had been a source of vague disquiet to mathematicians for nearly two thousand years, but during the eighteenth century serious attempts were made to prove it on the basis of the other assumptions. Though these attempts were unsuccessful it was at least shown that the axiom is equivalent to the requirement that the sum of the angles of a triangle be equal to two right angles (π radians), as we have already noted. From this it was more of a psychological than a mathematical triumph to recognise that two other possibilities exist, namely, that (i) this sum is always greater than π, in which case there are no parallel lines and any two lines intersect, or (ii) this seem is always less than π, in which case there are two lines l', l' through P parallel to a given line l and any line lying, in the external angle between l' and l' does not meet l. The validity of the second possibility was recognized by K. F. Gauss (1777-1855) but first published simultaneously by J. Bolyai (1802-1860) and N. I. Lobatchevski (1793-1856).

It remained for Riemann to recognize the realization of the first possibility in spherical geometry, which had been developed to mead the needs of astronomy».

3. Geometria Projectiva

A Geometria Projectiva tem por objectivo o estudo das propriedades gráficas. Assim esta Geometria introduz somente postulados gráficos e exclui sistematicamente o uso de considerações métricas nos teoremas. Logo, a Geometria Projectiva tem, entretanto, interessantes relações com a Geometria Métrica. Estas constituem o objecto de aplicações da Geometria projectiva e encontram posição junto das proposições da Geometria propriamente dita[11]. Para sua demostração, não bastam já os postulados da Geometria. Requerem-se, também, as referentes às noções métrico-projectivas, supondo conhecidos os teoremas mais significativos da Geometria Elementar.

A Geometria forma um todo, havendo uma ligação métrica e figurativa com a Geometria Descritiva.

A Geometria Projectiva parte de conceitos fundamentais e simples: ponto, recta e plano. As formas, quer o plano quer a recta, denominam-se de primeira categoria, sendo determinadas pelo movimento simples de um dos seus elementos[12]. Chamam-se formas de segunda categoria: o plano ponteado, o da recta e a radiação dos raios ou planos.

Afirmamos que existem proposições da Geometria, que resultam imediatamente da intuição e poderão ser introduzidas como axiomas. Para alcançar o objectivo a que nos propomos, será útil o uso de locuções que têm o seu lugar na linguagem corrente da Geometria Elementar[13].

---

[11] Cf. V. M. DE SOUSA ALVES, *Ensaio de Filosofia das Ciências*, 471-472.

[12] Cf. G. B. ROBINSON, «Geometry», in: *Collier's Encyclopedia*, Volume 10, New York, Macmillan Company, 1989, 680-682.

[13] Cf. F. ENRIQUES, *Geometría Proyectiva*, tradução do inglês, Madrid, E. Espanholes, 1946, 10-12.

Segundo a Geometria Projectiva, poderemos considerar os seguintes elementos:

1. A série rectilínea imprópria é dada como conjunto de direções contidas na sua orientação e ainda o conjunto impróprio de infinitos planos.

Segundo a Geometria Projectiva, podemos projectar um plano pontuado desde um centro. No situado pelo plano, obtém-se uma proliferação de raios relacionando prospectivamente com o plano. Nesta forma geométrica, poderemos colocar a disposição circular dos elementos em forma de primeira categoria.

A intuição gráfica, que formamos da recta, é diferente da «intuição métrica», isto é, contém menos do que esta. O exemplo físico correspondente à primeira oferece-nos um fio de elasticidade variável, enquanto que o exemplo físico correspondente à segunda é oferecido pelo fio rígido.

Um dos fundamentais teoremas é o da «projectividade», partindo da propriedade que a define. Então, a questão fundamental, que é necessário resolver, será ver que condições determinam uma projectividade entre duas formas de primeira categoria e como será possível construir esta. Esta resolve-se pelo seguinte teorema fundamental:

Existe uma projectividade entre duas formas de primeira categoria, em que os três elementos delas correspondem três elementos da outra.

Esta projectividade é única e pode-se estabelecer mediante um número finito de projecções e secções[14].

Há projectividades entre formas da segunda categoria, onde a propriedade fundamental será um ponto e move-se num plano, descrevendo uma recta correspondente ao mover-se noutro plano, descrevendo ele, também, uma «recta». O producto das projectividades, em formas de segunda categoria, é uma homografia ou uma correlação, segundo as projectividades componentes sejam da mesma natureza ou de natureza distinta.

[14] Cf. C. M. K. BENNETT, *Affine and Projective Geometry*, New York, John Wiley and Sons, 1995, 41-46.

Os teoremas da Geometria Projectiva apresentam-se associados em pares, segundo certa lei, que se chama —lei da dualidade—. Se estão no teorema geral, relativo a formas de terceira categoria, então fixa-se o elemento gerado resultando fixadas as formas de primeira e segunda categorias de que se falava no enunciado e resultarão fixados os outros elementos fundamentais (pontos, rectas e planos) distintos daquele plano ou ponto, que se toma como elemento-gerador de terceira categoria. Para cada teorema deduzido das proposições fundamentais corresponde um teorema correlativo, dual ou recíproco, que se enuncia substituindo a palavra «ponto» pela palavra «plano» e, assim, sucessivamente.

Os teoremas, na Geometria Projectiva, oferecem exemplos de proposições correlativas:

— Três pontos, não pertencentes a uma recta, determinam um triângulo como uma figura composta por três pontos (vértices) das três rectas que elas determinam, dois ou mais lados, e do plano determinado pelos três pontos;

— Três planos, não pertencentes a uma recta, determinam um ângulo triedro: figura composta de três planos, por três rectas determinadas por dois a dois (arestas) e do ponto determinado pelos planos;

Assim, chamam-se incidentes duas rectas que passam por um ponto e estão situadas num plano. Duas rectas não «incidentes» diz-se que se cruzam[15]:

— Duas rectas, que têm um ponto comum, são «incidentes»;

— Duas rectas, situadas num plano, são «incidentes»;

— Dadas duas rectas, que se cruzam, por um ponto não situado nelas, passa uma recta incidente às duas dadas;

— Dadas duas rectas que se cruzam, num plano, que não passa por nenhuma delas, existe uma recta incidente com as duas rectas dadas. Com efeito, esta recta determina-se como intersecção dos planos que projectam as duas rectas desde o ponto;

[15] Cf. A. HEYTING, *Axiomatic Projective Geometry*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1980, 24-60.

— Dadas duas rectas, que se cruzam, num ponto de uma delas será o «centro» de um feixe de raios-incidentes com as duas rectas dadas. Todavia, dadas duas rectas, que se cruzam, num plano, que passe por uma delas, existe um feixe de raios incidentes com as duas rectas dadas;

— Todas as rectas que passam por um ponto de uma recta são incidentes a ela. Entre estas, as que devem ser incidentes com a outra recta, tem que estar no plano que se determina pelo ponto da primeira;

— Todas as rectas situadas, num plano, passam por uma recta são incidentes a ela. Entre estas, as que devem ser incidentes à outra recta, devem passar pelo ponto, que ela determina como intersecção do plano considerado através da primeira;

— Dadas duas rectas incidentes por um ponto, não situado no plano a que elas pertencem, passa uma recta incidente por ambas;

— Dadas duas rectas incidentes, no plano, que não contenha o ponto a que elas pertencem, existe uma recta incidente em ambas;

— Esta recta é a que se projecta desde o ponto dado pela intersecção das duas rectas;

— Esta recta é a secção do plano, em que estão situadas as duas rectas[16].

Na Geometria Projectiva, todo o teorema que enuncia a propriedade de uma figura, pertencente a uma forma de segunda categoria, pode enunciar-se, sem determinar de que forma, pela segunda categoria, se trata, falando somente da forma de segunda categoria e de seus elementos. Nesta Geometria, as leis da dualidade no plano são dois teoremas correlativos no espaço.

Também, para o plano, se poderá estabelecer, mais tarde, a «lei da dualidade» para os teoremas gráficos independentemente do modo como estes foram demonstrados. Mas, esta lei não será *in genere* aplicável para a lei da dualidade no espaço[17].

[16] Cf. M. POSTINOV, *Lições de Geometria*, tradução do russo, Moscovo, Editora Mir, 1990, 10-16; P. F. SCCORSI, *De Geometria non Euclidiana, ad usum nostrorum*, Romae, Velox, 1938, 7-18.

[17] Cf. L. E. GARNER, *An Outline of Projective Geometry*, New York, North Holland, 1981, 18-20.

Dois são os teoremas fundamentais da Geometria Projectiva como o teorema dos triângulos homólogos e correlativos e o teorema dos quadrivértices homólogos.

Se os dois triédros são elementos comuns (lados e vértices), não pertencentes ao mesmo plano, então relacionam-se entre si de maneira que os lados homólogos sejam incidentes. As rectas que unem os vértices homólogos passam por um mesmo ponto.

Para determinar os teoremas correlativos no espaço, referimos que são dados dois planos quadrivértices completos (*ABCD*, *A'B'C'D'*) e são «elementos comuns» relacionados entre si de maneira que cinco pares de lados homólogos: *AB*, *A'B'*, *AC*, *A'C'*, *AD*, *A'D'*, *BC*, *B'C'*, *BD*, *B'D'*, determinam cinco pontos pertencentes a uma recta ou que não contenha nenhum dos oito vértices. Então, o sexto par de lados homólogos (*CD*, *C'D'*) determinará um ponto da recta ou as rectas de união passarão por um mesmo ponto[18].

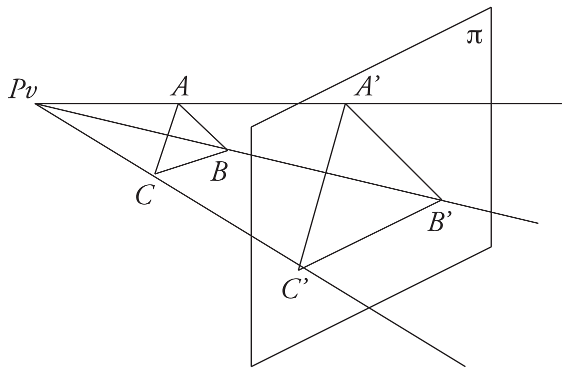
4. Geometria Descritiva

4.1. Na construção das suas obras, desde as mais simples às mais artísticas, usavam-se os antigos artífices em certos traçados, que eram *in genere* destribuidos ou, quando muito, ensinados a alguns iniciados. Estes segredos foram conservados através da Idade Média pelas sociedades de artífices. No século XVIII, o geometra francês Monge concluiu que o segredo de todas estas admiráveis construções se baseava em poucos princípios fundamentais, à parte evidentemente a habilidade artística, que presidia à sua concepção. Assim chegou à descoberta dos princípios fundamentais da Geometria Descritiva, isto é, ao estudo das propriedades das figuras por meio do emprego sistematizado das respectivas projecções e, de tal modo, encantou o encadeamento do estudo da Geometria Descritiva, que é da sua autoria o «aforismo»: para se saber Geometria Descritiva basta saber representar o ponto, a recta e o plano.

No estudo das várias figuras, em Geometria Descritiva, faz-se a sua projecção sobre certas superfícies, em regra sobre planos e o modo de fazer tal projecção

[18] Cf. F. ENRIQUES, *Geometría Proyectiva*, tradução do francês, Madrid, E. Espanholes, 1946, 41-42.

pode variar: a projecção central considera-se um dado ponto, de onde partem «semi-rectas», rasando a figura a projectar. A intercepção de tais semi-rectas, com um dado plano, dá-nos, neste, a perpectiva rigorosa ou simplesmente a perspectiva da figura apresentada[19].



O ponto, onde irradiam as semi-rectas, chama-se, então, ponto de vista. A câmara escura dá-nos perspectivas dos objectos. Mas, em vez da projecção se fazer sobre uma superfície plana, pode fazer-se sobre um cilindro. Usa-se, em cartografia, a projecção de uma esfera sobre um cilindro tangente.

A projecção paralela ou cilíndrica obtém-se da anterior, supondo que o ponto de vista se desloca para o infinito. As rectas rasantes da figura são, então, paralelas entre si[20].

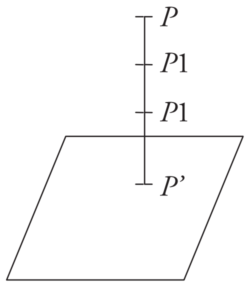
Se o plano, que intercepta tais rectas para nos dar a projecção da figura, for oblíquo, em relação à direcção delas, então teremos uma projecção oblíqua. Se o plano e a direcção das rectas forem perpendiculares, então teremos a projecção ortogonal. Sendo, sobretudo, desta que a Geometria Descritiva se ocupa.

Assim, dado um ponto e um plano, a projecção ortogonal do ponto sobre o plano é a base da perpendicularidade do ponto para o plano.

---

[19] Cf. *Idem, Lecciones de Geometria Descriptiva*, tradução do francês, Madrid. E. Rialto, s/d, 3-5; I. PÁL, *Geometria Descriptiva*, tradução do italiano, Madrid, Aguilar, 1965, 31-35.

[20] Cf. H. S. M. COXETER, *Projective Geometry*, Toronto, University Press, 1974[2], 71-78.



Qualquer ponto *P*1, *P*2, da perpendicular, baixando de *P* sobre o plano, tem a mesma projecção que este ponto. Portanto, para ficarmos a conhecer a posição do ponto *P* no espaço não nos bastava conhecer a sua projecção *P'*.

Seria, além disso, necessário conhecer a sua distância do plano, isto é, a sua cota. Assim, teríamos a projecção cotada. Outro modo de ladear a dificuldade será fazer uso de dois planos perpendiculares entre si (planos de projecção), um *H* que se chama plano horizontal e outro plano *V*, que se diz vertical, os quais dividem o espaço em quatro quadrantes[21].

4.2. Representação do ponto, da recta e do plano

As projecções do ponto P, nos dois planos da projecção, são *P'*, no plano horizontal, e *P"* no plano vertical. A recta *PP"* será a projectante horizontal do ponto *P* e a recta *PP'* é a sua projectante vertical. A intercepção dos dois planos de projecção chama-se «linha de terra».

Assim, o plano definido pelas projectantes do ponto é perpendicular à linha de terra que se encontra no ponto P_0. Dadas que são, agora, as projectantes do ponto e perpendicular à linha de terra, que se encontra no ponto *P*. Agora, as projecções *P'* e *P"*, de um ponto, já podem encontrar tal ponto. Ele encontrar-se-á na intercepção de duas rectas: uma conduzida por *P'*, paralela ao plano vertical e outra passando por *P"*, paralela ao plano horizontal.

A distância do ponto *P*, no plano horizontal da projecção, chama-se a cota de *P*, isto é, a cota de *P* é a medida do segmento $\overline{PP'}$, sendo $\overline{PP''}$ o afastamento do ponto *P*. A representação, de um ponto em relação aos planos de projecção, será feita em perpectiva. Para contornar uma tal dificuldade dá-se uma rotação

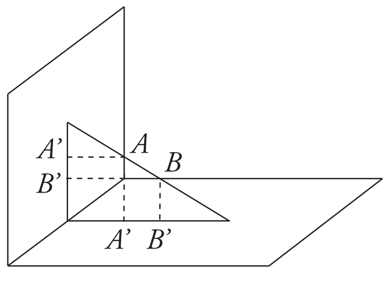
[21] Cf. L. de Albuquerque, *Elementos de Geometria Projectiva e Geometria Descritiva*, Coimbra, Livraria Almedina, 1969, 103-123.

no plano vertical, em torno da linha de terra, de modo que, suposto o observador, no primeiro quadrante, com os pés assentes no plano horizontal, ele veja a parte superior do plano vertical ao ir coincidir com o semiplano horizontal posterior[22].

4.3. Representação da linha recta

Evidentemente que, dadas as projecções de uma recta se encontram no espaço conduzindo, por tais projecções, planos paralelos aos planos de projecção os quais se vão interceptar.

Uma recta fica bem definida pelas projecções. Com efeito, supondo que a recta existe num plano perpendicular à «linha de terra», as suas duas projecções serão perpendiculares à linha da mesma. Isto mesmo sucede com qualquer recta situada num plano. Nestas condições não basta dar as suas projecções (intercepções dos seus planos projectantes com os planos de projecção). Tais planos projectantes confundem-se. Há, pois, que dar as projecções de dois dos seus planos:



Uma recta que seja paralela ao plano horizontal diz-se «recta horizontal». Neste caso, o seu plano projectante vertical será paralelo ao plano horizontal pelo que a sua projecção será paralela à linha de terra[23].

[22] Cf. A. BEUTELSPACHER, *Projective Geometry: from foundations to application*, Cambridge, University Press, 1998, 95-126.

[23] Cf. F. ENRIQUES, *Lecciones de Geometria Descriptiva*, 10-12; A. QUEIRÓZ, *Lições de Geometria Descritiva*, Volume I, Porto, Fernando Machado, 1931, 24-31.

4.4. *Representação do plano*

Um plano não pode ser dado pelas suas projecções. Com efeito, um plano que não seja perpendicular no plano horizontal cobriria, com a sua projecção, todo este plano horizontal e um caso semelhante sucedia com um plano que não fosse perpendicular ao plano vertical.

Um dos problemas fundamentais da Geometria Descritiva reside nas «métricas». Assim, nas determinações das «distâncias», temos sempre que conhecer a verdadeira grandeza de um segmento, cujas proporções das extremidades nós conhecemos. Um tal segmento não é paralelo a nenhum dos planos de projecção e, por isso, nenhuma das suas projecções nos dará a sua verdadeira grandeza. Um modo de solução desta dificuldade será colocar o segmento paralelamente a algum dos planos da projecção[24].

5, Geometria Analítica

5.1. *Questão fundamental*

A Geometria Analítica denomina-se, também, de geometria cartesiana e tem, por objectivo, o estudo das propriedades das «figuras geométricas» por intermédio da Álgebra. Pela Geometria Analítica surge uma «relação» entre a figura espacial e o espaço numérico. Tal situação cria uma nova perspectiva predicamental na filosofia da matemática com esta nova «extensão quantitativa», que se determina pela categoria formal e pela ontologia, pelos predicamentos do existir quantitativo da relação. Esta categoria é um fundamento ontológico para a Geometria Analítica.

Todavia, este método de estudo e de sistemática da Geometria abriu largos horizontes a esta ciência. Deve-se a R. Descartes, que expôs os princípios analíticos, a «Geometria», publicada em 1637, pela primeira vez, em latim[25].

---

[24] P. P. ADAM, *Curso de Geometria Metrica*, Tomo II, Madrid, Nuevas Gráficas, 160-169.

[25] Cf. B. A. ROSENFELD, *A History of Non-Euclidian geometry*, tradução do alemão, Berlin, Springer-Verlag, 1988, 152-163.

Com efeito, para reduzir os problemas da Geometria a questões de Álgebra, será necessário traduzir a forma das figuras por meio de relações entre quantidades numéricas. Como a forma de uma figura depende das posições dos seus diferentes pontos, a questão fundamental da Geometria Analítica consiste em representar por meio de quantidades numéricas a posição de um ponto em relação a pontos ou linhas de posições conhecidas. Daqui que a essas posições, definidas quantitativamente, dá-se o nome de «coordenadas do ponto».

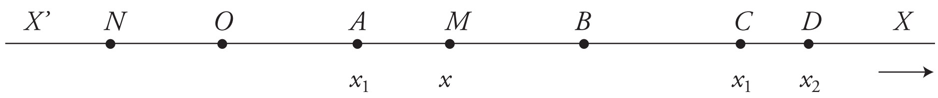
Uma vez que os pontos se representam por coordenadas, será possível apresentar uma recta ou um plano, por qualquer figura geométrica através de equações ou sistemas de equações. O estudo da recta, do plano ou do volume reduz-se, então, à análise dessas equações. Compreende-se, por isso, que a Geometria Analítica conduz a resultados muito mais gerais do que aqueles que se encontravam, quando o estudo era feito *sub specie* para as figuras[26].

Assim, os geometras antigos sabiam que a tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio. Sabiam, também, determinar as tangentes a alguma outra curva, mas para cada uma delas era necessária uma condição especial. Logo, a Geometria Analítica fornece-nos um método geral para determinar as tangentes a todas as curvas pertencentes a um grande grupo.

5.2. Representação de um ponto sobre uma recta e razão não-harmónica de quatro pontos

Considere-se uma «recta» e sobre ela um ponto fixo *O*. A cada ponto *M* da recta corresponde um número real, *x*, que é a medida do segmento *OM* e a cada número real *x* corresponde um único ponto da recta, se convencionarmos considerar, como positivos, os segmentos *OM* gerados pelo ponto *O*, movendo-se no sentido da seta, e, como negativos, os segmentos gerados pelo ponto O, movendo-se no sentido oposto. Daqui se segue que a posição de um ponto sobre uma recta fica definida por uma única coordenada, que se chama «abcissa» do ponto. A recta *X'X*, para cada um dos pontos da qual corresponde uma abcissa, chama-se «eixo orientado».

[26] Cf. A. MADUREIRA, *Lições de Álgebra Superior e Geometria Analítica*, Tomo II, Geometria Analítica, Porto, Porto Editora, s/d, 5-8.



O ponto O, correspondente à abcissa $x = 0$, chama-se a «origem» das abcissas[27].

Dois pontos M e N, deste eixo orientado, definem dois segmentos distintos: o segmento MN e o segmento NM. O primeiro considera-se gerado por um ponto, movendo-se desde N até M, e, por isso, diremos que tem a origem N e a extremidade M.

A medida do segmento é sempre igual à diferença entre a abcissa da extremidade e a abcissa da origem.

Assim, representando por x_M e x_N as abcissas dos pontos M e N, teremos:

$MN = x_N - x_M$;

$NM = x_M - x_N$;

Logo, $N{\cdot}M = -M{\cdot}N$

Mas, também, dá-se o nome de «razão harmónica» dos quatro pontos: A, B, C e D, em que A é conjugado de B e C conjugado de D e pelo quociente das duas razões virá:

$$\frac{AC}{BC} \text{ e } \frac{AD}{BD}$$

Representa-se essa razão não-harmónica por: A, B, C e D.

Dividindo, virá:

$$(AB,CD) = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{k \cdot h'}{h \cdot k'}$$

[27] Cf. B. IVERSEN, *Hyperbolic Geometry*, Cambridge, University Press, 1992, 1-12.

Quando $\gamma = -\gamma$, a razão (A, B, C, D) chama-se —harmónica—. As abcissas dos pontos A, B, C e D são então:

$$A \text{ ———————— } x_1$$

$$B \text{ ———————— } x_2$$

$$C \text{ ———————— } x_3 = \frac{x_1 - \gamma x_2}{1-\gamma} = \frac{h x_1 - h x_2}{h-k}$$

$$D \text{ ———————— } x_4 = \frac{x_1 + \gamma x_2}{1+\gamma} = \frac{h x_1 + h x_2}{h+k}$$

Ao sistemas de «quatro pontos»: ABC e D chamaremos «grupo harmónico»[28].

Os grupos harmónicos possuem algumas propriedades:

1.º Dois pontos conjugados ficam sempre separados por um dos outros dois;

2.º Quando o ponto D está no infinito, o seu conjugado é o ponto médio de AB;

3.º Entre os segmentos AB, AC e AD, existe a relação:

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

Com efeito:

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{\frac{x_1 - \gamma x_2}{1-\gamma} - x_1} + \frac{1}{\frac{x_1 + \gamma x_2}{1+\gamma} - x_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma(x_2 - x_1)} + \frac{\gamma + 1}{\gamma(x_2 - x_1)} = \frac{2}{x_2 - x_1} = \frac{2}{AB}$$

4.º Se M é o ponto médio de AB, teremos:

$$MC \times MD = \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2$$

[28] Cf. R. D. GUSTAFSON, P. D. FRISK, *Elementary Plane Geometry*, New York, J. Wiley and Sons, 1985, 39-64.

Teremos efectivamente:

$$MC \times MD = \left(\frac{x_1 - \gamma x_2}{1-\gamma} - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \times \left(\frac{x_1 + \gamma x_2}{1+\gamma} - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) = \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right)^2 = \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2$$ [29]

5.3. Representação de um ponto no plano e relações entre coordenadas polares

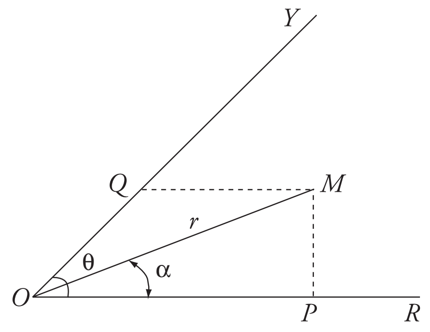
A posição de um ponto no plano fica determinada por duas coordenadas, respectivamente:

5.3.1. Coordenadas cartesianas

Consideremos dois eixos orientados com a mesma origem O e um ponto M qualquer. Projectando o ponto M sobre cada um dos eixos, segundo a direcção do outro, obteremos os pontos P e Q. A posição do ponto M fica determinada pelas coordenadas dos pontos P e Q sobre os eixos orientados OX e OY. Efectivamente, há uma correspondência biunívoca entre os pontos M e as coordenadas:

$$x = OP \qquad y = OQ$$

que se chamam, respectivamente, a abcissa e a ordenada do ponto M. Os dois eixos OX e OY podem ser perpendiculares e, então, as coordenadas cartesianas dizem-se «ortogonais» ou rectangulares. No caso contrário dizem-se oblíquas segundo a figura:



[29] Cf. M. VYGODSKE, *Aide-mémoire de Mathématiques Supérieures*, tradução do russo, Moscou, E. Mir, 1980, 26-35.

5.3.2. Coordenadas polares

Considerando um único eixo orientado (ou antes um semi-eixo *OX*), a posição de um ponto *M* fica determinada pelo ângulo α das duas semi-rectas *OX* e *OM*, marcado a partir de *OX*, no sentido directo, a distância $\vec{r}$ do ponto *M* ao ponto *O*.

As duas quantidades α e *r* chamam-se coordenadas polares do ponto *M*.

Sejam (*X*, *y*) os eixos cartesianos, formando entre si um ângulo θ, suponhamos que as coordenadas polares são referidas ao semi-eixo *OX*. O triângulo *OPM* será:

$$\frac{OP}{\operatorname{sen} OMP} = \frac{MP}{\operatorname{sen} OMP} = \frac{OM}{\operatorname{sen} OMP}$$

ou qualquer que sejam os sinais de *x* e *y*:

$$\frac{x}{\operatorname{sen}(\theta - \alpha)} = \frac{y}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{r}{\operatorname{sen}\theta}$$

Donde:

$$x = r\frac{\operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$y = r\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta}$$ [30]

Estas fórmulas dão-nos as coordenadas cartesianas do ponto *M* em função das coordenadas polares. O mesmo triângulo dá também:

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 - 2\overline{OP} \cdot \overline{PM} \cdot \cos OPM$$

[30] T. J. PIGNANI, P. W. HAGGARD, *Modern Analytic Geometry*, Lexington, D. C. Heath, 1970, 43-78.

ou qualquer que sejam os sinais de *x* e *y*:

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cdot \cos\,\theta$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cdot \cos\,\theta}$$

Conhecido *r*, as fórmulas trigonométricas anteriores dão:

$$\operatorname{sen}(\theta - \alpha) = \frac{x \cdot \operatorname{sen}\alpha}{r}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y \cdot \operatorname{sen}\theta}{r}$$

Portanto:

$$\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\alpha - \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\alpha = \frac{x \cdot \operatorname{sen}\theta}{r}$$

Donde:

$$\cos\alpha = \frac{x + y \cdot \cos\theta}{r}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y \cdot \operatorname{sen}\theta}{r}$$

As fórmulas anteriores dão-nos as coordenadas polares do ponto *M* em função das coordenadas cartesianas. Da mesma forma surge a representação de um ponto no espaço por três coordenadas.

Poderemos considerar a equação cartesiana duma forma arbitrária:

$UX + VY + st = 0$, em que U, V, s são parâmetros arbitrários. Esta recta passará por um ponto dado (x_1, y_1, t_1), se se verificar a equação de condição:

$$UX_1 + VY_1 + st_1 = 0$$

As infinitas soluções (U, V, s) desta equação representam, então, as infinitas rectas, que passam pelo ponto (X_1, Y_1, t_1). Este fica determinado pela intersecção dessas rectas, e, portanto, pela equação que se chama a «equação pulckeriana» do ponto. As coordenadas cartesianas homogéneas do ponto representado pela equação anterior são os coeficientes: X_1, Y_1, t_1 de U, V, s. E, reciprocamente, a equação do ponto, cujas coordenadas homogéneas são X_1, Y_1, t_1 e definem uma equação. Uma equação pulckeriana dum ponto do infinito e cujas coordenadas são $|A1, Y1, 0|$.

$$UX_1 + VY_1 = 0, s = 0; U = 0; V = 0$$

No 1º caso, a recta contém todos os pontos, cujas coordenadas cartesianas satisfazem à equação em: X, Y e t:

$$U_1X + V_1Y + s_1t = 0$$

No 2º caso, o ponto é a intersecção comum das rectas, cujas coordenadas satisfazem à equação em U, V e s:

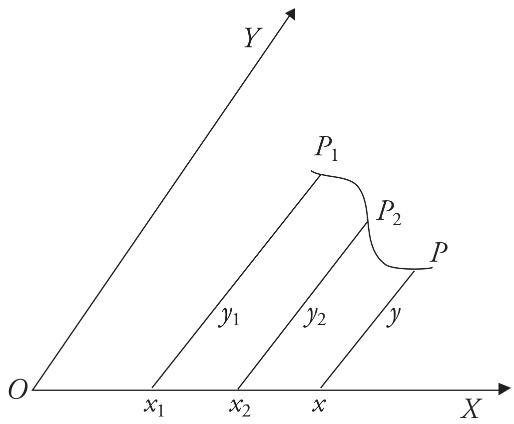
$$X_1U + Y_1V + t_1s = 0$$ [31]

Partindo desta dupla representação analítica do ponto e da recta, resulta a seguinte lei, chamada lei da dualidade do plano: se no enunciado de qualquer problema ou teorema em que se entra em consideração apenas com as posições relativas de pontos e rectas, mudarmos o ponto em recta e recta em ponto (recta que une dois pontos em ponto de intersecção de duas rectas e reciprocamente) obtemos o enunciado de um problema ou teorema, diferente dos primeiros e cuja resolução ou demonstração se faz exactamente como os das primeiras, substituindo as coordenadas cartesianas pelas coordenadas pluckerianas[32].

Um problema fundamental da Geometria Analítica encontra-se na representação das «linhas curvas».

[31] Cf. N. EFIMOV, *Eléments de Géométrie Analytique*, tradução do russo, Moscou, Éditions Mir, 1976, 19-20.

[32] Cf. B. RUSSELL, *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge, University Press, 1996, 149-160.



Com efeito, a figura, aqui indicada, mostra claramente que as ordenadas dos diferentes pontos de uma linha são funções das abcissas dos mesmos pontos. A linha será representada, portanto, por uma equação: $Y = f(x)$, que satisfaz as coordenadas de todos os pontos da linha e só as coordenadas desses pontos. Chama-se equação cartesiana da linha a essa equação.

Do mesmo modo, obtém-se a equação de uma linha em coordenadas polares, procurando a relação $\rho = f(\phi)$ entre as coordenadas polares ρ e ϕ de todos os pontos da linha. A equação da linha pode apresentar-se com a forma $F(x, y) = 0$, definindo y como função implícita de x[33].

5.4. *Curvas algébricas de 2ª ordem ou «cónicas»*

As curvas algébricas, de 2ª ordem, denominam-se pela equação geral:

$f(x, y) = A_1x^2 + A_2y^2 + A + 2B_1y + 2B_2x + 2B_3xy = 0$, em que os coeficientes são reais.

Em coordenadas homogéneas fica:

$f(x, y, t) \equiv A_1x^2 + A_2y^2 + A_3t^2 + 2B_1yt + 2B_2xt + 2B_3xy = 0$. Esta equação nem sempre representa uma «curvatura». Pode representar duas rectas, se a função

[33] Cf. M. VYGODSKE, *Aide-mémoire de Mathématiques Supérieures*, 23.

$f(x, y, t)$ for decomponível num produto de 2 funções: X_1 e X_2 do 1º grau. Estas rectas serão distintas ou coincidentes conforme for: $X_1 + X_2$ ou $X_1 = X_2$.

Ao sistema de duas rectas:

$$X_1 = Ax + By + Ct = 0.$$

$$X_2 = A'x + B'y + C't = 0$$

Representadas pela equação do 2º grau, dá-se o nome de «cónica degenerada».

A condição necessária e suficiente para que a equação geral das cónicas represente uma cónica degenerada é que o descriminante da forma quadrática $f(x, y, t)$ seja nulo. A equação:

$f(x, y, t) \equiv X_1^2 \pm X_2^2 \pm X_3^2 = 0$ representa uma «curva», se as formas lineares X_1, X_2 e X_3 forem independentes, isto é, se o descriminante da forma $f(x, y, t)$ for diferente de «zero».

Surgem variadas cónicas em função da equação geral:

- $B_3^2 - A_1A_2 > 0 \rightarrow$ a cónica tem 2 pontos reais distintos no infinito (hipérbole);
- $B_3^2 - A_1A_2 = 0 \rightarrow$ a cónica tem 2 pontos reais e coincidentes no infinito e tangentes à recta do infinito (parábola);
- $B_3^2 - A_1A_2 < 0 \rightarrow$ a cónica tem 2 pontos imaginários conjugados no infinito (elipse)[34].

6. Geometria Diferencial

Depois de definir as tangentes para uma curva plana, no ponto (y_1, y_2) pelo significado de: $m = dy_2/dy_1$, poderemos descrever esta equação, como:

$$x_2 - y_2 = m(x_1 - y_1)$$

[34] Cf. A. MADUREIRA, *Lições de Álgebra Superior e Geometria Analítica*, Tomo II, 76-78.

Nos termos dos «diferenciais», esta equação toma a forma:

$(x_1 - y_1)/dy_1 = (x_2 - y_2)/dy_2$, que se extende imediatamente às equações das tangentes para definir uma curva no ponto (y_1, y_2, y_3):

$$(x_1 - y_1)/dy_1 = (x_2 - y_2)/dy_2 = (x_3 - y_3)/dy_3$$

A equação do plano oscilante, (plano de uma tangente) para uma curva, será dada por uma determinante:

$$\begin{bmatrix} x_1 - y_1 & x_2 - y_2 & x_3 - y_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ dy_1 & dy_2 & dy_3 \end{bmatrix} = 0$$

Todas estas equações se explicitam em ordem ao lugar em questão por definição analitica. Parametricamente, virá pela determinação: $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ e $y_3 = y_3(t)$[35].

A Geometria Diferencial tornou-se estabelecida, como um ramo importante da Matemática, quando Riemann observou que o teorema de Pitágoras pode ser, ainda, generalizado e usado para definir uma medida do comprimento ao escrever:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\ dx_i\ dx_j$$

Se $n = 3$, e $g_{ij} = 1$ (se $i = j$) e se $i \neq j$, teremos, então, a Geometria euclidiana descrita em termos de coordenadas cartesianas. Outras escolhas possíveis para g_{ij} conduzem a sistemas geométricos novos em particular para a geometria da relatividade espacial e da generalizada. A noção de espaço vectorial está implícita na noção de Geometria Diferencial. Se $\vec{A}$ é um vector, onde o comprimento é igual à unidade (vector unitário), dependente do parâmetro escalar t, teremos: $\vec{a}d\vec{A}/dt = \vec{A} = 0$. Quer

[35] Cf. V. SMIRNOV, *Cours de Mathématiques Supériores*, Tome II, tradução do russo, Moscou, Éditions Mir, 1970, 406-413.

dizer que $d\vec{A}/dt$ é perpendicular a $\vec{A}$. Depois da condição $A \cdot A = 1$, então diferenciamos esta igualdade em relação a t, e virá:

$$d\vec{A}/dt \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot d\vec{A}/dt = 0$$

Será que o produto escalar não depende da ordem dos factores:

$$d\vec{A}/dt = \vec{A} = 0$$

$$d\vec{A}/dt \perp \vec{A}$$

A afirmação não tem evidentemente sentido, sempre que o «vector» não é «nulo»[36].

Sendo uma curva (L) no plano e, no parâmetro escalar t, determinando a posição do ponto variável M desta curvatura, poderemos definir a curvatura por meio de um raio-vector $\vec{r}(t)$, tomado de um ponto fixo qualquer O no ponto variável da curvatura.

A partir do lema, o «vector» da curvatura é perpendicular à tangente, isto é, levado pela «normal» à curvatura.

O comprimento do vector $\vec{N}$ é como já fora indicado, curvatura de curvatura e será perpendicular à tangente, isto é, levado pela normal à curvatura.

O comprimento do vector é, tal como nós já o indicámos, chamado de curvatura e assim será:

$$|\vec{N}| = 1/\rho$$

A grandeza ρ, inversa da curvatura, será o «raio da curvatura». Seja $\vec{n}$ o vector unitário de curvatura, quer dizer o «vector» de comprimento-unidade da mesma orientação que $\vec{N}$[37].

---

[36] Cf. S. BREMER, H. HAAR, *Differentialformen und Vektoranalysis*, Berlin, VEB Deutscher-Verlag, 1973, 43-58.
[37] Cf. HUNG-HSIWU (edit.), *Contemporary Geometry*, New York, Plenum Press, 170-179.

Apresentamos a equação de uma superfície no espaço em relação aos eixos de coordenadas *X*, *Y*, *Z*, sob a forma explícita: $z = f(x, y)$ ou sob a forma implícita: $F(x, y, z) = 0$.

Poderemos escrever as equações de uma superfície sob a forma paramétrica, exprimindo as coordenadas destes pontos sob forma de funções de dois parâmetros variáveis, independentes *u* e *v*:

$$x=\varphi(u,v);\ \ y=\psi(u,v);\ \ z=\omega(u,v)$$

Supomos que estas funções são univocas, contínuas e têm derivadas contínuas até à décima segunda ordem, incluíndo um certo domínio de variação de parâmetros (*u*, *v*).

Se nós introduzirmos estas expressões de coordenadas em *u* e *v*, nos primeiros membros da equação: $F(x, y, z) = 0$, obteremos uma identidade em *u* e *v*.

Deferenciando esta unidade por relação às variáveis independentes *u* e *v*, virá:

$$\partial F/\partial x\cdot\partial\varphi/\partial u+\partial F/\partial y\cdot\partial\psi/\partial u+\partial F/\partial z\cdot\partial\omega/\partial u=0;$$
$$\partial F/\partial x\cdot\partial\varphi/\partial v+\partial F/\partial y\cdot\partial\psi/\partial v+\partial F/\partial z\cdot\partial\omega/\partial v=0$$

Um dos elementos fundamentais da Geometria Diferencial reside nas formas diferenciais de Gauss[38]. Ao estudarmos o quadrado do diferencial do arco duma curvatura qualquer, sob a superfície considerada, virá:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=$$
$$=(\partial x/\partial u\cdot du+\partial x/\partial v\cdot dv)^2+(\partial y/\partial u\cdot du+\partial y/\partial v\cdot dv)^2+(\partial z/\partial u\cdot du+\partial z/\partial v\cdot dv)^2$$

Se abrirmos o parêntesis, teremos a primeira forma diferencial de Gauss:

$$ds^2=E(u,v)du^2+2F(u,v)dudv+G(u,v)dv^2$$

[38] Cf. W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, I, Berlin, Julius Springer-Verlag, 1924, 78-81.

Da mesma forma surge uma generalização do teorema de Gauss:

Determinando a relação: $s \cdot m = 0$, em ordem ao comprimento do arco s da curvatura (L), teremos:

$$d\vec{t}/ds \cdot \vec{m} + \vec{t}\ d\vec{m}/ds = 0 \quad ; \quad 1/\rho(\vec{n} \cdot \vec{m}) + \vec{t}\ d\vec{m}/ds = 0$$

A igualdade precedente poderá ser colocada sob a forma:

$$\vec{n} \cdot \vec{m}/\rho = -d\vec{r}/ds \cdot d\vec{m}/ds \cdot \vec{n} \cos\varphi/\rho = -d\vec{r}\ d\vec{m}/ds^2$$

Exprimindo os diferenciais $d\vec{r}$ e $d\vec{m}$ em função dos parâmetros de coordenadas u e v, teremos:

$$\cos\frac{\varphi}{\rho} = \frac{-(\vec{r}udu + \vec{r}vdv) \cdot d(\vec{m}udu + \vec{m}vdv)}{ds^2}$$

Tirando os parentesis do numerador, surge a forma de Gauss:

$$-(\vec{r}udu + \vec{r}vdv)(\vec{m}udu + \vec{m}vdv) = L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2$$

segundo as formulas diferenciais de Gauss[39].

7. Topologia: a geometria do lugar

7.1. Evolução e sentido

A teoria geral dos grupos de transformações deve-se a S. Lie (1842-1899), que desenvolveu um vasto território formal da Matemática. A Topologia tem a propriedade de estudar as estruturas e figuras qualitativas, bem como a continuidade pelos conceitos de vizinhança e de limite. A Topologia Geral, também, se chama «topologia dos conjuntos de pontos»[40].

---

[39] Cf. W. BRUCE, *Applied Differential Geometry*, Cambridge, University Press, 1985, 360.

[40] Cf. A. I. MÁLTSEV, *Fundamentos de Álgebra Linear*, tradução do russo, Moscú, E. Mir, 1976, 326-352.

Um dos elementos fundamentais são os «espaços topológicos». Seja X um conjunto não-vazio, uma classe T de subconjuntos de X é uma topologia em X se, e somente se, T satisfaz os seguintes axiomas:

- A_{X1} – X e ϕ pertencem a T;
- A_{X2} – A união de um número qualquer de conjuntos de T pertence a T;
- A_{X3} – A intersecção de dois conjuntos quaisquer de T pertence a T.

Os elementos de T chamam-se conjuntos T abertos, ou, simplesmente abertos e X_i juntamente com T, isto é, o par (X, T) será chamado de «espaço topológico»[41].

Daqui poderemos apresentar alguns teoremas dos «espaços topológicos»:

- Teor$_1$ – Seja $\{T_i | i \in I\}$ uma colecção de topologias num conjunto X. Então, a intersecção $X \cap_i T_2$ é, também, uma topologia em X.

Os axiomas anteriores equivalem aos dois seguintes:

- A_{X1} – A união de um número qualquer de conjuntos, em T, pertence a T;
- A_{X2} – A intersecção de um número finito qualquer de conjuntos em T, pertence a T. Mas, o A_{X1} implica que ϕ pertence a T, pois:

$$\cup\{G \in T : G \in \phi\} = \phi$$

A união vazia de conjuntos é um «conjunto vazio». Além disso, A_{X2} implica que X pertence a T, dado que:

$$\cap\{G \in T : G \in \phi\} = X$$

Logo, a intersecção vazia de subconjuntos de X é o próprio X. Com efeito, X é um espaço topológico. Um ponto $p \in X$ é «ponto de acumulação» ou ponto

[41] Cf. S. LIPCHUTZ, *Topologia Geral*, tradução do inglês, Rio de Janeiro, E. McGraw-Hill, 1971, 51-53.

limite de um subconjunto A de X se e só se todo o «conjunto aberto» G, que contém p, implique também um ponto de A diferente de p, isto é:

$$G \text{ aberto}, p \in G \rightarrow \{G \setminus |p|\} \cap A \neq \phi$$

O conjunto dos pontos de acumulação de A, representado por A', é chamado o conjunto derivado de A.

Mas, sendo X um espaço topológico, temos um subconjunto de A de X, que é fechado se e só se o seu complementar é aberto. Recordemos, pois, que $A^n = A$ será para qualquer subconjunto A de um espaço topológico X[42].

Daqui surgem alguns teoremas:

Teor$_2$ – Seja X um espaço topológico, então a classe de subconjuntos fechados de X possui, as seguintes propriedades:

ii(i) – X e ϕ são «fechados»;

i(ii) – A intersecção de um número qualquer de espaços fechados é fechado;

(iii) – A união de dois fechados quaisquer é fechada.

Os conjuntos fechados podem, também, definir-se em termos de pontos de acumulação, como seguem:

Teor$_3$ – Um subconjunto A de um espaço topológico X é fechado se e só se A contém cada um dos seus pontos de acumulação. Por outras palavras, um conjunto A', derivado de A, é subconjunto de A, isto é, $A' \subset A$[43].

Se A for um subconjunto de um espaço topológico X, então o fecho de A, representado por $\overline{A}$, é a intervenção de todos os conjuntos fechados que contém A. Por outras palavras, se $\{F_i \mid i \in I\}$ é a classe de todos os subconjuntos de X, que contém A, então:

$$\overline{A} = \cap_i F_i$$

[42] Cf. I. R. PORTEOUS, *Topological Geometry*, New York, Van Nostrand, 1969, 311-334.
[43] Cf. A. VAN ROVY, *Topological Spaces*, Berlin, Springer-Verlag, 1997, 4.6; 6.3; 4.19.

Observa-se primeiro que $\overline{A}$ é fechado por ser a intersecção de «fechados». Além disso, $\overline{A}$ é o menor fechado, que contém A, isto é, se F é um outro fechado, que contém A, então:

$$\mathrm{A} \subset \overline{A} \subset F$$

Consequentemente, um conjunto A é fechado se e só se $A = \overline{A}$[44].

7.2 Vizinhança e sistemas de vizinhança

Seja p um ponto de um espaço topológico X. Um subconjunto N de X é uma «vizinhança» de p se e só se N é superconjunto de um conjunto aberto G, que contém p:

$$p \in G \subset N$$

onde G é um conjunto aberto.

Por outras palavras, a relação N é vizinhança de um ponto p e inversa da relação p, então será um ponto interior de N. A classe de todas as «vizinhanças» de $p \in X$, representada por N_p, será chamado de sistema de «vizinhanças» de «p»[45].

Seja T_1 e T_2 topologias num conjunto não-vazio X, então suponhamos que cada subconjunto T_2 aberto de X é, também, um subconjunto T_2 aberto de X em que T_1 é uma subclasse de T_2, isto é, $T_1 \subset T_2$. E T_1 é mais fraca, ou menor, do que T_2 ou que T_2 é mais fina, ou maior do que T_1. A colecção $T = \{T_1\}$ de todas as topologias em X é parcialmente ordenada pela inclusão de classes. Então, escreveremos:

$$T_1 \leq T_2\text{, em vez de } T_1 \subset T_2$$

Dizemos que duas topologias em X são não-comparáveis se nenhuma delas é mais fina do que a outra.

[44] Cf. R. BROWN, *Elements of Modern Topology*, New York, McGraw-Hill, 1968, 290-305.

[45] Cf. D. G. BOURGIN, *Modern Algebraic Topology*, New York, The Macmillan Company, 1963, 28-35.

7.3. Definições Equivalentes de Topologias

Segundo a nossa definição de espaço topológico, consideramos a noção do «aberto» pela noção primitiva para a topologia. Enunciamos, agora, dois teoremas que proporcionam uma alternativa para a noção de Topologia, utilizando como noções primitivas as de vizinhança de um ponto e fecho de um conjunto.

Teoremas – Seja X um conjunto não vazio e suponhamos que a cada ponto $p \in X$ corresponde uma classe A_p de subconjuntos de X, satisfazendo os seguintes axiomas:

- A_{X1} – A_p é não-vazia e p pertence a cada membro de A_p;
- A_{X2} – A intersecção de dois membros quaisquer de A_p pertence a A_p;
- A_{X3} – Todo o subconjunto de um membro de A_p, pertence a A_p;
- A_{X4} – Cada membro $N \in A_p$ é superconjunto de um membro $G \in A_p$, tal que: $G \in A_g$, para todo o $g \in G$[46].

Então, existe uma e uma só topologia T em X, tal que A_p é o sistema de vizinhança T do ponto $p \in X$.

Poderemos apresentar outro teorema das equivalências das Topologias:

Seja X um conjunto, que atribui a cada subconjunto de A de X o subconjunto A^k de X, satisfazendo os seguintes axiomas (axiomas de Kuratowski relativos ao «fecho»):

$$\phi^E = \phi$$
$$A \subset A^k$$
$$(A \cup B)^k = A^k \cup B^k$$
$$(A^k)^k = A^k$$

Então, existe uma e uma só topologia T, em X, tal que A^k é o fecho T do subconjunto A de X[47].

[46] Cf. D. E. CHRISTIE, *Basic Topology*, New York, Macmillan Publishing Company, 1967, 129.
[47] Cf. S. LIPSCHUTZ, *Topologia Geral*, tradução do russo, Rio de Janeiro, E. McGraw-Hill, 1971, 102.

Como elemento de «fronteira», poderemos indicar:

$$X = \{a, b, c, d, e\};$$
$$T = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

Pelo conceito de «vizinhança», teremos:

$$X = \{a, b, c, d, e\};$$
$$T = T = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

A base de uma Topologia poderá ser definida: seja (X, T) um espaço topológico, uma classe B de abertos X, isto é, $B \subset T$, é uma base de topologia T se e só se:

- todo o aberto $G \in T$ é a união de membros de B. Equivalentemente, $B \subset T$ é uma base de T se e só se para todo o ponto p, pertencente a um «aberto» G, existe $B \in B$ com $p \in B \subset G$.

Seja X um conjunto não-vazio, uma função real $|d|$ definida em $X \cdot X$, isto é, pares ordenados de elementos em X, é chamada métrica ou «função-distância», em X, se, e somente se, satisfaz, para todo: $a, b, c \in X$, pelos seguintes axiomas:

- $A_{X1} - d(a, b) \geq 0$ e $d(a, a) = 0$;
- $A_{X2} - d(a, b) = d(b, a)$;
- $A_{X3} - d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$;
- A_{X4} – se $a \neq b$, então $d(a, b) > 0$.

O número real $d(a, b)$ é chamado distância de $a \rightarrow b$[48].

A distância de um ponto a outro nunca é negativa e a distância de um ponto a si mesmo é «zero». O segundo axioma afirma que a distância de um ponto $|a|$ a um ponto $|b|$ é a mesma que a distância de $b = a$. Daqui falaremos das «distância» entre a e b. O terceiro axioma é denominado de «desigualdade triângular»,

48 Cf. ÁKOS CSÁSZAR, *General Topology*, Bristol, Adam Hilger, 1978, 121-125.

porque, se a, b e c são pontos do R^2, conforme ilustração, à direita, então A_{X3} afirma que o comprimento $d\,(a, c)$ de um lado do triângulo é menor do que ou, quando muito, igual à soma: $d\,(a, b) + d\,(b, c)$ dos comprimentos dos outros lados do triângulo. Mas, o último axioma afirma que a distância entre dois pontos distintos é positiva.

As estruturas topológicas são relações mais complexas, que traduzem, por meio de operações infinitas, as noções intuitivas de «vizinhança», limite ou continuidade.

Assim, a geometria topológica reflecte as propriedades de figuras que não se modificam por uma transformação biunívoca e contínua. Daqui que o círculo e o polígono são equivalentes por meio da operação topológica de transformação. A estrutura topológica da recta E_i constrói-se pelo conjunto dos números reais, $R = -R$, por meio do teorema da convergência de Cauchy: $\lim_{n\to\infty} a = a_n$ sendo o ponto limite uma nova espécie de número.

A estrutura topológica do plano euclidiano E_2 elabora-se no conjunto dos números complexos $|C|$, tomando o produto cartesiano: $R_\infty \cdot R_\infty$, que será composto de elementos (a, b), nos quais a e b são números reais. Então, a cada ponto do plano E_2 corresponde um número complexo $|a + bi|$ $(i = \sqrt{-1})$ e, reciprocamente, virá: $E_2 \leftrightarrow C$.

Assim, o problema do contínuo geométrico resolve-se pela correspondência biunívoca com o contínuo analítico.

A Topologia de Lee tem sofrido variadas extensões que permitem aperfeiçoar as novas estruturas de continuidade ou de vizinhança.

8. Fundamentos filosóficos do «espaço»

8.1. Introdução

A Geometria, ramo da matemática, como sua expressão espacial, funda-se «a si mesma», dado que os seus axiomas, num sistema formal, devem ser evidentes *per se*.

Da mesma forma, como a Matemática, *sub specie*, se encontra na «Geometria», onde o valor e limites da mesma, «variáveis» (indefinidos) e o seu objecto formal, já não obedecem à definição intuitiva e clássica de ciência da categoria da quantidade abstracta, mas exige, ainda, a nova categoria da relação (*esse ad*).

A construção de qualquer sistema formal generalizado, como aparece na «geometria», determina sempre o conteúdo de uma relação intuitiva, porque toda a ciência é um —*fieri*— em alternância de fases analíticas e sintéticas. Se a Matemática se apresentasse, simplesmente, como síntese de relações lógicas, então não seria possível a Física Teórica[49].

8.2. Epistemologia do Espaço

Bourbaki pensava que a ciência matemática, incluindo a Geometria, é uma «construção» por meio da análise das estruturas fundamentais. É uma «construção» que vai do mais «simples» (geometria euclidiana) para o «complexo» (geometria geodésica).

Segundo a Gnoseologia regional, aquilo que caracteriza o espaço geométrico não são os elementos isolados, mas a «estrutura» ou a relação que emerge dialecticamente de entre eles.

Segundo o valor e limites da Geometria, não se podem reduzir figuras, relações e teoremas da geometria e topologia a simples equações algébricas ou diferenciais, só pela relação de igualdade.

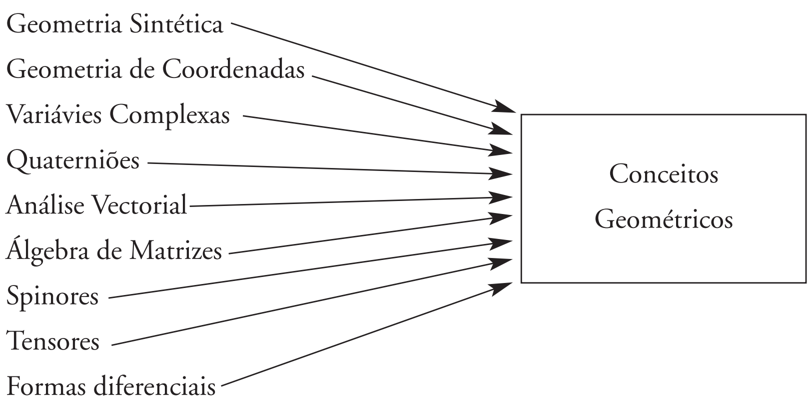
Segundo a leitura gnoseológica, a Matemática, pela Geometria, só se poderá aplicar à física teórica dos entes reais: numeráveis e dimensionais. A Geometria mostra, pelos espaços e dimensões, a lógica da «figura espacial», aquilo que as proposições da lógica sugerem as «tautologias».

Uma das características fundamentais da «geometria», no domínio lógico, está em referenciar-se como «modelo» de construção espacial a n-dimensões, para

[49] Cf. A. GEORGE; D. J. VELLEMAN, *Philosophy of Mathematic*, Oxford, Blackwell Publishers, 2002, 1-13.

corporizar teorias físicas, desde a Mecânica Racional até à Relatividade Generalizada, passando pela Restrita[50].

Apesar dos sistemas matemáticos serem múltiplos, contribuindo para a fragmentação do conhecimento, eles possuem, entretanto, um «nexo geométrico comum». Cada um dos sistemas matemáticos incorpora algum aspecto da Geometria. Eles constituem um sistema redundante de múltiplas representações para conceitos geométricos, os quais são essenciais em Física e que se podem abordar no seguinte esquema:



Variados são os limites da Geometria, nomeadamente da Geometria Analítica, que determinam uma fundamentação dimensional para a Mecânica Clássica. É, porém, insuficiente para a Relatividade Geral, que só se definiu matematicamente pela Geometria Diferencial e pelos tensores[51].

8.3. Ontologia Especial do Espaço Matemático

8.3.1. O *status quaestionis* da Ontologia Regional da Geometria implica, além de referenciar a essência dos entes, saber sobre o *esse* (existência) dos entes conjuntos da Geometria. São ideais ou reais? Qual a sua constituição ontológica?

[50] Cf. L. GOLOVINA, *Álgebra Lineal y algunas de sus aplicaciones*, tradução do russo, Moscú, E. Mir, 1974, 202-224.

[51] Cf. D. HESTENES, «Reforming the mathematical language of physics», in: *American Journal of Physics*, 71 (2003), 106.

Assim surge uma preocupação ontológica, que é marcada por um sentido e evolução acto-potencial de pontos, rectas, planos e esferas ou entidades poligonais. Há uma resposta ontológica para a Geometria.

Aqui poderão surgir as exigências da essência dos diferentes «espaços» que dominam a Geometria e que se definem, da forma seguinte, pela teoria do acto e da potência e pela teoria dos transfinitos de Cantor:

1. *Espaço euclidiano* (E_3) é um conjunto transfinito de planos, em potência. O E_2 (plano) é um conjunto transfinito de rectas em potência. A recta (E_1) será um conjunto transfinito de pontos em potência. O ponto (E_0) é um conjunto unitário de 0-elementos, que só existe como elemento potencial da recta ou limite do infinitésimo linear: $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$[52].

Os referidos espaços, também, poderão marcar a sua «essência» pela teoria dos limites. Um espaço a n-dimensões é o limite do espaço a $n + 1$ dimensões.

O plano aparece como limite do espaço a n-dimensões; a «recta» será o limite do plano $|E_2|$; o ponto $|E_0|$ é o limite da recta $|E_1|$. E o limite do ponto E_0? Não existe, dado que é «adimensional». Será, pois, um conceito «limite» (indefinível). Os elementos ou partes do espaço geométrico existem só em potência, não em acto. Quando os matemáticos dizem que o espaço é um conjunto infinito actual de pontos, não definem a essência pura do Espaço, como um ser. Referem-se à estrutura pontual a que se poderá reduzir o Espaço por uma sucessão de operações ideais da Análise Matemática. Segundo a operação de passagem ao limite: E_3 = número infinito de planos E_2. Cada E_2 = número infinito de rectas E_1. Cada E_1 = número infinito de pontos E_0.

O E_3 euclidiano será da estrutura de ordem a 3-dimensões, mas de curvatura nula. Logo, é válido o 5º postulado das duas paralelas, que fundamenta a Geometria parabólica de Euclides.

O Espaço lobatschevskiano é de estrutura a 2-dimensões, mas de «curvatura negativa». Logo, é válido o 5º postulado de um número infinito de paralelas,

52 Cf. B. DE JESUS CARAÇA, *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Lisboa, Tipografia Matemática, 1958, 317-318.

que fundamenta a nova Geometria hiperbólica, que se aplica em regiões infinitésimas. Os Espaços riemannianos são de estrutura a n-dimensões, mas de curvatura positiva. Logo, será válido o 5º postulado de zero-paralelas, que funda, por sua vez, as novas geometrias: elíptica e esférica. Estas aplicam-se nas regiões infinitamente grandes. O hiper-espaço é um espaço a n-dimensões que tem sentido em Cosmologia Científica[53].

Com efeito, o Espaço analítico é um conjunto de quaisquer elementos {*x*, *y*, *z*...} no qual se define uma função numérica de (*x*, *y*) ou vectorial λ ($\vec{x}$, $\vec{y}$)[54].

Traduzem-se, por correspondência, os E_n de pontos com o sistema de números reais, funções, distâncias, etc. O mesmo se diz métrico (*R*, *d*) ou vectorial (*R*, λ), se a função for a distância entre dois pontos P_1 e P_2 ou é a dimensão vectorial λ.

Além dos referidos espaços métricos existem os espaços cartesianos, onde cada ponto $P = (x, y, z)$, surge como rectas ou curvas que se representam por equações ou funções a n-variáveis. Há os espaços vectoriais onde cada ponto será $P = ((\vec{u}, \vec{v},...)$ ou $(\vec{v}, t)$. Temos espaço de configuração, onde cada volume é diferencial: $dV_i = (x_i, y_i, z_i)$. Existe o espaço abstracto à Fréchet que abstrai da natureza dos elementos – pontos que poderão ser: números, curvas, superfícies, funções, distâncias, séries, etc.

O espaço topológico é o par de elementos (*A*, *H*), sendo *A* = conjunto de pontos ou de números, *H* = colecção de subconjuntos de *A* (pontos-vizinhança). *E* {*A*} será a base do Espaço topológico e *H* faz a estrutura topológica de *A*[55].

A recta real é o «espaço topológico» se associarmos ao «espaço métrico» (*R*, *d*) a estrutura *H* (= conjunto de subconjuntos de *R*), sendo $E_e = E_t$, se for (*R*, *H*).

8.3.2. A ontologia especial da Geometria e Topologia apresenta a sua fundamentação, descobrindo ainda qual o outro princípio constitutivo de ser dos

[53] Cf. A. I. MÁLTSEV, *Fundamentos de Álgebra Lineal*, tradução do russo, Moscú, E. Mir, 1976, 300.

[54] Cf. B. DE JESUS CARAÇA, *Cálculo Vectorial*, Lisboa, T. Matemática, 1960, 1-4.

[55] Cf. M. VYGODSKE, *Aide-mémoire de Mathématiques Supérieures*, traduction du russe, Moscou, Éditions Mir, 1980, 521.

entes geométricos: a existência (*esse*). O ente finito da razão implica, na sua constituição ontológica, dois co-princípios: [essência $\cup$ existência].

Logo, os entes-espaços, a n-dimensões, são seres de razão quantitativos como os entes-conjuntos analíticos. Mas, então, em que diferem? Analisemos a constituição ontológica do ser:

[potência + acto] $\rightarrow$ ente finito

ou

[essência espacial + existência lógica] $\rightarrow$ ente de razão

Se a essência é a forma espacial que define não só a categoria genérica de entes de razão quantitativa, mas, também a específica: entes de razão espaciais (geométricos), então existem diversos graus constitutivos, desde os espaços euclidianos até aos espaços topológicos.

O tipo transcendental (grau analógico) de ser é a nota semelhante de «ser-ideal», somente predicável dos entes quantitativos de razão, que é «univoca» em sentido lógico[56].

A verdadeira forma de perfeição abstacta encontra-se na quantidade espacial, que significa um *esse* distinto da «quantidade numérica».

Assim, se poderá dizer que os conceitos da geometria e da topologia (E_n, E_t) são entes de razão, mas com fundamento real. Este ente de razão é o que existe, formalmente, só no intelecto, mas pode ter fundamento psicológico e real. Assim sucede com os conceitos geométricos e topológicos de E_n, E_t, que existem, formalmente, no intelecto, mas possui fundamento psicológico e na quantidade concreta dada espacialmente.

Com efeito, analizando os juízos sintéticos ou extensivos e analíticos da geometria e da topologia, verificamos que os conceitos abstractos de Espaço a n-dimensões ou de Espaço analítico são transcendentais, como categóricos e analógicos.

[56] Cf. R. D. Borges de Meneses, «Teoria do Juízo em Kant», in: *Humanística e Teologia*, 22 (2002) 220-226.

Ora, tais conceitos só existem formalmente no intelecto. Com efeito, as suas formas ou essências (*id quod*) transcendem a experiência ou dados empíricos do mundo real. A recta é um conceito que significa uma dimensão pura e ideal. É a forma abstracta da extensão pura, que o intelecto abstrai dos entes físicos reais. Estes são limitados por planos concretos e os planos por linhas. Isto significa que, na ordem real, existem «entes extensos» a três-dimensões, que são materiais como estruturas de massa-energia. Desta sorte, o plano geométrico é a estrutura ideal e pura de rectas em potência[57]. Diremos que o fundamento psicológico, na geometria, é a dupla forma de intuir e de conceitualizar ou de julgar. A operação intelectiva faz a síntese abstractiva do conceito, isolando a forma acidental ou a nota pura de extensão. O Espaço n-dimensional, pelo juízo sintético, dá-lhe o «existir lógico» (actual) de ente. Aqui será a operação intuitiva da imaginação que actua, na síntese da imagem, pela forma potencial do Espaço, dada pelos objectos extensos de fora.

O ente de razão é todo essência e existência ao mesmo tempo. Logo, não é a forma real extraida dos corpos externos, mas a forma intencional construida pelo seu «existir» no intelecto.

Na verdade, o fundamento real é a extensão dos entes reais (extensos a 3-dimensões), enquanto «extensos». São volumes concretos, limitados por planos, estes por linhas e estas por pontos (ex: a mesa, a bola ou esfera, o quarto vazio ou espaço real). Mas, a síntese da percepção intuitiva do espaço não é possível sem o movimento, que o gera. O fundamento último, mas radical, é o movimento de um ponto material, enquanto móvel. O ponto geométrico, em movimento, gera a «recta» e a recta gera o plano. Os entes geométricos e topológicos são conjuntos transfinitos de n-elementos que são, ao mesmo tempo, sob a razão de ser unos e múltiplos. Todavia, não podem ser tais sem a composição de dois co-princípios opostos de ser: potência e acto.

Os espaços euclidianos ($E_1 \rightarrow E_3$) são um conjunto uno, porque se realizam como um todo. É múltiplo, porque é constituido por n-elementos realizáveis, em potência, por virtude dos planos de possíveis cortes. Pelas propriedades dos conjuntos, o espaço a n-dimensões tem a potência do inumerável, ou seja, do contínuo: $E_n \leftrightarrow R = 2^\infty = C$.

[57] Cf. V. M. DE SOUSA ALVES, *Ensaio de Filosofia das Ciências*, 124-125.

Ora, o contínuo implica a composição de elementos em potência, isto é, por ligações absolutas duns aos outros sem qualquer lacuna. De contrário, os entes geométricos seriam antinómicos. As propriedades da unidade e da multiplicidade, sendo opostas, não podem radicar num só princípio simples ou homogéneo de ser. Surgem logo dois princípios complementares de ser, em Matemática: o da unidade e o da multiplicidade. A finitude do ente de razão geométrica (espaço métrico) também aplica a composição ôntica da potência e do acto[58].

9. Breve História da Geometria

Não sabemos ao certo quando é que a Geometria começou a ser estudada ou aplicada. Pensa-se que, também, os Índios tinham alguns conhecimentos de Geometria, mas, segundo se crê, não eram superiores aos Chineses. No entanto, foram os Egípcios quem mais contribuírem para o desenvolvimento desta ciência. A necessidade de construção das pirâmides e dos templos e a divisão das terras depois das enchentes do rio Nilo obrigaram os Egípcios a estudos, que os levaram ao desenvolvimento de muitas propriedades geométricas[59].

Com efeito, os Egípcios conheciam a forma de determinar a área do triângulo isósceles, a forma de obter um ângulo recto, construindo, para isso, um triângulo rectângulo, cujos lados mediam 3, 4 e 5 unidades e tomavam $\pi = 3,14$. Contudo, os Egípcios não iniciaram o estudo lógico da Geometria. Igualmente, os Babilónios e os Assírios fizeram aplicações geométricas, mas foi sobretudo à Astronomia que se dedicaram em virtude da sua religiosidade[60].

A racionalização e a sistemática da Geometria ficaram a dever-se aos gregos pelo contacto com os egípcios. Daqui o seu interesse pela Aritmética, pela Astronomia e, de forma especial, pela Geometria, que permitiu dar a esta última ciência a forma lógica que perdura nos nossos tempos.

Três foram os problemas clássicos da antiguidade, cuja solução se procurou apenas com o auxílio da régua e do compasso:

---

[58] J. LOTZ, *Ontologia*, Romae, Pontifitia Universitas Gregoriana, 1965, 15-25.
[59] Cf. J. R. SILVESTER, *Geometry Ancient and Modern*, Oxford, University Press, 2001, 1-4.
[60] Cf. A. N. PALMA FERNANDES, *Elementos de Geometria*, 481.

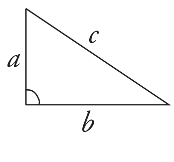
- a quadratura do círculo, que consistia em determinar um «quadrado», cuja área fosse igual à de um círculo de raio dado;
- a trissecção de um ângulo em que se pretendia dividir um dado ângulo em três partes iguais;
- a duplicação do cubo, que tinha por fim determinar a sua aresta, cujo volume fosse duplo de outro cubo de aresta dada.

Os problemas clássicos deram origem a muitas descobertas, que enriqueceram a Geometria. Só no século XVIII foi provada a impossibilidade de resolução destes problemas, apenas com o auxílio da régua e do compasso[61].

Assim a Pitágoras (540 a.C.), que viajou pelo Egipto, atribuem-se-lhe as seguintes demonstrações:

- a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos rectos;
- a diagonal de um quadrado não se pode experimentar no lado por uma relação, em que entrem só números inteiros ou fraccionários[62];
- a construção de um paralelogramo equivalente a um dado triângulo.

O conhecido teorema de Pitágoras: num triângulo rectangulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos:



O teorema, $c^2 = a^2 + b^2$, atribui-se a Pitágoras, mas a demonstração foi apresentada, pela primeira vez, nos «Elementos» de Euclides. Mas, parece que quem intuiu, primeiro, este teorema foram os chineses[63].

[61] J. FAUVEL (ed.), *History of Mathematics*, tradução do francês, Paris, Ellipses, 1997, 60-68.
[62] Cf. B. A. ROSENFELD, *A history of non-Euclidian Geometry*, tradução do alemão, Berlin: Springer-Verlag, 1988, 110-112.
[63] Cf. F. CAJORI, *A history of Mathematical Notations*, New York, Dover Publications, 1993, 357-384.

10. Conclusão

Diferentes leituras se têm feito do espaço geométrico que se poderão resumir nos seguintes graus analógicos do mesmo espaço:

1. *Abstractivistas* (Descartes, Leibniz e Escolásticos): O Espaço geométrico referencia-se, formalmente, como ente de razão, mas com fundamento real. Significa a extensão pura e abstracta a três-dimensões. Assim, distinguem, *in genere et sub specie*, três níveis de Espaço: o real (físico), o matemático e o imaginário (ou absoluto). Mas, alguns filósofos confundem Espaço físico com o matemático e outros só analisam o Espaço imaginário. Este, também, poderá ser considerado como «espaço psicológico». As teorias empiristas não explicam a forma abstracta de Espaço e as suas extensões analógicas, tal como o formalismo *a priori* de Kant não descobre o fundamento objectivo da Geometria euclidiana e nem explica como são possíveis as geometrias não-euclidianas e as novas extensões da Análise Matemática[64]. Com efeito, a solução só poderá ser dada por meio de uma teoria de tipo abstractivo;
2. *Idealistas* (Kant, Bergson, etc.): O Espaço é um conceito ideal construido *a priori* pela sensibilidade externa. Logo, em Kant aparece como «forma pura» *a priori* da sensibilidade externa. Surge como modo subjectivo de intuir pelo qual fazemos a síntese da imagem espacial, apresentando um fundamento psicológico. A Geometria recebe o seu fundamento pelos juízos sintéticos *a priori*[65];
3. *Empiristas* (Hume, Locke, etc.): O Espaço é um conceito que deriva só da experiência. Trata-se, pois, de uma propriedade real dos corpos a três-dimensões. A ideia geral de Espaço não é um conceito intelectual; mas antes apresenta-se como símbolo da imagem sintética[66]. Na verdade, Hegel ao falar do «espaço» encontra-o como conceito genérico, dado na exterioridade imediata e indiferenciada da natureza, isto é, o existir «fora de si mesmo»[67].

[64] Cf. C. J. POSY (edited), *Kant's Philosophy of Mathematics*, Boston, Kluvier Academic Publishers, 1992, 109-112.

[65] Cf. R. D. BORGES DE MENESES, «A Teoria do Juízo em Kant», 220-222.

[66] G de B. ROBINSON, *The Foundations of Geometry*, Toronto, University of Toronto Press, 1963[4], 3-7.

[67] Cf. V. M. DE SOUSA ALVES, *Conhecimento Metafísico do Espaço e do Tempo*, Braga: Faculdade de Filosofia, 1959, 32-33.

A Geometria, nas suas diferentes formas, como expressão em enunciados sintéticos (juízos), encontrar-se-á ontologicamente pelas novas extensões espaciais na categoria da relação formal extensiva de espaço. A Geometria apresenta uma estrutura espacial, necessariamente, em sentido ontológico e reflecte um grau abstractivo de quantidade, dado que se reflecte numa nova essência quantitativa.

Bibliografía

AMDREEV, P.; SHUVALOVA, E. (1974). *Geometry*. Tradução do russo. Moscow: Mir Publishers.

BENNETT, C. M. K. (1995). *Affine and Projective Geometry*. New York: John Wiley and Sons.

BEUTELSPACHER, A. (1998). *Projective Geometry: from foundations to application*. Cambridge: University Press.

BLASCHKE, W. (1924). *Vorlesungen über Differentialgeometrie I*. Berlin: Julius Springer-Verlag. BORGES DE MENESES, R. D. (2002). «A Teoria do Juízo em Kant». In *Humanística e Teologia.* Porto: Universidade Católica Portuguesa.

BOURGIN, D. G. (1963). *Modern Algebraic Topology*. New York: The Macmillan Company.

BREMER, S.; HAAR, H. (1973). *Differentialformen und Vektoranalysis*. Berlin: VEB DeutscherVerlag.

BROWN, R. (1968). *Elements of Modern Topology*. New York: McGraw-Hill.

BRUCE, W. (1985). *Applied Differential Geometry*. Cambridge: University Press.

Cajori, F. (1993). *A history of Mathematical Notations*. New York: Dover Publications.

CHRISTIE, D. E. (1967). *Basic Topology*. New York: Macmillan Publishing Company.

COXETER, H. S. M. (1974^2). *Projective Geometry*. Toronto: University Press.

CSÁSZAR, A. (1978). *General Topology*. Bristol: Adam Hilger.

DE ALBUQUERQUE, L. (1969). *Elementos de Geometria Projectiva e Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Almedina.

DE JESUS CARAÇA, B. (1958). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática.

DE JESUS CARAÇA, B. (1960). *Cálculo Vectorial*. Lisboa: Tipografia Matemática.

DE SOUSA ALVES, V. M. (1959). *Conhecimento Metafísico do Espaço e do Tempo*. Braga: Faculdade de Filosofia.

DE SOUSA ALVES, V. M. (1998). *Ensaio de Filosofia das Ciencias*. Braga: Publicações da Faculdade de Filosofia.

EFIMOV, N. (1976). *Eléments de Géométrie Analytique*. Tradução do russo. Moscou: Éditions Mir.

ENRIQUES, F. (1946). *Geometría Proyectiva*. Tradução do francês. Madrid: E. Espanholes.

ENRIQUES , F. (1946). *Geometría Proyectiva.* Tradução do inglês. Madrid: E. Espanholes.

FAUVEL, J. [ed.], (1997). *History of Mathematics*. Tradução do francês. Paris: Ellipses.

FENN, R. (2001). *Geometry*. Tradução do alemão. Berlim: Springer-Verlag.

GARNER, L. E. (1981). *An Outline of Projective Geometry*. New York: North Holland.

GEORGE, A.; VELLEMAN, D. J. (2002). *Philosophy of Mathematic*. Oxford: Blackwell Publishers.

GOLOVINA, L. (1974). *Álgebra Lineal y algunas de sus aplicaciones*. Tradução do russo. Moscú: E. Mir.

GUSTAFSON, R. D.; FRISK, P. D. (1985). *Elementary Plane Geometry*. New York: J. Wiley and Sons.

HARTSHORNE, R. (2000). *Geometry: Euclid and Beyond*. Tradução do alemão. Berlin: Springer-Verlag.

HESTENES, D. (2003). «Reforming the mathematical language of physics». In *American Journal of Physics*71.

HEYTING, A. (1980). *Axiomatic Projective Geometry*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

HUNG-HSI WU [ed.] (1991). *Contemporary Geometry*. New York. Plenum Press.

IVERSEN, B. (1992). *Hyperbolic Geometry*. Cambridge: University Press.

LIPSCHUTZ, S. (1971). *Topologia Geral.* Tradução do inglês. Rio de Janeiro: E. McGraw-Hill.

LIPSCHUTZ , S. (1971). *Topologia Geral.* Tradução do russo. Rio de Janeiro: E. McGraw-Hill.

LOTZ, J. (1965). *Ontologia*. Romae: Pontifitia Universitas Gregoriana.

MADUREIRA, A. (1948). *Lições de Álgebra Superior e Geometria Analítica*, Tomo II. Geometria Analítica. Porto: Porto Editora.

MÁLTSEV, A. I. (1976). *Fundamentos de Álgebra Lineal*. Tradução do russo, Moscú: E. Mir.

MANNHEIM, A. (1886). *Cours de Geométrie Descriptive*. Paris: Gauthier-Villars.

MARQUES BARBOSA, J. L. (2000). *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

PALMA FERNANDES, A. N. (1964). *Elementos de Geometria*, 2ª edição. Lisboa: Livraria Didáctica. PIGNANI, T. J.; HAGGARD, P. W. (1970). *Modern Analytic Geometry*. Lexington: D. C. Heath.

PORTEOUS, I. R. (1969). *Topological Geometry*. New York: Van Nostrand.

POSTINOV, M. (1990). *Lições de Geometria*. Tradução do russo. Moscovo: Editora Mir.

POSY, C. J. [ed.] (1992). *Kant's Philosophy of Mathematics*. Boston: Kluvier Academic Publishers.

PUIG ADAM, P. (1965). *Curso de Geometría Métrica*. Tomo II. Madrid: Nuevas Gráficas.

QUEIRÓZ, A. (1931). *Lições de Geometria Descritiva*.Volume I. Porto: Fernando Machado.

ROBINSON, G. B. (1963[4]). *The Foundations of Geometry*. Toronto: University of Toronto Press.

ROBINSON , G. B. (1989). «Geometry». In *Collier's Encyclopedia*, Volume 10, New York: Macmillan Company.

ROSENFELD, B. A. (1988). *A History of Non-Euclidian geometry*. Tradução do alemão. Berlin: Springer-Verlag.

RUSSELL, B. (1996). *An Essay on the Foundations of Geometry*. Cambridge: University Press.

SCCORSI, P. F. (1938). *De Geometria non Euclidiana, ad usum nostrorum*. Romae: Velox.

SILVESTER, J. R. (2001). *Geometry Ancient and Modern*. Oxford: University Press.

SMIRNOV, V. (1970). *Cours de Mathématiques Supérieures*, Tome II. Tradução do russo. Moscou: E. Mir.

VAN ROVY, A. (1997). *Topological Spaces*. Berlin: Springer-Verlag.

VUILLEMIN, J. (1968). *Leçons sur la Première Philosophie de Russell*. Paris : Armand Colin.

VYGODSKE, M. (1980). *Aide-mémoire de Mathématiques Supérieures*. Traduction du russe, Moscou : Éditions Mir.

Recibido: 18/06/2009
Aceptado: 9/09/2009