ANTECEDENTES MATEMÁTICOS DEL PENSAMIENTO LÓGICO DE C. S. PEIRCE

PILAR CASTRILLO
Facultad de Filosofía. UNED

ABSTRACT: Peirce was very current in many fields of study, due both to his scientifically informed approach and to the fact that he wrote hundreds of book reviews and newspaper reports on mathematical meetings. We examine here how and to what extend his logical thought was influenced by the leading mathematical ideas of his own time.

Los impulsos innovadores en el desarrollo de la lógica formal de finales del siglo XIX surgieron fundamentalmente en el seno de la comunidad matemática. Los principales representantes de la lógica algebraica (De Morgan, Boole, Schröder) y los miembros más destacados de la tradición que luego se ha dado en llamar logicista (empezando por Frege) tienen, en efecto, un rasgo en común: son todos ellos matemáticos de profesión que se interesaron por la lógica formal impelidos por el deseo de lograr una mejor comprensión del razonamiento matemático. Hay, sin embargo, un protagonista sumamente importante de este movimiento que no se adapta a este esquema. Me refiero al lógico y filósofo americano Charles S. Peirce que, aunque se sintió lógico antes que ninguna otra cosa, era químico de profesión.[1] Sin embargo, como los contenidos de los cuatro volúmenes *The New Elements of Mathematics* ponen de manifiesto, Peirce no sólo analizó con gran competencia técnica problemas de fundamentos, álgebra aso-

[1] C.S.Peirce, después de realizar un brillante doctorado en química, trabajó durante treinta años en el Servicio Geodésico y Costero de los Estados Unidos, ocupando diversos puestos y realizando diversas tareas, entre otras, algunos experimentos de medición de la gravedad mediante péndulos. En su tiempo libre se dedicó a investigar sobre temas de filosofía y de lógica, a la postre el ámbito de estudio de más interés para él. Esta actividad daría lugar a una serie de publicaciones que le llevarían a la Universidad Johns Hopkins, en Baltimore, donde trabajó como *lecturer* entre los años 1879 y 1884. Para estos y otros datos relacionados con su vida, véase J. Brent 1993.

ciativa, teoría de agregados, análisis situs y aritmética transfinita, entre otras cuestiones, sino que mostró una gran originalidad en la interpretación de numerosos problemas pertenecientes a diversas ramas de la matemática pura. Así lo acreditan también las numerosas reseñas de libros matemáticos que hizo para *The Nation* y las múltiples definiciones de términos matemáticos elaboradas para el *Century Dictionary.*

Si como hijo que era de uno de los matemáticos americanos más cualificados de su época, Benjamin Peirce, conocía de primera mano los problemas candentes planteados en muy diferentes ámbitos de las matemáticas, además, Charles S. Peirce tuvo ocasión de disfrutar, durante el tiempo que duró su estancia en la universidad Johns Hopkins, de la compañía de matemáticos de la talla de James Joseph Sylvester, por aquel entonces a la cabeza del departamento de matemáticas de dicha universidad y fundador del *American Journal of Mathematics,* o de Arthur Cayley, que pasaría una temporada en ella como profesor invitado. Esta cercanía a ciertas teorías matemáticas y a sus creadores hará que arraigue en él con fuerza la convicción de la necesidad de que las comunidades de los lógicos y de los matemáticos dejen de vivir —para decirlo con palabras del historiador I. Grattan Guinness[2]— vidas separadas y de que un acercamiento mutuo, como ya había pronosticado su admirado A. de Morgan,[3] no podría menos de redundar en un gran provecho para ambas. Peirce procuró llevar a la práctica esta convicción y, aunque no puede decirse que explotara a fondo teorías matemáticas o que aplicara en detalle su lógica a alguna rama de las matemáticas, sí cabe afirmar, no obstante, que su pensamiento lógico está impregnado de elementos matemáticos. Aportar una serie de datos y argumentos que justifican esta afirmación es el cometido principal de este trabajo.

[2] Cf. I. Grattan Guinness 1997, donde el historiador de la matemática mantiene que ni en el momento de la aparición de la lógica moderna hubo, ni ahora hay, una gran conexión entre lógicos y matemáticos.

[3] En su «On the Syllogism III», pronosticaba A. De Morgan: «A medida que aumente la atención conjunta a la lógica y a las matemáticas, surgirá una lógica que se distinguirá de la de los lógicos por tener el elemento matemático adecuadamente subordinado al resto. Esta lógica *matemática*así llamada *quasi lucus a non nimis lucendo* se impondrá a la gente culta mostrando una representación de su forma de pensamiento una representación cuya verdad reconoce en vez de un fragmento unilateral y mutilado basado en cánones cuya fuerza no siente y cuya utilidad no percibe.» (De Morgan, 1966, 78 n.).

Por suerte para nosotros, lejos de compartir la reticencia fregeana a aludir a sus fuentes, el lógico americano era un pensador dotado de mentalidad histórica, lo que hace que, a pesar de estar convencido de la extraordinaria valía de su obra lógica,[4] no haya ocultado nunca las fuentes de que se nutre su pensamiento. Sabemos por su propio testimonio que encontró antecedentes de sus ideas lógicas en Leibniz, De Morgan, Boole o R. Grassmann, entre otros autores. Pero muchas de ellas, y precisamente las más originales, no tuvieron como fuente de inspiración la obra de otros lógicos. Son fruto, como espero mostrar aquí, de su reflexión sobre descubrimientos matemáticos y su extrapolación al ámbito de la lógica. El emplazamiento de algunas de estas ideas lógicas en el contexto de la evolución de ciertas teorías matemáticas no sólo será una puerta que nos franquee una mejor comprensión de las mismas, sino que me parece que también aportará un elemento de juicio más en favor de la tesis de que la historia de la lógica en las primeras etapas de su desarrollo no puede separarse del avance experimentado por las matemáticas de esta época hacia un grado de abstracción cada vez mayor.

1. Álgebra simbólica y álgebra de la lógica

El siglo XIX asistió a una enorme expansión e intensificación de la investigación matemática. Además de recibir una solución definitiva diversos problemas que habían ofrecido resistencia a los esfuerzos de investigadores de etapas anteriores, se crearon nuevas áreas de estudio y se formularon por primera vez los fundamentos de diversas ramas de la disciplina. Una de las ramas de la matemática que iba a experimentar una profunda transformación es el álgebra, que pasaría de ser una ciencia de cantidades y operaciones regidas por las reglas de la aritmética a ser una ciencia simbólica. La elaboración de esta nueva forma de enfocar el álgebra tuvo no poco que ver con un movimiento que se produjo en Cambridge a comienzos de siglo: la creación, en 1812, de la *Analytical Society* por un grupo de matemáticos entre los que destacan G. Peacock, G. Babbage y J.F.W. Herschel. Aunque el objetivo fundamental de esta sociedad era la implantación de la notación que en el continente se venía utilizando para el cálculo, algunos de sus miembros desarrollaron también un cálculo de operaciones —un

[4] Peirce llegó a comparar su talento lógico a los de Aristóteles y Leibniz (Cf. Fisch 1986, 486).

tipo de cálculo general en que los símbolos de operación se manipulan con independencia de la interpretación de los símbolos sobre los que se opera— que es probable que sirviese de estímulo para la creación de un enfoque simbólico para el álgebra.

La primera formulación clara de los principios de esta álgebra simbólica aparece en *A Treatise on Algebra,* publicada por G. Peacock en 1930. En ella se distinguen dos tipos de álgebra, el álgebra aritmética y el álgebra simbólica, definiéndose esta segunda como «la ciencia que trata de la combinación de signos y símbolos arbitrarios por medio de leyes concretas aunque arbitrarias» (1830, 71). La definición aceptaba, pues, los símbolos algebraicos como algo carente de significado y reconocía el principio de libertad algebraica. Sin embargo, en la práctica, Peacock no dejaría de ver al álgebra simbólica como una ciencia estrechamente vinculada a la aritmética, sin libertad para desarrollarse a partir de un conjunto arbitrario de supuestos. En su «Report on the Recent Progres and Present State of Certain Branches of Analysis», en el que explicita alguna de las ideas implícitas en el *Treatise*, escribe Peacock:

> ... Aunque la ciencia de la aritmética, o del álgebra aritmética, no brinda un fundamento adecuado para la ciencia del álgebra simbólica, sugiere necesariamente sus principios, o más bien sus leyes de combinación, pues, al no ser el álgebra simbólica, aunque arbitraria en la autoridad de sus principios, arbitraria en su aplicación, requiriéndose que incluya el álgebra aritmética así como otras ciencias, es evidente que sus reglas han de ser idénticas unas a otras, en la medida en que tales ciencias marchan juntas en común...(Peacock 1833, cit. en J. Richards 1980, 349).

La tarea de reafirmar este principio de libertad algebraica y, sobre todo, de ejercerla quedaría para miembros de la siguiente generación como A. De Morgan y William R. Hamilton, quienes crearon álgebras en las que al menos una de las leyes estándar de la aritmética es abandonada.[5] Todos estos desarrollos llevaron a la conclusión de que las leyes del álgebra ordinaria especifican cierto dominio pero que, mediante el abandono de algunas de sus leyes concretas, se

[5] De Morgan presenta ante la Cambridge Philosophical Society, en 1844, algunas álgebras triples no asociativas, y en cuanto a William Rowan Hamilton, mostraría que los cuaterniones obedecían todas las reglas de los números complejos excepto la conmutatividad de la multiplicación.

podía extender el álgebra a entidades distintas de los números. Ésta es precisamente la idea con la que se abre la primera de las obras de George Boole, *The Mathematical Analysis of Logic* (1847), donde podemos leer:

> Aquellos que están familiarizados con el estado actual de la teoría del Algebra de la Lógica Simbólica saben que la validez de los procesos de análisis no depende de la interpretación de los símbolos que se emplean, sino solamente de las leyes de su combinación. Todo sistema de interpretación que no afecte a la verdad de las relaciones supuestas es igualmente admisible, y de ahí que el mismo proceso pueda, bajo un esquema de interpretación, representar la solución de una cuestión sobre las propiedades de los números; bajo otro, la de un problema geométrico; y bajo un tercero la de un problema de dinámica o de óptica. Este principio es, ciertamente, de importancia fundamental; ...tomando como fundamento este principio general, me propongo establecer el Cálculo de la Lógica, y postular para el mismo un lugar entre las formas reconocidas del Análisis Matemático, aunque por su objeto e instrumentos deba permanecer, por el presente, solo. (Boole 1984, 41-42)

Para permitir el tratamiento algebraico del pensamiento tal y como se expresa en nuestro lenguaje, Boole empieza por clasificar los signos en distintos tipos según su función, luego busca encontrar el análogo de estas funciones en las formas del lenguaje ordinario, de suerte que se puedan traducir en signos análogos a los signos algebraicos, prestándose como ellos a un cálculo. De ello resulta la posibilidad de asimilar la lógica a un álgebra en la que sus símbolos numéricos no serán susceptibles de recibir otros valores que los valores 0 y 1.

El cálculo de Boole se presenta como un cálculo abstracto susceptible de una interpretación concreta en el álgebra de clases y también susceptible de una interpretación proposicional. Es un álgebra diseñada para que se preste a una interpretación lógica, pero en ella subsisten las marcas de la interpretación numérica inicial. Así, en este cálculo de ecuaciones se mantienen las operaciones inversas que son de difícil interpretación tanto en lógica de clases como en lógica de proposiciones, y se mantiene la adición numérica que sólo puede operar sobre términos mutuamente exclusivos, condición sumamente restrictiva en lógica, donde la disyunción toma un sentido más amplio y es el no excluyente. No tiene nada de extraño, pues, que muchos de los seguidores de la obra iniciada por Boole se propongan empezar por liberarla de los estrechos vínculos que aún mantiene con el cálculo numérico que le sirve de inspiración. Éste fue, sin duda, el caso de Peirce, cuyas investigaciones en lógica tienen como punto de partida la obra booleana,[6] pero se encaminan desde un principio a tratar de subsanar los inconvenientes que la aquejan por su estrecha dependencia de la aritmética.

Las investigaciones de Peirce sobre el álgebra de la lógica abarcan el período comprendido entre 1865 y 1885. En una de sus primeras obras, «On an improvement in Boole´s calculus of Logic», sustituye, como ya había hecho Jevons, la suma booleana por la suma no excluyente, lo cual le permite señalar el paralelismo entre las fórmulas que incluyen la suma lógica y las que involucran la multiplicación. Un paso más en este proceso de alejamiento del matematicismo booleano lo constituye su abandono de las operaciones inversas y las operaciones aritméticas. Pero la innovación más original iba a ser la sustitución de la relación de igualdad por la relación de inclusión entre clases, que él toma como relación fundamental de la lógica. Esta sustitución, que propone en 1870,[7] iba a cambiar la faz de la lógica, por cuanto que el signo —< no sólo le sirve para simbolizar la relación entre sujeto y predicado en una proposición categórica, sino que también para designar la relación entre antecedente y consecuente en una proposición condicional y la relación entre premisas y conclusión en una inferencia. A esta última la denomina relación de «ilación» y será para Peirce la relación más importante de la lógica.[8]

Peirce no sólo optó, como haría la mayoría de los lógicos de su tiempo, por una interpretación filoniana del condicional, sino que aunque, como luego veremos, vislumbró la posibilidad de una concepción «métrica» de la lógica, en los distintos sistemas que desarrolló en esta época asumió la idea booleana de que «sólo hay dos valores en el sistema de la cantidad lógica», manteniéndola tanto

[6] Boole es la principal fuente de inspiración de las investigaciones lógicas de Peirce en su etapa algebraica, pero no la única. También estaba familiarizado con la tradición germana de la lógica, siendo influido, por ejemplo, por Robert Grassmann y su *Formenlehre oder Mathematik*.

[7] Cf. «Description of a notación for the logic of relatives, resulting from an amplificación of the conceptions of Boole's calsulus of logic», incluido en los *Collected Papers*, vol. 3.

[8] En un principio, Peirce confunde la relación condicional con la relación de implicación o ilación, como es usual en la época, pero con el tiempo acabará por ofrecer una caracterización de esta última como una relación claramente distinta de la primera que no es sino un preludio de la definición tarskiana de la relación de consecuencia lógica.

en lo que se refiere al cálculo proposicional como al cálculo de clases. Esta cuestión le llevaría a apartarse de los derroteros seguidos por otros lógicos booleanos, como es el caso de Schröder, quien mantenía la idea de que una variable de clase podía adoptar valores intermedios (*Zwischenwerte*), a diferencia de lo que ocurría con las proposiciones.[9]

Pero el Peirce de esta primera etapa no fue sólo un continuador de la obra lógica de Boole. De él adoptó las técnicas algebraicas, pero la obra de De Morgan sobre lógica de relaciones también tendría una incidencia importante sobre su pensamiento: le haría ver la necesidad de ampliar el ámbito de la lógica más allá de la lógica de clases cubierta por la obra de Boole. De Morgan que, como antes vimos, había hecho contribuciones importantes al álgebra simbólica, no se decidió, sin embargo, a adoptar el enfoque algebraico que su amigo Boole había aplicado a la lógica, manteniéndose sus esfuerzos confinados en la tarea de revisar por enésima vez la lógica tradicional. Sin embargo, su «On the Syllogism IV and on the logic of relations» pondría de manifiesto la necesidad de ampliar el ámbito de la lógica hasta abarcar la lógica de relaciones.[10] Así lo percibió Peirce, quien en el artículo de 1870 antes citado escribe «...el álgebra lógica de Boole posee, dentro de sus límites, tan singular belleza que sería interesante preguntarse si no se la podría extender a todo el ámbito de la lógica formal en lugar de restringirla a ese apartado más elemental y menos útil de la misma que es la lógica de los términos absolutos, la única conocida cuando aquél compuso su obra» (CP 3.45). Su respuesta fue afirmativa y, su principal cometido en adelante será la construcción de una teoría de relaciones o, como él prefiere decir, relativos. Serán precisamente ciertos problemas planteados con las operaciones con relativos los que le llevarán a establecer una teoría de la cuantificación tan sólo cuatro años después de Frege y con absoluta independencia de la obra de éste. En efecto, motivado por el deseo de solucionar las complicaciones que surgen en el álgebra de relativos cuando aparecen juntas operaciones relativas y no relativas, al

---

[9] Este tema de los valores de la lógica de clases es uno de los discutidos en la correspondencia entre ambos autores, como puede verse en Houser 1990/91, pág. 229.

[10] Peirce sentía una gran admiración por De Morgan como persona. En un texto en el que recuerda «lo que había de hombría y pathos en el rostro de De Morgan» cuando le hizo ver, en 1870,«la inmensa superioridad del método booleano» , termina diciendo: «Dudo de que yo, cuando esté en mis últimos días y algún joven llegue y me señale hasta qué punto mi obra ha sido superada, sea capaz de asumirlo con el mismo genuino candor...» (CP 4.4; Cf. NE 3, 882-3).

final de un artículo escrito en 1883,[11] pone rumbo ya hacia la lógica de primero orden, al introducir la idea de que las fórmulas afirman hechos acerca de las sumas y los productos de coeficientes numéricos y de que cada fórmula es equivalente a cierta proposición correspondiente. Un par de años más tarde, extenderá los símbolos Π y Σ más allá del ámbito de las proposiciones de relación y los interpretará no como un producto y una suma sino como el cuantificador universal y particular respectivamente.

Pero el trabajo que Peirce realizó en el ámbito de la lógica no se detiene en la lógica algebraica. No satisfecho con el modo en que las formas lógicas son representadas en las notaciones algebraicas, Peirce, aunque está convencido de que el álgebra por él desarrollada es «adecuada para el tratamiento de todos los problemas de la lógica deductiva» (CP 3.364), se embarca, sin embargo, en la tarea de desarrollar un sistema de notación lógica gráfica por considerarla más idónea por razones que, como veremos, tienen mucho que ver con su filosofía de la lógica.

2. Geometrías no euclídeas y lógicas no aristotélicas

En su interesante *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* escribe Kline:

> Entre las complejas creaciones técnicas del siglo XIX la más profunda, la geometría no euclídea, fue técnicamente la más simple. Esta creación dio origen a nuevas e importantes ramas de las matemáticas, pero su implicación más significativa es que obligó a los matemáticos a revisar radicalmente su comprensión de la naturaleza de las matemáticas y su relación con el mundo físico. Dio origen a problemas en los fundamentos de las matemáticas con los que el siglo XX sigue luchando. (Kline 1992, 1.137)

La geometría no euclídea no fue sino la culminación de los esfuerzos que desde antiguo venían realizándose tratando de probar el postulado de las paralelas de la teoría euclídea a partir de los demás axiomas. La primera de las geometrías

[11] Cf. «Note B: the logic of relatives», publicado en *Studies in logic*, editados por C.S. Peirce (Boston: Little & Brown) e incluido en los *Collected Papers*, vol. 3.

no euclídeas fue desarrollada independientemente por C. Gauss, N. Lobachevski y J. Bolyai. Aunque estas teorías no se presentaron inicialmente de un modo axiomático, consideradas bajo un enfoque así, venían a suponer la sustitución del postulado de las paralelas por el postulado contrario de que a través de un punto exterior a una recta hay al menos dos líneas paralelas. En 1854, Riemann, a propuesta de Gauss, eligió hablar de los fundamentos de la geometría en su *Habilitationsvortag*. En ella, guiado por procedimientos usados por Gauss para las superficies del espacio euclídeo, desarrolló una teoría que era de distinta índole, pues en ella se preconizaba la sustitución del postulado de las paralelas por uno que afirma que por un punto exterior a una línea no hay ninguna paralela a una línea dada. El propósito inicial perseguido por estos primeros creadores de las geometrías no euclídeas parece haber sido tratar a la geometría de un modo «general» que no entrañe compromiso alguno con la verdad o falsedad del postulado euclídeo de las paralelas. Esto se pone especialmente de manifiesto en el trabajo de Riemann, que no basa sus consideraciones en el espacio real sino que ofrece una consideración de «manifolds continuas de n-dimensiones». El empleo de diferentes funciones para definir la «distancia» entre los puntos en una «manifol» se consideraba que proveía al espacio de diferente «métrica». Lo que Riemann pretende hacer mediante este recurso no es únicamente delinear una geometría no euclídea sino sugerir que la geometría ha de verse como compuesta de ciertas proposiciones que son conocidas a priori, esto es, sobre la base de la comprensión de los conceptos involucrados, y de otras cuya verdad sólo puede determinarse sobre una base empírica. Esta idea de Riemann de la naturaleza de la geometría fue resumida posteriormente por Cayley del siguiente modo: «Se puede decir que la opinión de Rienmann es que, teniendo *in intellectu* una noción más general de espacio (de hecho una noción de espacio no euclídeo), aprendemos por medio de la experiencia que el espacio (el espacio físico de la experiencia) es, si no exactamente, al menos en el más alto grado de aproximación, el espacio euclídeo» (cit. en Kline1992, 1216-17).

Paralelamente a estos desarrollos de las geometrías no euclídeas estaba teniendo lugar una renovación del interés por la geometría proyectiva. El primero entre sus cultivadores en establecer que las propiedades proyectivas de las figuras geométricas son lógicamente más fundamentales que las métricas fue Poncelet, pero sería von Staudt quien iniciaría la construcción de la geometría proyectiva sobre una base independiente de la longitud y medida de los ángulos. No fue sino a partir de su trabajo cuando se reveló con toda claridad que la geometría proyectiva precede lógicamente a la geometría euclídea porque se ocupa de las propiedades cualitativas y descriptivas que intervienen en la formación misma de las figuras geométricas y no apela a las medidas de los segmentos de recta ni de ángulos.

A partir de entonces, la cuestión de la relación de la geometría proyectiva con las geometrías métricas, tanto euclídea como no euclídeas, se convertiría en objeto de investigación en manos de matemáticos como Cayley y Felix Kein. El primero de ellos se preocupó de mostrar que las nociones métricas pueden formularse en términos proyectivos, llegando a escribir (usando el término «geometría descriptiva» para la geometría proyectiva) que «la geometría métrica es así una parte de la geometría descriptiva y la geometría descriptiva es toda la geometría» (cit. En Kolmogorov/Yushkevich 1996, 71). Este resultado sería generalizado por Felix Klein, quien puso de manifiesto el papel básico de la geometría proyectiva respecto de todas las geometrías métricas, a las que denominó hiperbólica (a la de Lobachevski y Bolyai) y elíptica (a la de Riemann).

Las construcciones matemáticas de Cayley y Klein haciendo plausible que las diferentes teorías métricas podían ser tratadas como extensiones de la geometría proyectiva y desarrollando un marco unificado en el que discutir las distintas geometrías que se habían desarrollado en el siglo XIX causaron una fuerte impresión en Peirce. En una carta a su amigo y protector el filósofo William James, escrita en 1909, instaba a éste a familiarizarse con estos desarrollos y le explicaba que era Klein, más bien que Cayley, quien había mostrado que la diferencia entre los dos sistemas no euclídeos y el euclídeo «era meramente una cuestión del tipo de medida» (cit. en Eisele 1979, 257). Peirce estaba al tanto de estas investigaciones y había reflexionado acerca de las implicaciones de la aparición de las nuevas geometrías respecto al tema del estatuto epistemológico de las proposiciones geométricas.[12] Estas ideas permearon su pensamiento tanto filosófico como lógico. En lo que se refiere a este último, el impacto de las mismas no pudo ser más claro. En efecto, a comienzos de su artículo de 1885,[13] el más impor-

[12] En un texto escrito hacia 1893, Peirce afirma que «en el presente es imposible que los postulados de la geometría sean exactamente verdaderos» (CP 1.131). Manifestaciones de este tenor han dado pié a Dipert a afirmar que «entre los filósofos de mentalidad científica que escriben a mediados del XIX, Peirce es el único en mantener que el espacio no puede ser euclídeo» (Dipert 1977, 404), cosa que dista mucho de ser cierta .

[13] «On the algebra of logic: a contribución to the philosophy of notation», incluido en los *Collected Papers*, vol. 3 (3.359-403).

tantes de cuantos dedicó al tema de la lógica, le vemos estableciendo el siguiente paralelismo entre la lógica y la geometría:

> Conforme a la lógica ordinaria, una proposición es o bien verdadera o bien falsa y no se reconoce ninguna distinción más. Ésta es la concepción descriptiva, como dice el geómetra; la concepción métrica sería que toda proposición es más o menos falsa y que la cuestión no es sino una cuestión cantidad. En el presente, adoptaremos la primera concepción. (CP 3.365)[14]

Efectivamente, Peirce, lo mismo que prácticamente todos los lógicos de su tiempo, optaría por desarrollar una lógica bivalente, enunciando en el punto siguiente al citado lo que no es sino la forma algebraica de la ley del tercio excluso (CP 3.366). Pero a diferencia de ellos, posteriormente llegaría a esbozar lo que se considera un claro antecedente de la lógica triádica. En efecto, en unas notas tituladas «Triadic Logic» (Logic Notebook, 1909, parcialmente reproducidas en «Peirce's triadic logic» de Fisch y Turquette[15]) presenta un sistema con tres valores: V (*verum*), F (*falsum*) y L («el límite»), que para él significaba que la oración con este valor «no es susceptible de la determinación V o de la determinación F». Él no pensaba que un sistema así supusiera una clara alternativa a la lógica estándar bivalente. De igual modo que Cayley, Klein y Poincaré rechazaron la idea de que el espacio físico pudiera ser no euclídeo y siguieron considerando el espacio euclídeo como el espacio fundamental,[16] así también Peirce, aun viendo como un serio defecto de la lógica de su tiempo el hecho de que no reconozca que hay un terreno intermedio entre la aserción positiva y la negación positiva, escribe, sin embargo: «Este reconocimiento no entraña negación alguna de la lógica existente, sino que supone una gran adición a ella. Reconocer un modo de composición de conceptos como el del cálculo baricéntrico no sería sino un modo de reconocer la idea del límite de menor dimensionalidad entre dos campos cualesquiera mutuamente excluyentes» (carta a W. James de 26 de Feb. de

[14] La misma contraposición entre un enfoque descriptivo y métrico la encontramos en el Ms. 748, donde su flirteo con el segundo le lleva a distinguir cuidadosamente entre el principio de contradicción y el del tercio excluso , poniendo más confianza en el primero de ellos (Cf. NE 3, 751).

[15] Incluido en Fisch 1986, 171-183.

[16] En realidad , lo que pensaban es que la decisión de preservar la geometría euclídea era la más recomendable por su simplicidad. Esta idea se vería falsada cuando Einstein, al desarrollar su teoría de la relatividad, buscó una teoría matemática adecuada para tratar la estructura del espacio físico y encontró en el sistema de Riemann el instrumento conceptual que necesitaba.

1909, cit en Eisele 1979, p. 263). Esto es, para el lógico americano, las lógicas no bivalentes ocomo también las llama no aristotélicas, no suponen una negación de la lógica aristotélica sino una prolongación de la misma.

3. Topología y sistema de diagramas

Si sus esbozos de lógicas triádicas suponen la introducción de una idea totalmente novedosa en el panorama lógico, hay otra aportación de Peirce que no le va a la zaga en cuanto a originalidad. Me refiero al procedimiento que ideó para representar en forma geométrica enunciados lógicos: su teoría de los «grafos existenciales», teoría que durante mucho tiempo ha sido pasada por alto pero que a partir de la década de los noventa del siglo pasado está en el punto de mira de autores como Barwise y Hammer, interesados en el razonamiento por medio de representaciones no-lingüísticas o cuasi lingüísticas.[17]

Las fuentes en las que Peirce se inspiró para diseñar esta nueva herramienta de análisis lógico parecen haber sido varias. Está en primer lugar el uso que los matemáticos ingleses Sylvester y G.K. Clifford habían empezado a hacer de diagramas químicos para la representación de invariantes algebraicos, campo de investigación en el que eran, junto con Cayley, los representantes más destacados. Buena prueba de ello la constituye el hecho de que, en 1896, Peirce habla de diagrama como «aquello a lo que Clifford llama diagrama y que está compuesto de lugares y líneas, a imitación de los diagramas químicos que muestran la estructura de los compuestos» (CP 3.468). Pero lo que terminaría por llevarle a diseñar esta teoría a la que consideraba su «chef d'oeuvre» y de la que vaticinaba que sería «la lógica del futuro» (Robert 1973, 11 y 110) sería la consideración de las investigaciones realizadas en una rama de la matemática que por esta época se consolidaría como disciplina independiente: la topología.

El término «topología» apareció por primera vez en *Vorstudien zur topologie*, una obra publicada en 1847 de la que era autor Johann Benedikt Listing, un alumno de Gauss. La nueva disciplina así denominada tiene un claro precedente en el estudio al que Leibniz había denominado «análisis situs» o «geometría

[17] Cf. Barwise/Hammer 1994.

situs». Listing, que hubiera preferido denominar así a sus investigaciones, se vió obligado a descartar este término por haber sido utilizado por von Staudt para designar la geometría proyectiva. Propuso a cambio el neologismo «topología» como para designar «el estudio de relaciones 'modales'[18] de figuras tridimensionales o de las leyes de conectividad, posición mutua y orden de puntos, superficies, sólidos y partes de ellos o la totalidad de ellos en un espacio independiente de las relaciones de medida y cantidad» (cit. en Kolmogorov / Yushkeivich 1996, 99-100).

Peirce conocía estas investigaciones de Listing (CP 5.490, NE 4, 47). Estaba también familiarizado con el esquema propuesto por Augustus Ferdinand Möbius, en su *Der barycntrische calcul*, para representar puntos de un plano mediante coordenadas, y había estudiado concienzudamente diversos problemas de índole topológica, como el consistente en demostrar que cuatro colores bastan para colorear un mapa de suerte que países que tengan frontera común no estén coloreados del mismo color. Todo ello le llevaría a conferir una gran importancia a esta nueva disciplina matemática, a la que considera «la forma más elevada de las matemáticas» (CP 1.283) y a la que caracteriza como «el estudio de las relaciones continuas y de las faltas de continuidad de los *loci* susceptibles de ser deformados de un modo cualquiera de suerte que quede preservada la integridad de las relaciones y de las separaciones de todas sus partes» (CP 4.219).

Los primeros intentos peirceanos encaminados a diseñar un sistema de diagramas para la representación de enunciados lógicos datan más o menos de la misma época en que mostró un claro interés por la topología. Esto no tiene nada de extraño habida cuenta de que un diagrama lógico no es otra cosa que una figura bidimensional provista de relaciones espaciales, por lo general de naturaleza topológica, que son isomorfas a la estructura de un enunciado lógico. El empleo de figuras geométricas para la representación de relaciones lógicas data de muy antiguo. El primer paso importante en la consecución de un método diagramático adecuado para permitir la resolución de problemas en lógica de clases consistió en utilizar curvas cerradas simples para representar clases. Fueron varios los autores que se valieron de círculos para este fin, pero uno de los primeros fue el matemático suizo Leonhard Euler, quien los describe en siete de las cartas

[18] Denomina así a las propiedades de figuras que se preservan bajo transformaciones continuas.

incluidas en sus *Lettres à une princesse d'Alemagne* (1772). Esta propuesta fue mejorada por el lógico inglés J. Venn quien presentó un sistema de círculos secantes que resultó ser isomorfo al álgebra de clases booleana. Pero el sistema más completo de cuantos se han presentado hasta el momento es el sistema peirceano de «grafos existenciales». Peirce define el grafo por medio de la noción de iconicidad:[19] «un *grafo lógico* es un grafo que representa icónicamente relaciones lógicas de manera que se facilite el análisis lógico» (CP 4.420). El grafo «descompone el razonamiento en el mayor número posible de pasos distintos de suerte que permite estudiar la constitución del pensamiento...» (NE 3, 406). Los grafos existenciales de Peirce se presentan como figuras bidimensionales escritas sobre una hoja de papel, denominada «hoja de aserción» (CP 4.396), que Peirce interpreta como el «universo del discurso» de A. De Morgan, esto es, como el conjunto de objetos de los que va a hablarse Su descripción de esta «hoja de aserción» no permite dudar del marchamo topológico de la teoría:

> «Os pido que imaginéis que todas las proposiciones verdaderas han sido formuladas; y, dado que los hechos se hallan interpenetrados, no se puede concebir la cosa como posible sino en un continuo. Es obvio que este continuo ha de tener más dimensiones que una superficie o incluso que un sólido; y lo supondremos plástico de suerte que pueda ser deformado de cualquier manera sin que la continuidad y las relaciones entre las diversas partes se rompan nunca. Cabe imaginar que la hoja blanca de aserción no es sino la fotografía de este continuo» (CP 4.512).

Esto es, sus diagramas no se ocupan del tamaño o de la forma en ningún sentido métrico sino de aquellas propiedades geométricas que se mantendrían inalterables si la hoja de aserción fuera una lámina que pudiéramos retorcer o someter a las deformaciones continuas estudiadas por la topología.

El sistema de grafos existenciales presentado por Peirce abarca en realidad tres subsistemas, a los que denomina alfa, beta y gamma, y que corresponden a la lógica proposicional, la lógica de la cuantificación y a la lógica modal respectivamente. En el primero de ellos mediante la yuxtaposición de grafos se representa la conjunción y mediante lo que denomina «*cuts*» (cortaduras), que no son

[19] Perice divide los sígnos en tres categorías: iconos, índices y símbolos (CP 2.279, 3.363). Los primeros son aquellos que están relacionados con su objeto mediante una relación de semejanza.

sino curvas cerradas que recortan la superficie sobre la cual se encuentran inscritas, la negación, por lo que se trata de una notación suficiente para representar la lógica proposicional.[20] Para obtener el poder expresivo de la lógica de primer orden, en el sistema beta se añaden una o más *«líneas de identidad»* a los símbolos de predicado según la índole de estos (CP 4.444), líneas que corresponden cada una de ellas a una variable ligada por un cuantificador particular. En cuanto al sistema gamma, tras una tentativa por distinguir las tres variedades de la modalidad (la verdad fáctica, la verdad posible y la verdad necesaria) valiéndose de tres «tinturas» subdividas cada una de ellas en cuatro tipos, Peirce abandonó el intento porque reconoció que le faltaba claridad.[21]

Con este sistema el lógico americano no estaba tratando de crear un método que pudiera ser utilizado de forma eficaz para resolver problemas lógicos, aunque sus grafos son útiles también para este fin. En lo que él estaba interesado fundamentalmente era en un método capaz de analizar en detalle la estructura de todo razonamiento, en descomponer esta estructura en todos sus elementos y en proveer a cada elemento de la representación más sencilla e icónica posible. Los grafos existenciales hacen la estructura lógica literalmente visible ante nuestros ojos de modo parecido a como la observación de un mapa nos permite ver una región geográfica. En este sentido la utilidad que el sistema de grafos presta al análisis lógico gracias a su propia pureza analítica es muy superior a la proporcionada por el sistema algebraico de escritura. No es que las fórmulas algebraicas estén desprovistas por completo de iconicidad. No lo están (NE 4, XI), pero no representan tan icónicamente las relaciones lógicas como los diagramas. Éstos reproducen con absoluta exactitud las relaciones representadas (NE 3, 164 y sig.), de ahí que este sistema diagramático tenga la virtud de llevar «más directamente al análisis de los problemas lógicos que ninguna especie de álgebra jamás inventada» (CP 3.619). De todos modos, las razones de esta superioridad de uno de los sistemas de notación sobre el otro se verán más claramente si situamos la comparación entre ambos en el contexto de la contraposición que Perice establece entre las actividades del lógico y del matemático, contraposición que pasamos a analizar a continuación.

---

[20] Antes de desarrollar su teoría de los grafos existenciales, Peirce experimentó con lo que llamó «grafos entitativos», en los que la yuxtaposición de dos grafos representa la disyunción en vez de la conjunción, pero los rechazó por falta de iconicidad. (CP 4.434).

[21] Son varios los trabajos donde puede hallarse una descripción de la teoría peirceana. Destacaremos Robert 1973, Shin 1992 y Hilpinem 2004.

4. La relación entre la lógica y las matemáticas

Además de una intensificación de la investigación matemática en áreas ya conocidas y de la creación de nuevos campos de estudio, en el siglo XIX se produjeron también cambios profundos y de vastos efectos en el modo de concebir la naturaleza de las matemáticas. En particular, el desarrollo de las geometrías no euclídeas estimuló la revisión de la base axiomática de varios sistemas matemáticos y la formulación por vez primera de los fundamentos de diversas ramas de la disciplina. De este examen crítico de los fundamentos de la matemática surgiría entre otras cosas una nueva concepción de la naturaleza de esta disciplina y un modo totalmente distinto de enfocar las relaciones de las matemáticas con la naturaleza. La concepción tradicional de la aritmética como la ciencia de la cantidad o de la geometría como el estudio del espacio físico va desapareciendo para dar paso a la idea de que la matemática es la disciplina por excelencia que obtiene conclusiones a partir de cualquier conjunto de postulados y de que la validez de las inferencias obtenidas no depende de ninguna interpretación concreta que pueda atribuirse a los postulados de partida. Poco a poco iría cobrando fuerza la idea de que los postulados de las distintas ramas de la matemática no versan sobre el espacio, la cantidad o cosa alguna por el estilo, sino que son construcciones abstractas cuyo papel es servir de supuestos para la derivación de ciertas conclusiones.

Aunque esta concepción abstracta y formal de la matemática no se consolidaría del todo hasta principios del siglo XX, ya en el último tercio del XIX empezarían a configurarse algunos de los rasgos componentes de la misma. Así, uno de los primeros en destacar el carácter deductivo y, por ende, lógico del discurso matemático sería precisamente Benjamin Peirce, quien en 1870 definió las matemáticas como «la ciencia cuyo objeto consiste en extraer conclusiones necesarias» (B. Peirce 1881, 97). Esta definición iba a tener una amplia aceptación especialmente entre los teóricos americanos del método postulacional.[22] Uno de los que enseguida se harían eco de ella sería su propio hijo, que vuelve sobre ella en numerosas ocasiones a lo largo de su obra (Cf., por ejemplo, CP 3.358, 4.429). En efecto, Peirce señala la inadecuación de las viejas definiciones de las matemáticas que estipulan que es «la ciencia de la cantidad» y señala:

[22] Para la repercusión de esta concepción en los teóricos americanos del método postulacional (Huntington, Veblen y Young, entre otros), véase Scanlan 1997, 111 y sig.

> Los matemáticos modernos reconocen una característica verdaderamente esencial de su ciencia, a saber, que se ocupa de hipótesis puras sin preocuparse de si corresponden o no a algo en la naturaleza o, al menos, dejan de lado por completo tal correspondencia una vez que sus hipótesis están formadas (NE 4, 193-94).

Esto es, las matemáticas se ocupan del razonamiento necesario *per se*, dejando de lado si sus hipótesis corresponden o no a algo en la naturaleza; buscan únicamente la conexión necesaria entre items cuyo estatus es meramente hipotético y no real (CP 4.233, 4.240).[23] Peirce acepta, pues, el deductivismo como rasgo definitorio de las matemáticas, pero, a pesar de ello, su intención no es destacar la afinidad entre las matemáticas y la lógica, sino más bien contraponer la una a la otra: si la matemática es «la ciencia que *obtiene* conclusiones necesarias», la lógica es, en cambio, la ciencia de la *obtención* de conclusiones necesarias»(CP 4.239); la primera no es sino la práctica del razonamiento, en tanto que la segunda, el análisis y la teoría del mismo (CP 4.134). Él las ve en efecto, como ciencias con intereses diferentes:

> El lógico no se interesa particularmente por tal o cual hipótesis o sus consecuencias, salvo en la medida en que puedan arrojar alguna luz sobre la naturaleza del razonamiento. El matemático se interesa fundamentalmente por métodos de razonamiento eficaces, considerando su posible nueva ampliación a nuevos problemas; pero qua matemático, no se molesta en analizar en detalle las partes de su método cuya corrección es cosa admitida. Los diferentes aspectos que toma el álgebra de la lógica para las dos profesiones es instructiva al respecto. El matemático se pregunta qué valor tiene esa álgebra como cálculo. ¿Puede aplicarse a desenmarañar una cuestión complicada? ¿Producirá de golpe alguna consecuencia remota? Al lógico no le interesa que el álgebra tenga tal carácter. Antes al contrario, el mayor número de pasos lógicos distintos en que el álgebra descompone una inferencia constituye para él una superioridad sobre otras que lleven más rápidamente hasta

[23] Esta concepción le llevaría a criticar duramente la idea de la matemática mantenida por William Rowan Hamilton como la ciencia del espacio y el tiempo: «la definición de Hamilton es con mucho la más objetable de cuantas han estado en boga, pues niega implícitamente la principal característica de la matemática, a saber, que no investiga hechos sino que se ocupa únicamente de ideas sin tratar de establecer su verdad» (NE 2, 8).

la conclusión. Lo que él pide es que esa álgebra analice un razonamiento hasta sus pasos más elementales. Así, lo que para uno de esos profesionales es un mérito del álgebra lógica es un demerito para el otro (CP 4.239, Cf. NE 4, 149-50).[24]

Esta distinción de fines se traduce en una oposición de procedimientos a seguir: mientras el cálculo creado con fines matemáticos ha de reducir el número de pasos tanto como sea posible, el sistema diseñado para la investigación de la lógica «debería ser tan analítico como sea posible, fragmentando las inferencias para obtener el mayor número de pasos posible» (CP 4.373). Este ideal de analiticidad para la lógica es el que hace que Peirce considere que el método de representación gráfica está muy por encima del método algebraico, toda vez que propicia una representación adecuada de la inferencia que facilita su evaluación. También hace que se desmarque de lógicos como Schröder, interesados sobre todo en la construcción de cálculos algebraicos. Esta tarea dice entraña el peligro de degenerar en un pasatiempos inútil, «demasiado rudimentario para tener un interés matemático y demasiado superficial para tener un interés lógico» (CP 3.619), y tacha al álgebra incluida en el tercero de los volúmenes de *Vorlesungen* de Schröder —el dedicado a la lógica de relaciones— de contener «un grano de trigo por cada diez celemines de salvado» (3.451).[25]

Todo esto pone de manifiesto hasta qué punto la filosofía peirceana de las matemáticas está alejada del logicismo de Frege y Russell. Peirce no cree que las matemáticas, para él la «ciencia más abstracta de todas» (CP 3.428), puedan fundamentarse en la lógica: «la lógica no puede ser de ninguna ayuda para las matemáticas» (CP 4.228); en cambio ésta sí puede ser de utilidad para aquélla (NE 4, 45). Así, una de las primeras cosas que Peirce dice repetidamente haber averiguado analizando las matemáticas es que «todo razonamiento matemático es diagramático y que todo razonamiento necesario es razonamiento matemático por simple que sea» (NE 4, 47; CP 4.228). Pero no es éste el único descubri-

---

[24] En un artículo sobre lógica simbólica escrito para el *Baldwin's Dictionary* se expresa en el mismo sentido: «el propósito y fin de un sistema de símbolos lógicos es única y simplemente la investigación de la teoría de la lógica, y no la construcción de un cálculo que ayude a realizar inferencias» (CP 4.373).

[25] Otros lugares en los que Peirce critica a Schröder por la aplicación que hace de los métodos algebraicos son 3.431 y 3.510-3.519.

miento importante al que le llevaría el análisis del razonamiento matemático. También a través de él descubrió que hay dos tipos de razonamiento necesario, a los que denominó, sirviéndose de una terminología introducida por Euclides, corolarial y teoremático (CP 4.616). Mientras que una deducción colorolarial es aquella que extrae sus conclusiones mediante el análisis y manipulación de las premisas tal y como son dadas, «la peculiaridad del razonamiento teoremático es que considera alguna cosa no involucrada en las concepciones ya adquiridas, que ni la definición del objeto de investigación ni cosa alguna ya conocida podría sugerir, aunque le den cabida» (NE 4, 49). El primero, al que también llama razonamiento «filosófico»(CP 4.233), es razonamiento con palabras, en tanto que el segundo, que es el razonamiento matemático propiamente dicho, es un razonamiento que entraña un momento creativo, un momento en que el que razona «experimenta en la imaginación» sobre el diagrama de las premisas, acude a «construcciones auxiliares» con objeto de llegar a la conclusión.

Este descubrimiento de la necesidad de construir un diagrama o imagen un icono de algún tipo en casos de razonamiento no trivial pone de manifiesto que, aunque Peirce contrapone las matemáticas a las ciencias experimentales como tratando de estados hipotéticos de cosas que no tienen relación con nada del mundo real, no obstante, sigue viendo un elemento observacional implícito en el razonamiento matemático: «Pensar en términos generales no es bastante. Es necesario que algo sea HECHO. En geometría se trazan líneas subsidiarias, en álgebra se realizan las transformaciones permitidas. Por tanto, la facultad de la observación es llamada a desempeñar un papel» (CP 4.233). Esta concepción de la naturaleza de la matemática es al fin y al cabo más común entre los matemáticos de lo que pudiera pensarse. Como recordaría Sylvester en una célebre comunicación a la *British Association*, que lleva por título «El estudio que no sabe nada de la observación, «Lagrange, cuya autoridad me parece máxima, ha expresado insistentemente su creencia en la importancia de la facultad de observación para el matemático; Gauss ha llamado a la matemática una ciencia de la vista, y de acuerdo con esa opinión, ha prestado siempre una atención puntillosa al problema de las erratas de imprenta; Riemann cuya desaparición deberá lamentarse siempre, ha escrito una tesis para mostrar que la base de nuestra concepción del espacio es puramente empírica, que nuestro conocimiento de las leyes del espacio es el resultado de la observación...» (J.R. Newmann 1974, 11). Pero no sólo las matemáticas tienen un elemento observacional implícito. También la lógica en tanto que ciencia exacta es una ciencia que tiene que ver con la observación. «Todo razonamiento deductivo, incluso un simple silogismo, encierra un elemento de observación; pues la deducción consiste en construir un icono o un diagrama en el que las relaciones entre las partes presentan una analogía completa con las relaciones entre las partes del objeto del razonamiento; después en experimentar sobre esta imagen en la imaginación y en observar el resultado de forma que se descubran entre las partes relaciones no percibidas hasta entonces» (CP 3.363).[26]

Peirce compartió con Boole, De Morgan y Schröder la idea de que la lógica debe asociarse a las matemáticas y no a la filosofía, pero, a diferencia de ellos, él pensaba que no había que perder de vista nunca su especificad en tanto que disciplina cuyo cometido es el análisis y evaluación de la inferencia. Esta concepción de los objetivos de la lógica le llevó, como antes se ha visto, a distinguir sus intereses de los de miembros de la tradición algebraica, como Schröder, empeñados en la búsqueda de reglas para la solución de problemas lógicos y, por ende, en la construcción de cálculos. Pero le llevaría también a distanciarse del objetivo de los logicistas de separar y enunciar explícitamente las leyes de la deducción, presentándolas bajo la forma de una teoría deductiva axiomatizada. Peirce no intentó nunca una presentación axiomática de la lógica, sino que su sistema es asimilable a un sistema de deducción natural basado íntegramente en reglas de introducción y eliminación de conectivas. Cierto que en la presentación de la lógica proposicional que hace en su artículo de 1885, establece una lista de cinco «iconos», que algunos han tomado como una base suficiente para una axiomatización del cálculo proposicional clásico,[27] pero en realidad estos iconos no han de ser tomados como axiomas, sino más bien como algunas verdades que pueden establecerse por reglas de introducción y eliminación.[28] El lógico americano anticipa, en efecto, la idea de que los significados de las constantes lógicas pueden considerarse implícitamente definidos en la estipulación de reglas lógicas, siendo de la opinión de que la lógica puede prescindir de axiomas y de que lo que tomamos por tales no son sino definiciones disfrazadas.[29] Esto supone una

[26] Aunque escribió que la lógica «se basa en observaciones del hecho real acerca de productos mentales» (NE 4, 267), Peirce no es, sin embargo, un representante del psicologismo, pues, para él, la lógica no es una ciencia descriptiva de dicho proceso.

[27] Es el caso, por ejemplo, de A. N. Prior en Prior 1958.

[28] Para una clara exposición de esta cuestión, véase G. Brady 2000, 121 y sig..

[29] Su actitud hacia la axiomatización fue especialmente clara en su artículo de 1870, al final del cual escribe: «Pero tales axiomas son meros sustitutos de definiciones de relaciones lógicas uni-

concepción de la lógica radicalmente distinta de la mantenida por los logicistas: si para ellos un sistema lógico no es sino una teoría, es decir, un sistema de afirmaciones sobre objetos determinados, Peirce lo concibe más bien como una lengua, es decir, como un sistema de signos junto con sus reglas de uso.

Esta idea entonces insólita no tardaría, al igual que algunas de las otras que hemos examinado, en reaparecer en el panorama de la lógica. He tratado de mostrar que esta indudable capacidad de Peirce para vislumbrar penetrantes ideas acerca de la lógica y de la filosofía de la lógica muy por delante de su tiempo tiene no poco que ver con un conocimiento de las matemáticas más amplio y profundo de lo que era usual entonces.

Referencias bibliográficas

BARWISE, J. / E. HAMMER, 1994. «Diagrams and the concept of a logical system», en *What is a logical system?*, D. Gabbay ed., Oxford: Clarendom Press, 73-106.

BOOLE, G., 1847. *The mathematical analysis of logic*, traducción española: *El análisis matemático de la lógica*, Madrid: Cátedra, 1984.

BRADY, G., 2000. *From Peirce to Skolem. A neglected chapter in the history of logic*, Amsterdam: Elsevier.

BRENT, J., 1993. *C.S. Peirce. A life*, Bloomington: Indiana University Press.

DE MORGAN, A., 1966. *On the syllogism and other logical writings*, P. Heath ed., New Haven: Yale University Press.

DIPERT, R., 1977. «Peirce's theory of geometrical structure of physical space», en *Isis 68*: 404-413.

EISELE, C., 1979. *Studies in the scientific and mathematical philosophy of C.S. Peirce*, R. Martin ed., La Haya: Mouton Plubishers.

FISCH, M.H., 1986. *Peirce, semeiotic and pragmatism*, K.L. Ketner y C.S. Kloesel eds., Bloomington: Indiana University Press.

versales y, en la medida en que se las puede definir, se puede prescindir de todos los axiomas. Los principios fundamentales de la lógica proposicional no son propiamente axiomas sino definiciones y divisiones...» (CP 3.149).

GRATTAN-GUINNESS, I., 1997. «Vida en común, vidas separadas. Sobre las relaciones entre matemáticas y lógicas desde la revolución francesa hasta la primera guerra mundial», *Theoria* 12/1: 13-37.

HILPINEM, R., 2004. «Peirce's logic», en *Handbook of the history of logic*, vol 3: *The rise of modern logic: from Leibniz to Frege*, D. Gabbay y J. Woods eds., Amsterdam: Elsevier, 611-658.

HOUSER, N., 1990/91. «The Schröder-Peirce correspondence», *Modern Logic 1*: 206-236.

KLINE, M., 1972. *Mathematical thought from ancient to modern times*, Traducción española: *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Madrid: Alianza editorial, 1992.

KOLMOGOROV A.N./ A.P. YUSHKEVICH, 1996. *Mathematics of the 19th century*, Basel: Birkhäuser Verlag.

PEACOCK, C., 1830. *A treatise on algebra*, Cambridge: J. and J, J Deighton.

PEIRCE, B., 1881. «Linear associative algebras» (con notas de C.S Peirce), *American Journal of Mathematics 4*.

PEIRCE, C.S., 1931-35. *Collected Papers of charles Sanders Peirce*, vols. 1-6, C. Hartshorne y P. Weiss eds., Cambridge, Mass.: Harvard University Press. (CP)

PEIRCE C.S., 1976. *The New Elements of Mathematics*, vols. 1-4, C. Eisele ed., The Hague: Mouton. (NE)

PRIOR, A.N., 1958. «Perice's axioms for propositional logic», *Journal of Symbolic Logic 23*.

RICHARDS, J., 1980. «The art and the science of british algebra: a Study in the perception of mathematical truth», *Historia Mathematica 7*: 343-365.

SCANLAN, M., 1997. *American postulate teorizas and the development of axiomatic method, 1900-1930*, State Univ. Of New York at Buffalo, Ph. D. UMI Dissertation Services.

ROBERTS, D.D., 1973. *The existencial graphs of Charles S. Peirce*. The Hague: Mouton.

SHIN, S.J., 2002. *The iconic logic of Peirce's graphs*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

SYLVESTER, J. J., 1869. «Presidential adress to sección 'A' of the British Association», traducción española (parcial): *El estudio que no sabe nada de la observación*, en J.R Newman ed.: *La forma del pensamiento matemático*, Barcelona: Grijalbo, 1974.