INTRODUCCION HISTORICA A LA TEORIA DE LA METRIZACION.-II.

SUPPES Y LA TEORIA MADURA: REPRESENTACION Y UNICIDAD.[1]

José A. Díez Calzada
U. Rovira i Virgili (Tarragona)

Vimos en la Parte I que los trabajos de Helmholtz, Hölder, Campbell y Stevens contienen los principales ingredientes para el análisis de las condiciones que hacen posible la medición (fundamental), pero, por así decir, a los primeros les falta lo que se encuentra en el último, y viceversa. Es preciso integrar esas dos líneas de investigación del modo adecuado. En esta segunda parte vamos a ver cómo se produce esta integración en el trabajo fundacional de Suppes, las extensiones y modificaciones que en torno a ese trabajo se generan y la teoría madura que de todo ello resulta.

7. El trabajo fundacional de Suppes.

Como hemos anunciado, el primero en integrar *del modo adecuado* las dos líneas de investigación anteriores es P. Suppes, en un artículo de 1951 donde sienta las bases de la teoría madura de la metrización, que lleva por título 'A Set of Independent Axioms for Extensive Quantities'. Nuestra afirmación de que es aquí donde confluyen las dos líneas anteriores es *a posteriori* y relativa "a la cosa misma", no a las intenciones del autor. Suppes no se propone explícitamente realizar tal integración, al menos nada dice que pueda sugerir tal cosa. Sin embargo, y fuera o no Suppes conscien-

[1] Este trabajo, así como la anterior parte I, ha sido posible gracias a la subvención de la DGICYT (MEC) al proyecto PB92-0846-C06-06.

Éndoxa: Series Filosóficas, nº 3, 1994, UNED, Madrid:
A.Díez Calzada: Introducción histórica a la teoría de la Metrización II.
pp. 31-71.

te de su lugar respecto de la investigación anterior, el trabajo que inicia en este artículo integra por primera vez los elementos antes dispersos.

En este artículo, Suppes declara pretender dos cosas: en primer lugar, encontrar un conjunto de condiciones (más débiles que, y que eviten los problemas de, las de Hölder) para que un dominio empírico tenga un morfismo o representación real; y, en segundo lugar, estudiar qué relación guardan entre sí todos los tales morfismos. Este primer trabajo se ocupa sólo de los dominios empíricos "aditivos" del tipo de los que hemos visto (magnitudes extensivas), pero permite una generalización natural, y así se hará, a otros tipos de dominios empíricos.

Las nociones primitivas son las de un dominio A de objetos, una relación Q binaria sobre A (cuya interpretación pretendida es "menor o igual en magnitud que") y una operación $\circ$ binaria sobre A (combinación o concatenación). Una estructura **E**=<A,Q,$\circ$> es un *sistema de magnitudes extensivas* syss satisface ciertos axiomas[2], entre ellos los de positividad, resolubilidad, arquimediano y la clausura de A bajo $\circ$ (entre otras consecuencias, se sigue que Q ordena débilmente A). Con Q se puede definir una relación C de coincidencia (semejanza, indiferencia): xCy syss_{def} xQy y yQx. C resulta ser una relación de equivalencia y el conjunto cociente A/C es por tanto una partición de A.

Suppes prueba dos cosas: (1) Si **E** es un sistema de magnitudes extensivas (s.m.e.), el sistema cociente bajo C, **E/C**, es isomorfo a un semigrupo aditivo de reales positivos; esto es, hay una función f de A/C *en* Re^+ tal que f es un isomorfismo de **E/C** en **N**=<Re^+,$\leq$,+>. (2) Si **E** es s.m.e., cualesquiera semigrupos aditivos de reales positivos isomorfos a él están relacionados mediante una transformación similar; esto es, si f y g son dos isomorfismos tales, hay a>0 tal que para toda clase de equivalencia [x] de A/C, f([x])=a$\cdot$g([x]). Al primero, que establece la existencia de una representación, se le llamará más adelante Teorema de Representación, y al

[2] Suppes 1951 p. 175 vers. cas.

segundo, que establece la relación entre las posibles representaciones (hasta qué punto o en qué sentido son únicas, cuál es la relación de equivalencia entre ellas), Teorema de Unicidad[3]. La condición de isomorfía no es aquí excesiva pues la representación se prueba de la estructura cociente, se asignan números a las *clases* de equivalencia de objetos. Es igual, y algo más natural pues al medir asignamos números a *objetos y no a clases*, exigir que el TR pruebe sólo la existencia de un homomorfismo entre el sistema empírico mismo (no su cociente) y el numérico. Esta versión será la que se impondrá.

Con el paso dado por Suppes se puede ahora atacar satisfactoriamente la cuestión de la admisibilidad de las transformaciones de una escala. Si f es una escala o representación para un sistema E, una función numérica es una transformación *admisible* para f syss el resultado de aplicarla a f, su composición, es también un homomorfismo de **E** en el mismo sistema numérico. Una escala será de tipo A si sus transformaciones admisibles son del tipo α. Así, para el caso visto, toda representación de un s.m.e. es una escala proporcional o de razón, pues se ha probado que sus transformaciones admisibles son todas similares. Ello, de paso, sugiere la cuestión de cómo han de ser otros sistemas para que sus representaciones sean escalas de los otros tipos vistos y si hay sistemas con representaciones de tipo todavía no conocido. En este marco, el trabajo iniciado por Stevens se revela esencial, pues los diferentes tipos de escalas muestran cuan fuertes son las diversas representaciones[4].

---

[3] Hasta donde conozco, el primer lugar donde se usa esta terminología, que se convertirá en estándar, es Suppes-Zinnes 1963.

[4] En la parte I utilizamos los términos 'asignación numérica' y 'escala' como sinónimos. Ahora podemos distinguir (como es usual en la literatura, ver p. e. Suppes-Zinnes 1963, donde por primera vez se formula explícitamente la diferencia) entre la asignación f de A en N y la escala, que es la terna <E,N,f>. Como ha quedado claro, el conocimiento de la asignación no basta para saber su unicidad, para ello es necesario conocer la escala, esto es, conocer además los sistemas en relación a los cuales la asignación es un homomorfismo. Una vez ha quedado claro este punto, y siempre que no produzca confusión, seguiremos permitiéndonos de momento el uso ambiguo del término.

Los teoremas vistos requieren algunas observaciones. En primer lugar, aunque en este caso son también necesarias, el TR prueba sólo que ciertas condiciones son suficientes para la existencia de un homomorfismo de **E** en **N**. Además, tales condiciones no son categóricas, pues tienen realizaciones tanto numerables como supernumerables. En tercer lugar, el TU afirma que cualesquiera dos homomorfismos de **E** en **N** están relacionados mediante una transformación similar, pero es inmediato ver que, además, cualquier transformación similar de un homomorfismo también es un homomorfismo. Así, conjuntamente con el TR, lo que se prueba es lo siguiente:

TRU Si **E** es un s.m.e. y **N** un sistema numérico *dado*, entonces hay f de A en Re^+ tal que para toda g de A en Re^+:
g es un homomorfismo de **E** en **N** si y sólo si g es una transformación similar de f.

Como se ve, el TRU tiene la forma característica de los teoremas de existencia unívoca: $\exists x \forall y\ (\psi(y) \leftrightarrow Rxy)$, donde R es una relación de equivalencia (si es la igualdad, la existencia es única). Por último, los teoremas prueban que toda representación de un s.m.e. es una escala proporcional, pero no que sólo las representaciones de los s.m.e. son escalas proporcionales. Por tanto, será interesante ver no sólo si otros sistemas tienen escalas de otros tipos, sino también si sistemas diferentes a los s.m.e. tienen representaciones proporcionales.

Los sistemas de Suppes eliminan algunas de las dificultades, relativas a su aplicabilidad empírica, de los de Hölder pero, como él mismo reconoce, no todas. El principal problema es que la condición de que A sea cerrado bajo $\circ$ implica, junto con otras condiciones, que el dominio de todo s.m.e. es infinito (y que hay entidades arbitrariamente grandes), lo cual "viola flagrantemente los requisitos finitistas obvios de la medición empírica"[5]. Hay otra

[5] Suppes 1951 pp. 183-184 (vers. cast.).

consecuencia que, si bien no tan patentemente indeseable como la anterior, Suppes piensa que es discutible en algunos casos: la relación de indiferencia C, definida a partir de Q, siempre es transitiva. Suppes afirma que puede haber casos en los que (quizás debido a límites en la sensibilidad de los procedimientos para determinar el orden) dos objetos coincidan con otro pero no entre sí[6].

Más adelante tendremos ocasión de discutir ambas cuestiones. Sólo mencionaré aquí que, poco tiempo después, en su famoso escrito *Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science,* Hempel destaca también que no se puede exigir que el dominio esté cerrado bajo la concatenación o combinación[7]. Hempel toma como primitivas dos relaciones P (de precedencia estricta) y C (de coincidencia) y la operación de combinación $\circ$. Las condiciones que se imponen a $\circ$ se han de considerar aplicables sólo a los objetos "cuya combinación exista y pertenezca al dominio"[8]. Hempel hace además dos observaciones de interés. Primera, debe haber objetos diferentes y coincidentes pues es necesario construir series estándar (combinación sucesiva de elementos coincidentes) y no todo procedimiento de concatenación permite concatenar un objeto consigo mismo. La segunda se refiere a lo que él llama 'condición de conmensurabilidad', según la cual todo objeto es tal que, o coincide con una concatenación finita de objetos semejantes al estándar elegido (esto es, con un término de la serie estándar), o una concatenación finita de objetos semejantes a él coincide con el estándar elegido. Esta condición se podría considerar empíricamente adecuada bajo ciertas idealizaciones, pero "consideraciones teóricas militan fuertemente en su contra, pues restringe los valores posibles de las magnitudes a los números racionales y es

---

[6] Ibid. p. 184.

[7] El trabajo de Hempel es un año posterior al de Suppes y, aunque le menciona en una nota (n. 71), no sigue su tratamiento. En particular, si bien hace consideraciones informales sobre la suficiencia de sus condiciones, en ningún momento se plantea las cuestiones de representación y unicidad al modo de aquel.

[8] Op. cit. p. 86.

de gran importancia para la teoría física que se admitan también valores irracionales"[9]. Para Hempel, ello prueba que la medición fundamental no provee de una definición completa, sino tan sólo parcial, de la magnitud, interpretación parcial que se ha de combinar, vía medición derivada, con la que proporcionan las leyes de la teoría.[10]

El trabajo de Suppes constituye el primer análisis satisfactorio (si ignoramos las insuficiencias mencionadas, que no tienen que ver con el tipo de análisis) de las condiciones que hacen posible la medición (fundamental) aditiva, suficiente, salvo escasas excepciones, para la física. Por otro lado, en la ciencia (principalmente en las ciencias humanas) se utilizan también escalas no proporcionales para medir ciertas magnitudes. La cuestión que surge inmediatamente es si el tipo de análisis desarrollado por Suppes es también adecuado para estudiar las condiciones que hacen posible esas otras formas de medición. Puesto que el planteamiento general de Suppes no parece depender de la naturaleza específica del sistema empírico ni del tipo de escala resultante, es natural pensar que la respuesta a tal cuestión es afirmativa. Durante los años cincuenta y principios de los sesenta aparecen toda una serie de trabajos destinados a mostrar que efectivamente así es. Con estos trabajos se extiende el núcleo formal original de la teoría de la metrización y se amplía el dominio de situaciones accesibles a la misma. Veremos primero cuál es el esquema general que hay tras el trabajo de Suppes y, después, algunas de las extensiones más destacadas.

8. Forma general del modelo de Suppes.

---

[9] Ibid. p. 68.

[10] Posteriormente, en Hempel 1958 (sec. 7, p. 62 y ss.), revisa esta conclusión y afirma que, si el lenguaje lógico subyacente es suficientemente potente (incluye, p.e.,los conceptos de secuencia y límite), sí es posible formamalmente definir los conceptos-functores métricos de modo que tengan valores irracionales. La discusión de esta cuestión y de sus consecuencias epistemológicas se sitúa en la perspectiva metateórica clásica de los dos niveles de lenguaje, observacional y teórico, de la que aquí no vamos a ocuparnos.

El esquema general de Suppes, culminación del de Hölder, es sencillo. Sea A un conjunto de objetos a los que se quiere asignar ciertos números que representen la "cantidad" de cierta magnitud que poseen. Los hechos relativos a la magnitud vienen expresados mediante ciertas relaciones empíricas $R_1,..., R_n$ (quizás algunas de ellas operaciones) entre los objetos. Como la magnitud se posee "según un más y un menos" alguna de tales relaciones será de (algún tipo de) orden. El dominio y las relaciones conforman un sistema empírico $\mathbf{E}=<A,R_1,...,R_n>$ que expresa lo esencial de la propiedad en tanto que magnitud. En la medición se asignan números (usualmente reales, si es que se les debe aplicar la matemática en toda su riqueza) a los objetos. Las relaciones (y operaciones) empíricas se representan mediante relaciones (y funciones) $S_1,...,S_n$ numéricas "naturales" que conforman con el conjunto N de números (N es Re o un subconjunto destacado suyo, como Re^+) un sistema numérico $\mathbf{N}=<N,S_1,...,S_n>$. Que las representan significa que en **N** se expresa con números lo que en **E** se expresa sin ellos, esto es, que **E** es homomorfo a **N**. Analizar cómo es posible la medición es entonces estudiar cómo es posible el homomorfismo, investigar las condiciones que ha de satisfacer **E** para que exista un homomorfismo de él en **N** y probar los teoremas de representación y unicidad.

En el Teorema de Representación se prueba que ciertas condiciones $Ax_1,...,Ax_p$ son suficientes para la existencia del homomorfismo, y en el Teorema de Unicidad la relación que guardan cualesquiera dos homomorfismos tales[11]. Conjuntamente considerados, lo que se debe probar es pues lo siguiente: Sea **E** un sistema empírico y **N** cierto sistema numérico (concreto). Si **E** satisface $Ax_1,...,Ax_p$, entonces hay f tal que para toda g, g es un homomorfismo de **E** en **N** syss g es una transformación .... de f (hay una función $F\in\mathbf{T}$ tal que $g=F\circ f$, donde **T** es un conjunto de

[11] El establecimiento de las condiciones y la prueba de los teoremas es una tarea puramente matemática. El que gran parte de los esfuerzos se centren en ella es lo que, al estudiar la literatura, produce la sensación de que la la investigación sobre metrización es propia de una teoría puramente matemática-algebraica.

funciones N en N, esto es, **T** es el tipo de transformación; el signo '$\circ$' denota aquí la composición de funciones).[12] Si un sistema empírico **E** concreto satisface las condiciones se puede proceder a (o, si ya existe, queda justificada y establecido el tipo de) la asignación-medición. La prueba de la parte existencial del teorema revela además cómo llevar (se ha llevado) a cabo la asignación.

Las relaciones y operaciones de **E** han de ser empíricamente realizables, aunque ello no importa a la parte puramente formal de la teoría. Las relaciones y funciones de **N** han de ser, por los motivos mencionados más arriba, "naturales".[13] Ello elimina cierto grado de arbitrariedad al eliminar posibles representaciones matemáticamente "extravagantes". Ahora bien, es importante destacar que no elimina toda arbitrariedad. En los teoremas se considera dado un sistema numérico **N**. Pero, ¿por qué ese? Quizás haya otros también "naturales" en relación a los cuales también existe un homomorfismo. De hecho, ya para el caso de los s.m.e. es inmediato ver la existencia de esta posibilidad (en ésta, como en muchas otras cuestiones, la medición aditiva es un caso paradigmático de la teoría). Los s.m.e. son homomorfos a $\mathbf{N}=\langle Re^+,\leq,+\rangle$, lo que permite encontrar representaciones f aditivas ($a\circ bCc$ syss $f(a)+f(b)=f(c)$[14]) que además son escalas proporcionales, únicas bajo transformaciones similares. Pero es inmediato que también son homomorfos a otro sistema numérico "natural" $\mathbf{N'}=\langle(1,\infty), \leq, \cdot\rangle$, pues **N** y **N'** son isomorfos (en un sentido, p. e., con la función $x \rightarrow e^x$, en el otro con la inversa $x \rightarrow \ln x$). Los s.m.e. tienen también entonces representaciones f "multiplicativas" ($a\circ bCc$ syss $f(a)\cdot f(b)=f(c)$). Estas representaciones son únicas bajo transformaciones exponenciales x^n ($n>0$) y son por tanto escalas

---

[12] Obviamente, la relación "g es una transformación ... de f" ha de ser siempre una relación de equivalencia. Ello supone que cada grupo T: (1) debe tener la función identidad, (2) si tiene cierta F debe tener otra F' tal que F compuesto F' es la identidad y (3) esté cerrado bajo la composición.

[13] Cf. parte I, aptd. 2.

[14] Si en lugar de 'C' (semejanza) se usara '=' (identidad), sólo valdría el sentido izquierdo.

proporcionales logarítmicas. No hay ningún motivo formal para elegir unas frente a otras, **N** frente a **N'**. Se trata de un elemento de arbitrariedad esencial, sólo eliminable por motivos pragmáticos de simplicidad (o históricos, que para lo que nos ocupa es lo mismo). Que los motivos de la elección, aunque desde luego importantes, sean pragmáticos y no formales, sugiere que, por lo que a los aspectos formales de la teoría se refiere, *la importancia recae totalmente en las condiciones que debe satisfacer el sistema empírico.*

Esta cuestión se tornará algo más complicada en cuanto contemplemos algunas de las extensiones del caso original. En algunos sistemas empíricos, las relaciones y/o operaciones no tienen una interpretación *inmediata* mediante una relación y/o función numérica *familiar* y comúnmente usada en el estudio algebraico de los reales. Esto es, aunque las relaciones y/o funciones empíricas cualitativas tienen interpretaciones numéricas, las relaciones y/o funciones reales que las interpretan (casi siempre combinaciones de otras más básicas) no son las que se contemplan en los sistemas numéricos bien conocidos de los que usualmente se ocupa el álgebra. En cierto sentido, ello no entraña mayor problema pues siempre será posible definir relaciones matemáticas, abreviaturas de una combinación de otras básicas, con las que formar sistemas numéricos en relación a los cuales probar la existencia de un homomorfismo. Pero, en otro sentido, esta estrategia es algo artificial, al no ser los sistemas numéricos así obtenidos los "usuales". Por ello, aunque siempre es posible formular el teorema de representación en la forma en que asevera la existencia de un homomorfismo del sistema empírico en otro numérico, hacerlo siempre en esta forma resulta a veces algo forzado.

La forma más general del teorema, del que la versión con homomorfismo es un caso especial, sería la siguiente: "Sea **E**=<A, R_1, ..., R_n> un sistema empírico. Si **E** satisface $Ax_1,...,Ax_p$, entonces hay f tal que para toda g $\phi(g,A,N,R_1,...,R_n,S_1,...,S_k)$ (donde N es un conjunto numérico y las S_i relaciones numéricas "típicas") syss g es una transformación .... de f". Pero, ahora, para impedir que la representación numérica sea extravagante hay que exigir que ϕ no sea muy complicada y que las S_i sean, además de simples, relativamente básicas, exigencias con un grado de vaguedad considerable. Como antes, nos encontramos con el problema de representaciones alternativas: si el teorema es cierto para cierta ϕ puede serlo también para otra ϕ' resultado de sustituir una o varias S_i por otra(s) S_i' y otro tipo de transformación. Pero quizás se agrava pues, al no tener ϕ necesariamente la forma "g es un homomorfismo....", ¿donde está el límite de "extravagancia" para la forma de ϕ?[15] La primera de las extensiones del modelo básico ilustra esta cuestión, aunque su escasa complejidad en este caso permite reconvertirla muy fácilmente.

9. Extensiones.

El modelo general de análisis que hemos visto para los s.m.e. fue extendido durante los cincuenta y principios de los sesenta a otros sistemas empíricos. No vamos a ocuparnos aquí de todas las extensiones sino sólo de las primeras y más importantes. Además, el tratamiento de las mismas no será exhaustivo pues sólo nos interesan de momento sus aspectos más generales.

9.1. La primera extensión a considerar es la correspondiente a los *sistemas de diferencias*[16]. Para algunas magnitudes (como la temperatura termométrica) los procedimientos *directos* de comparación *entre dos objetos* que la poseen dan lugar sólo a escalas ordinales. El motivo fundamental es que no existe para ellas un procedimiento empírico de concatenación que corresponda a (con las

---

[15] En realidad no se agrava, sólo se muestra más claramente su gravedad pues, después de todo, "E es homomorfo a N" es *ya* una mera abreviatura de "hay f de A en N tal que etc.".

[16] Los primeros trabajos en esta dirección son Suppes-Winet 1955, Davidson-Suppes 1956, Suppes 1957 (cap. 12) y Scott-Suppes 1958. Cf., también, Debreu 1958 y Luce-Suppes 1965.

propiedades de) la adición. Sin embargo, si se cumplen ciertas condiciones, es posible encontrar para ellas representaciones más fuertes que las meras escalas ordinales, aunque no tan fuertes como las escalas proporcionales. Lo que permite tales representaciones es (la existencia y ciertas propiedades de) un procedimiento directo de comparación de *pares de objetos*. No se compara un objeto con otro sino un par de ellos con otro par. Los pares representan intervalos de la magnitud para los objetos en cuestión. La relación de orden primitiva no es entonces una binaria sobre A sino una relación tetrádica D sobre AxA. La interpretación pretendida de (ab)D(cd) es que b excede en la magnitud a a en menor o igual grado en que d excede a c (esta comparación es *directa*, no se basa en una comparación previa entre a y b por un lado, y c y d por otro).

Se puede probar (TR) que si un sistema empírico <A, D> (con D sobre AXA) satisface ciertas condiciones, entonces hay una función f de A en N (usualmente Re) tal que (ab)D(cd) syss $f(a)-f(b)\leq f(c)-f(d)$, y (TU) que tal función es única bajo transformaciones lineales, es una escala de intervalos. La clave está en que para los intervalos es posible definir naturalmente una operación de concatenación $\circ$ que junto con D y AxA forma un s.m.e.[17] (cuando los intervalos tienen extremos coincidentes $\circ$ es inmediata: $(ab)\circ(bc)=(ac)$; si no los tienen es algo más complicado pero igualmente posible). De la escala proporcional para pares de objetos se deriva fácilmente una escala de intervalos para los objetos.

Esta caracterización es excesivamente general, además de inapropiada por uniforme pues los sistemas de diferencias se subdividen a su vez según sean o no finitos, absolutos, positivos o igualmente espaciados. Aunque no es el momento de entrar en complicaciones adicionales, la idea general es la siguiente. En estos sistemas los pares (ab) expresan la diferencia en magnitud, pero esa diferencia cualitativa se puede expresar numéricamente de

[17] La idea se remonta a Hölder 1901.

diversos modos segun cuales sean las propiedades del sistema empírico. Cada par (ab) se representa mediante un número G(f(a),f(b)), donde f asigna entidades matemáticas a los objetos y G es una función matemática de medida de diferencias. La representación debe probar entonces que hay f y G tales que (ab)D(cd) syss G(f(a),f(b))≤G(f(c),f(d)). Distintos sistemas de diferencia pueden requerir diferentes "funciones de medida de difrencia G" (en el caso más simple G es la resta, pero en otros casos puede ser el valor absoluto de la resta, o incluso algo más complicado, como la norma de un vector, si los objetos son factoriales, etc.).

Los sistemas de diferencias ilustran la cuestión con la que concluimos el subapartado anterior. En la metrización diferencial, como acabamos de ver, no se prueba exactamente que cierto sistema empírico que satisface ciertas condiciones es homomorfo a otro numérico dado. Se prueba la representación probando cierto hecho ϕ entre el sistema empírico y relaciones y funciones matemáticas. No es un caso demasiado problemático pues la simplicidad (y "naturalidad") en este caso de ϕ permite reconvertir el TR inmediatamente a la versión-homomorfismo. Si definimos una relación numérica tetraádica S sobre RexRe tal que (xy)S(zt) syss x-y=z-t, entonces el TR prueba la existencia de un homomorfismo entre un sistema empírico <A,D> y el sistema numérico N=<Re,S>. Pero quizás en otros casos la reconversión no resulte tan natural.

9.2. La segunda extensión surge en relación a una de las limitaciones que, como vimos, tenían para Suppes sus s.m.e., a saber, que la relación inducida de coincidencia o indiferencia es siempre transitiva. En algunas situaciones la relación de indiferencia no es perfectamente transitiva y ello no impide sin embargo su representación numérica. Para ellas, exigir que la relación de orden primitiva sea un orden débil (no estricto), esto es, fuertemente conexa y transitiva, es inapropiado. En estas situaciones el orden es todavía más débil (valga la redundancia), es lo que se conoce como *semiorden*[18]. La interpretación pretendida de una relación de semiorden P es "... es ostensiblemente (*noticeably*) mayor[19] que..." y sus condiciones formales son las siguientes[20]: (1) no xPx; (2) si xPy y zPw entonces xPw o zPy; (3) si xPy y yPz entonces wPy o zPw. Los semiórdenes (que siempre son estrictos) están entre los órdenes parciales y los débiles (ambos estrictos), todo orden débil estricto es un semiorden y todo semiorden es un orden parcial estricto.[21] La relación I de indiferencia que se define de forma natural a partir de P (xIy syss_{def} no xPy y no yPx) no es de equivalencia al no ser transitiva; sin embargo, con P se pueden definir también una relación E de equivalencia y otra R de orden débil útiles para probar la representación.

La representación de los semiórdenes es peculiar, pues lo que se prueba es que si un sistema empírico[22] **E**=<A,P> es un semiorden, entonces hay f de A en Re tal que aPb syss para algún $\delta>0$ $f(a)>f(b)+\delta$, esto es, **E** es homomorfo a *algún* sistema numérico **N**=$\langle Re,>_{\delta}\rangle$ con $\delta>0$ (donde: $x>_{\delta}y$ syss_{def} $x>y+\delta$). La unicidad de la representación no es clara pues tampoco lo es el tipo de transformación que da lugar a un homomorfismo en *el mismo* sistema numérico (esto es, para *la misma* δ).

---

18 El primer lugar donde se introduce la noción de semiorden es en Luce 1956, simplificada posteriormente en Scott-Suppes 1958. Krantz (1967) la aplica a sistemas extensivos (y "sofistica" la representación con dos entornos, uno superior y otro inferior). En Adams 1965 se estudia la intransitividad de los sistemas comparativos, tanto ordinales como de intervalos y extensivos, aunque desde una perspectiva diferente.

19 En este apartado venimos usando el sentido inverso -menor (o igual) que- para referirnos a los órdenes. Aunque en los estudios sistemáticos es conveniente usar siempre el mismo modo de referirse a ellos, para la actual finalidad historiográfica me atengo al modo de referencia presente en las fuentes.

20 Scott-Suppes 1958 p. 51 (obviamente se han de considerar clausuradas universalmente).

21 Un orden débil estricto es asimétrico y negativamente transitivo (si no xRy y no yRz entonces no xRz).

22 Suppes-Zinnes lo prueban para sistemas finitos y dejan abierta la cuestión para los infinitos (cf. Suppes-Zinnes 1963 pp. 31-34); pero no es éste el punto en que quiero insistir ahora.

Los sistemas de semiorden se introducen para dar cuenta de la medición en circunstancias en que el orden no es perfectamente transitivo. Hay que preguntarse sin embargo si todas los casos de intransitividad de la semejanza o indiferencia son del mismo tipo y merecen el mismo tratamiento. Puede ser que algunos se deban "a la propiedad misma" (p.e., comparación de la utilidad subjetiva mediante preferencias) mientras que otros se deben sólo a los límites de precisión de los instrumentos de comparación (p. e., comparación de la masa mediante balanza). Si realmente hubiera motivos de peso para distinguir ambos casos, entonces pudiera ser que el expediente de los semiórdenes fuese adecuado para el primer caso pero no para el segundo, cuyo análisis correspondería más bien al estudio de las idealizaciones y del problema del error.

9.3. Otro tipo de sistemas son los destinados a dar cuenta de la medición de la probabilidad.[23] En el caso más simple, probabilidad incondicionada, las condiciones se refieren a un orden R sobre un conjunto F que es a su vez un álgebra (o una σ-álgebra) de conjuntos sobre un conjunto A[24]. Los objetos a los que se asignan números son los elementos de F, usualmente interpretados como eventos. Las condiciones que ha de satisfacer el sistema <A,F,R> han de garantizar la existencia de una función f de F en [0,1] que cumpla los axiomas de Kolmogorov, esto es, tal que <A,F,f> sea un espacio de probabilidad (finita o enumerablemente, según F sea un álgebra o una σ-álgebra) aditivo. La representación f ha de ser

[23] Los trabajos en este campo se remontan a de Finetti 1937. Las condiciones que ahí se presentan sólo caracterizan la probabilidad cualitativamente, no son suficientes para garantizar una medida (cuantitativa) de la misma. Condiciones suficientes para ello, cuando el conjunto base es finito, se ofrecen en Kraft-Pratt-Seidenberg 1959, simplificadas en Scott 1964. Estas condiciones tienen algunos aspectos poco deseables (cf. Roberts 1979a, pp. 392-392). Otras condiciones menos problemáticas, inspiradas en Savage 1954, se ofrecen en Luce 1967 (para la probabilidad incondicionada) y Luce 1968 (para la condicionada); otros trabajos de interés son Luce-Suppes 1965 y Suppes 1969.

[24] F es un álgebra de conjuntos sobre A syss es una colección de subconjuntos de A cerrada bajo complemento y unión; si está cerrado bajo uniones contables es entonces una σ-álgebra.

además una escala absoluta, su grupo de transformaciones es la identidad, cualesquiera dos representaciones son idénticas.

A diferencia de otros sistemas, cuyo nombre no refiere a ninguna magnitud específica, los sistemas de probabilidad parecen destinados a dar cuenta de las condiciones que hacen posible la medición de un magnitud determinada, la probabilidad[25]. Ello no plantea ningún problema pues, después de todo, sólo significa que el establecimiento de este tipo de sistemas ha surgido con motivo del análisis de cierta magnitud concreta. Pero es importante dejar abierta la posibilidad teórica de que estos sistemas, sus mismas condiciones formales, sean aplicables a otras magnitudes. Cuál sea la magnitud a medir no es algo que pueda determinar el conjunto de condiciones que definen el sistema sino los procedimientos empíricos concretos mediante los que se establece el orden sobre el dominio básico. Otra cosa es que, como cuestión de hecho, tales condiciones las satisfaga únicamente un procedimiento empírico.

Los sistemas de probabilidad ejemplifican, mejor que los de diferencia, la cuestión a que nos referíamos más arriba relativa a la forma del TR. En este caso sería absolutamente forzado presentar tal teorema como afirmando la existencia de un homomorfismo entre un sistema empírico y otro numérico dado. Como veremos, las siguientes modificaciones confirmarán nuevamente este punto.

---

[25] Aunque la naturaleza de la probabilidad ha sido objeto de innumerables discusiones en filosofía de la ciencia, no nos detendremos aquí en las diversas interpretaciones de la misma, tanto en su sentido objetivo como en el subjetivo. La mayoría de los trabajos sobre medición de la probabilidad se refieren principalmente a la probabilidad subjetiva o psicológica pero las condiciones formales de estos sistemas no dependen de ello. Si se trata de probabilidad subjetiva u objetiva dependerá de la naturaleza específica de los procedimientos para establecer el orden R sobre F (juicios de los sujetos, frecuencias observadas, etc.).

9.4. La siguiente modificación del modelo original corresponde a lo que se conoce como *medición conjunta*[26]. La modificación pretende dar cuenta de situaciones en las que se miden simultáneamente dos atributos. En estos casos, los procedimientos de comparación dan lugar a un orden entre pares de objetos, cada uno de los cuales se considera exhibe uno de los dos atributos. El orden entre pares de objetos no se deriva pues de dos órdenes (entre cada componente del par) ya conocidos, y la asignación de un número a cada par no se obtiene combinando asignaciones *ya disponibles* para cada miembro del par, sino que se obtienen *a la vez* las asignaciones para el par y para cada uno de los componentes, esto es, se mide simultáneamente el compuesto y cada componente. No se trata pues en principio de un caso de medición derivada.

La metrización conjunta analiza las condiciones que hacen posible tal tipo de medición. Los sistemas empíricos están constituidos en este caso por dos conjuntos A_1, A_2 y una relación (de orden) R entre pares de elementos de ambos, esto es, sobre $A_1 x A_2$. La interpretación pretendida de $\langle ap \rangle R \langle bq \rangle$ es que la "conjunción" de los atributos en a y p excede o iguala a la de b y q. Las condiciones que se buscan para que el sistema $E=\langle A_1,A_2,R \rangle$ sea representable no son sólo las que hacen posible la existencia de una función f de $A_1 x A_2$ en cierto N tal que $\langle ap \rangle R \langle bq \rangle$ syss $f(\langle ap \rangle) \geq f(\langle bq \rangle)$. Si así fuera, no estaríamos ante un caso diferente de (alguno de) los anteriores. Lo característico de este caso es que la representación se hace "a través de, pero simultáneamente con" asignaciones sobre los A_i. Las condiciones han de ser tales que si **E** las cumple, entonces hay f_1 de A_1 en N, f_2 de A_2 en N y F de NxN en N tal que $f(\langle ap \rangle)=F(f_1(a),f_2(p))$, esto es, $\langle ap \rangle R \langle bq \rangle$ syss $F(f_1(a),f_2(p)) \geq F(f_1(b),f_2(q))$. La principal exigencia que se suele

---

[26] Su origen se remonta a diversos análisis de la utilidad llevados a cabo durante la primera mitad de siglo en teoría económica. Algunos resultados formales importantes, aunque desde un enfoque diferente del que aquí nos ocupa, se encuentran en Adams-Fagot 1959 y Debreu 1960. El primer estudio en el marco de la teoría de la metrización es Luce-Tukey 1964, modificado posteriormente en algunos aspectos en Krantz 1964, Luce 1966 y Tversky 1967.

imponer es que los atributos sean independientes, en el sentido de que si dos pares con algún componente común guardan cierta relación, también la guardan al poner como común cualquier otro elemento: si $\langle ap\rangle R\langle bp\rangle$ para algún p de A_2, entonces $\langle ap\rangle R\langle bp\rangle$ para todo p de A_2 (y lo mismo con A_1). Si se satisface la independencia es posible definir relaciones R_i sobre los A_i que son también órdenes, las cuales posibilitarán (si se cumplen otras condiciones) la existencia de las f_i para la representación. Otra condición clave es la *resolubilidad relativa*, que permite encontrar para los elementos de un componente su "equivalente" o proyección en el otro y para cada par en cada una de las componentes.

Tal como hemos presentado la representación buscada, el problema de sus condiciones de posibilidad parece casi trivial pues no se exige nada de la función F.[27] En realidad, las representaciones que se buscan son para casos concretos de F. El primero que se estudió fue aquel en F es la suma. A los sistemas para los que esta representación es posible se les llama 'estructuras conjuntas aditivas' (*additive conjoint structures*[28]). Si un sistema $E=\langle A_1xA_2,R\rangle$ satisface las condiciones que definen a las estructuras conjuntas aditivas, entonces (TR) hay f_1 de A_1 en N y f_2 de A_2 en N tales que $\langle ap\rangle R\langle bq\rangle$ syss $f_1(a)+f_2(p)\geq f_1(b)+f_2(q)$, y (TU) el mismo bicondicional es cierto para cualesquiera transformaciones lineales de f_1 y f_2 con el mismo coeficiente, esto es, bajo transformaciones $ax+b_1$ y

---

27 De todos modos, incluso si no se exige nada a F, la cuestión no es trivial. La exigencia de que en la representación entre sólo una función para cada componente es ya restrictiva, hay sistemas que no la cumplen (cf., a este respecto, *Foundations* I, p. 248). En Tversky 1967a se estudian algunas propiedades generales para los casos en que F sea polinómica simple.

28 La expresión castellana 'estructura conjunta' suena peor que su original inglés, pero no encuentro una traducción mejor (después de todo quizás se trate sólo de que en inglés me resulta más familiar, aunque ignoro cómo suena en inglés coloquial).

$ax+b_2$ $(a>0)$ respectivamente (las f_i son escalas de intervalos que guardan cierta relación).[29]

Las estructuras aditivas son sólo un tipo de estructuras conjuntas. Cada tipo de representación conjunta viene caracterizado por una F específica ($x+y$, $x-y$, $x \cdot y$, $(x \cdot y^2)/2$, ...) y los diferentes grupos de condiciones que hacen posible los diferentes tipos de representación definen diferentes tipos de estructuras conjuntas. Ello exige cierta cautela, pues permite presentar (ficticiamente) algunos casos de representaciones independientes aunque relacionadas como casos de representación conjunta. Supongamos que tenemos dos magnitudes m_1 y m_2 con representaciones independientes f_1 y f_2 (p. e., masa m y velocidad v). Podemos definir entonces una nueva función $f=F(f_1,f_2)$ para cierta F (p. e. momento=$m \cdot v$, energía cinética=$(m \cdot v^2/2)$. Formalmente parece que se puede reconstruir esta situación como un caso de medición conjunta cuyas condiciones debemos buscar.[30] Siempre se puede dar un sistema $E=\langle A_1,A_2,R\rangle$ que permita la representación. Pero el expediente es un tanto ficticio a menos que se pueda determinar la relación R *previamente* sin ayuda de los órdenes que posibilitan f_1 y f_2. Si ello no es posible, el tipo de situación descrita corresponde más bien a un caso de medición derivada, del que quizás sea importante estudiar el alcance de su semejanza con la medición fundamental conjunta.

Por otro lado, no está claro que los atributos que se miden simultáneamente en la medición conjunta sean siempre diferentes. Puede ocurrir a veces que se trate del mismo atributo en pares de objetos de diferente tipo. Por ejemplo, si A_1 son cantidades de dinero y A_2 son bienes de consumo (o, en general, dos tipos dife-

[29] Por consideraciones semejantes a las que vimos en los s.m.e., es obvio que las estructuras conjuntas aditivas tienen además representaciones "multiplicativas" (hay f_1'...f_2'... tales que ..... syss $f_1'(a) \cdot f_2'(p) \geq f_1'(b) \cdot f_2'(q)$) únicas bajo transformaciones a_1x^n y a_2x^n $(a_i>0,\ n>0)$ (las f_i' son escalas de intervalos logarítmicos).

[30] En *Foundations* 1, p. 246 y 267 se presenta el caso como un ejemplo de medición conjunta. Más adelante, sin embargo, los autores hacen algunas consideraciones semejantes a las nuestras (p. 277).

rentes de bienes de consumo) y R una relación de preferencia, f_1 y f_2 miden la utilidad de los objetos de cada tipo y $f=F(f_1,f_2)$ (para cierta F de Re^2 en Re) la utilidad de pares de objetos. No está claro en este caso si las diferentes utilidades son atributos diferentes. Quizás lo natural sería considerar que F expresa una ley que relaciona las utilidades de objetos de diferente tipo, que relaciona la utilidad de los componentes con la del compuesto.

Esto sugiere otra precaución ante casos ficticios de medición conjunta. Si tenemos un dominio de objetos concatenables, se podría interpretar la concatenación de dos objetos como un par de objetos a medir conjuntamente. Por ejemplo, se puede probar que si $\langle A, Q, \circ \rangle$ es un s.m.e. entonces $\langle AxA,R \rangle$, con R definida tal que $\langle xy \rangle R \langle zw \rangle$ syss $x \circ y$ es mayor o igual, según Q, que $z \circ w$, es una estructura conjunta aditiva.[31] Pero parece claro que hablar en un caso así de medición conjunta es artificial.

9.5. La siguiente modificación del modelo original tiene que ver con el sistema matemático sobre el que se realiza la representación. Hasta ahora, las entidades matemáticas asignadas a los objetos (simples o complejos) empíricos eran siempre números. Vimos sin embargo que ya Helmholtz había llamado la atención sobre ciertos casos en los que una misma operación de combinación física daba lugar a la conjunción simultanea de diversas magnitudes, y que mencionaba como ejemplos típicos las "magnitudes" vectoriales, tomando cada uno de los componentes del vector como una magnitud en sí misma. Estos casos corresponden a lo que en el contexto en que ahora nos encontramos se llama 'representación multidimensional'.[32]

---

[31] Esta posibilidad ya ha sido contemplada en la literatura, informalmente en Luce-Tukey 1964 (sec. VII) y, formalmente, en Narens 1985 (p. 274.; ver también *Foundations* 3, p. 81).

[32] Hasta donde conozco, el primer lugar en que se estudia, aunque muy someramente, la representación multidimensional desde la presente perspectiva es Suppes-Zinnes 1963 (pp. 47-48). El análisis que ahí se presenta surge de reinterpretar vectorialmente la representación numérica de ciertos sistemas de preferencia de Coombs (cf. Coombs 1950 y 1960, Bennet-Hays 1960).

En la representación multidimensional, las entidades matemáticas asignadas a los objetos son vectores n-dimensionales (el caso n=1 corresponde a la representación numérica usual). Las estructuras matemáticas son sistemas numéricos n-dimensionales **V** (vectoriales) con un dominio V de vectores de dimensión n y ciertas relaciones y/o funciones sobre V.[33] El esquema formal de la representación no varía: si **E** es de cierto tipo, entonces es homomorfo a cierto sistema **V** concreto; en general (si las relaciones y/o funciones vectoriales no son las típicas de los espacios vectoriales usuales), si **E** satisface determinadas condiciones, hay f de A en un conjunto de vectores V tal que cierto estado de cosas empírico entre objetos de A ocurre syss ocurre cierto estado de cosas (vectorial) entre sus imágenes.

9.6. El último grupo importante de modificaciones tiene que ver con la operación empírica de combinación $\circ$. Vimos que en los s.m.e. se exige que A esté cerrado bajo $\circ$ y que esta exigencia (con otras razonables) tiene la desagradable consecuencia de que no hay s.m.e. finitos. Para que los sistemas extensivos puedan ser finitos hay que debilitar sus condiciones, en particular la clausura bajo $\circ$. Ello se puede hacer básicamente de tres modos. Podemos[34] sustituir, en **E**, $\circ$ por un conjunto F (cerrado bajo unión y complemento) de subconjuntos de A y la relación Q sobre A por otra R sobre F. La idea es tomar como objetos para la asignación los elementos de F (F tiene siempre la "concatenación" {x,y} de dos objetos {x}, {y} que estén en él). Si un sistema tal satisface ciertas condiciones (que no implican que hay necesariamente infinitos

[33] Obviamente las funciones han de ser internas (operaciones como el producto escalar o la norma no pueden representar operaciones empíricas entre objetos a los que se les asigna vectores).

[34] Hasta donde conozco, el primer lugar donde se presentan los sistemas extensivos de este modo es Adams 1965 (en pp. 207-208 discute los motivos). Otros lugares donde se sigue esta idea son Krantz 1967 y Suppes 1969 pp. 4-8 y 1972 pp. 186-188 (v. c.). Como el lector apreciará, los sistemas empíricos aquí son del mismo tipo de los que vimos anteriormente para los sistemas de probabilidad. Adams y Krantz no vinculan los dos tipos de sistemas, Suppes sí.

objetos) es posible encontrar la representación aditiva buscada $f(\{x,y\})=f(\{x\})+f(\{y\})$ (en general, para A, B en F con $A\cap B=\emptyset$, $f(A\cup B) = f(A)+f(B)$. Otra posibilidad[35] es sustituir $\circ$ por una relación ternaria que sea función pero no necesariamente definida sobre todo A y dar condiciones adecuadas para que exista la representación. El tercer modo[36], próximo al anterior, consiste en mantener $\circ$ en el sistema pero relativizar sus condiciones a un subconjunto B de AxA que contiene los pares de elementos cuya concatenación existe.

Estas modificaciones ilustran de nuevo el comentario que hicimos más arriba sobre la forma en que se formula el TR. Es claro que presentar para (algunos de) estos sistemas la posibilidad de la representación como la de un homomorfismo en un sistema numérico es, por lo artificial del sistema numérico requerido, absolutamente forzado. Para casos como estos es más natural presentar el TR en su forma general, a saber, si el sistema empírico cumple ciertas condiciones entonces hay una asignación de la que es verdadero cierto enunciado ("natural") sobre las relaciones empíricas, la asignación y ciertas relaciones matemáticas.

La exigencia de clausura bajo $\circ$ es inadecuada para dar cuenta de muchas situaciones empíricas, de ahí la necesidad de las modificaciones vistas. Pero el que la mayoría de los casos de conjunción aditiva requieran tal debilitamiento no implica que la condición de clausura sea siempre inadmisible. Antes al contrario, hay situaciones en que no sólo no es inadecuada sino que es necesaria. Tal es el caso de magnitudes "periódicas", como el ángulo. Las condiciones que se deben satisfacer para que sea posible la representación apropiada en estos casos definen un nuevo tipo de sistemas, las estructuras *extensivas cerradas periódicas*.[37] La representación en este caso es periódica en un entorno o ciclo, y "aditiva" si tomamos la adición en sentido modular:

---

[35] Sugerida en Suppes-Zinnes 1963 (p. 45) y desarrollada en Luce-Marley 1969.

[36] Esta es la vía que se seguirá en *Foundations* (cf. vol. 1, sec. 3.4.).

[37] Cf. Luce 1971.

$f(a \circ b)=f(a)+_\alpha f(b)$ (con $x+_\alpha y=z$ $syss_{def}$ hay n entero tal que $x+y=n\alpha+z$, esto es, z es el resto de x+y entre α).

Otro tipo de sistema extensivo, las *estructuras con máximo esencial*[38], corresponde a los casos en que la concatenación (no cerrada) tiene un elemento límite o maximal, esto es, hay un objeto tal que nunca es superado por la concatenación de otros (p. e., velocidad relativista).

En los dos últimos casos, la representación, aunque conserva cierto aire de aditividad, no es aditiva (para todo a b, $f(a \circ b)=f(a)+f(b)$). Ellos son sólo algunos de los sistemas con representaciones esencialmente no aditivas ($f(a \circ b)=F(f(a),f(b)$, donde F no es la suma).[39] Diferentes condiciones para la combinación física $\circ$ dan lugar a otros sistemas no aditivos. En especial son interesantes los casos en que $\circ$ no es positiva sino idempotente ($a \circ a$ coincide con a) e "interna" (si a y b no coinciden, su combinación está entre ambos).[40]

Hasta ahora la operación $\circ$ se ha interpretado siempre como combinación física (aunque no remede la adición numérica, o incluso si ni siquiera es positiva). Sin embargo, puede haber casos de operaciones sobre el dominio de objetos básico que sean empíricamente significativas, que posibiliten representaciones interesantes, pero que no se pueden interpretar como combinación de objetos en ningún sentido razonable del término. Un caso típico en que se da esta situación son los *sistemas de bisección (o bisimétricos)*.[41] En tales sistemas la interpretación pretendida de $a \circ b$ es la

---

[38] Cf. Luce-Marley 1969. En estos sistemas el axioma arquimediano debe ser relativizado a elementos no maximales.

[39] "Esencialmente" pues, como vimos, hay sistemas (p. e., los s.m.e.) con representaciones tanto aditivas como no aditivas. Otro caso típico de representación esencialmente no aditiva corresponde a la combinación de resistencias en paralelo, para el cual F es $x \cdot y/x+y$.

[40] Como ocurre con la "combinación" de temperaturas y densidades.

[41] El método de bisección tiene una larga tradición en psicofísica. Pfanzagl (1959) introduce, reformulando ciertos resultados de Aczél (1948), las operaciones bisimétricas (de las que la el procedimiento psicofísico de bisección es un caso) y las estructuras correspondientes.

de "el punto medio entre a y b" (p. e., se le pide al sujeto que elija un estímulo equidistante de dos dados). La representación en estos casos adquiere una forma bastante compleja y, de nuevo, resulta completamente antinatural presentarla como la posibilidad de un homomorfismo en un sistema numérico dado.

Estas son las principales modificaciones del modelo original. La revisión ha sido muy superficial y esquemática pues cada una da lugar a toda una familia de casos de complejidad creciente y existen además casos mixtos o cruzados. No entraremos sin embargo ahora en estas complicaciones adicionales, lo visto será suficiente para nuestros actuales fines introductorios antes de abordar la teoría madura.

10. La teoría madura.

La investigación sobre medición cristaliza en una serie de obras que aparecen a partir de finales de los sesenta, la mayoría de las cuales recogen, ordenan y, en algunos casos, amplían los resultados anteriores. La más importante de todas es sin duda alguna *Foundations* (1971, 1989 y 1990, respectivamente cada uno de sus tres volúmenes). Otras que se ocupan también de las condiciones que hacen posible la medición fundamental son Ellis 1966, Pfanzagl 1968, Roberts 1979a, Berka 1983, Kyburg 1984 y Narens 1985.[42] No vamos, por supuesto, a hacer un resumen, ni siquiera breve, de ellas, cuyo interés para lo que aquí nos ocupa es además variable. Nos limitaremos a señalar los aspectos más destacados que puedan tener importancia a la hora de llevar a cabo la reconstrucción.

Basic Concepts of Measurement, de B. Ellis, es una de las pocas obras sobre medición de orientación más filosófica que matemática. El objetivo general de Ellis en esta obra es atacar cierta concepción

[42] Además de *Foundations*, las de Roberts y Narens se dedican casi exclusivamente a la metrización fundamental. En las restantes, el tratamiento de este tema es parte de un análisis más amplio de la medición.

metafísica realista de las magnitudes argumentando en favor del carácter *esencialmente relacional* de los conceptos métricos.[43] No es ahora el momento de discutir esta cuestión, pero algunos comentarios que hace en relación a ella son de interés para el análisis de la metrización fundamental.[44] Ellis sostiene (p. 32) que es el orden el que provee de criterios de identidad para las magnitudes, que varios procedimientos lógicamente independientes de ordenación pueden corresponder a la misma magnitud (generar el mismo orden) y que, por tanto, los conceptos métricos son "conceptos racimo" (*cluster concepts*) no definibles por referencia a procedimientos particulares de ordenación. Si ello es así, hay entonces en la medición una mayor arbitrariedad de la comúnmente admitida; p. e., para las magnitudes extensivas, su arbitrariedad no se limita sólo a la elección de la unidad pues hay escalas para ellas no relacionadas mediante una transformación similar. El motivo es que pueden existir diferentes modos de combinación aditiva para una misma magnitud.

Campbell, como vimos, había señalado que tanto la combinación en serie como en paralelo de espirales son aditivas, pero lo son respecto a órdenes diferentes (en este caso conversos), y son por tanto combinaciones aditivas de magnitudes diferentes (aunque relacionadas). Ellis presenta un caso en el que dos modos diferentes de combinación son aditivos en relación con el mismo orden y por tanto, según él, para la misma magnitud.[45] El ejemplo que ofrece se refiere a la longitud. Sea $\circ$ la combinación usual de varas, en línea y coincidente. Sea $\circ'$ su combinación ortogonal,

---

43 Recientemente (Ellis 1987) ha abandonado esta posición y pasado a defender cierto tipo de realismo metafísico acerca de "propiedades cuantitativas" semejante al de Swoyer 1987 (cf., también, Forge 1987b y Armstrong 1987 y 1988).

44 Los comentarios que nos interesan los había avanzado anteriormente en Ellis 1960.

45 1966 pp. 79 y ss.; cf. también Ellis 1960 pp. 44-46.

en ángulo recto y coincidente.[46] Sea R el orden usual: aRb syss puestos sus orígenes y extremos sobre una recta, si los orígenes coinciden el extremo de b coincide o es posterior al de a. Pues bien, un dominio de objetos con el orden R forma un sistema extensivo tanto con $\circ$ como con $\circ'$, para ambos sistemas hay representaciones f y f′ ambas aditivas (las asignaciones a las resultantes son la suma de las asignaciones a las componentes), pero no relacionadas por una transformación similar, f′ no es proporcional a f sino a f^2.[47] Para Ellis la magnitud involucrada es la misma, al serlo el orden, a saber, la longitud, y tenemos por tanto dos escalas *de longitud* no proporcionales.[48] El modo (aditivo) de combinación representa un elemento de arbitrariedad ineliminable. La elección de uno de los modos (de uno de los tipos de escala) sólo se puede basar en motivos de simplicidad, pues toda la física se podría reescribir con f′, *la única* diferencia sería en complejidad.[49]

Ellis destaca también otra cuestión que, por tener que ver más con la medición que con la metrización, sólo mencionaremos.[50] Una vez elegido el modo de combinación, para proceder a la medición hay que elegir el estándar. En general se considera que la elección del estándar es aproblemática, pero ello no es en

[46] La "vara resultante" en este caso no es recta, pero no importa; si se exige que sean rectas, se puede considerar que la resultante es la recta que une el origen de una con el extremo de la otra, esto es, la diagonal de la resultante en el anterior sentido.

[47] Con $\circ$ hay función f tal que $f(a\circ b)=f(a)+f(b)$ y con $\circ'$ hay también una f′ tal que $f'(a\circ' b)=f'(a)+f'(b)$. Lo que se prueba es que para todo objeto a, simple o compuesto, $f'(a)=f^2(a)$. Ello no quiere decir, desde luego, que $f'(a\circ' b)=f^2(a\circ b)$, sino $f'(a\circ b)=f^2(a\circ b)$ (es obvio que $f'(a\circ' b)=f^2(a\circ b)-2f(a)f(b)$).

[48] Por supuesto que para describir esta situación como la existencia de dos escalas no proporcionales de *la misma magnitud* es necesario no considerar esencialmente vinculado a la magnitud uno solo de los modos de combinación. Si cada magnitud llevara esencialmente asociado a ella un único modo de combinación no habría representaciones (p. e. en este caso) no proporcionales.

[49] Cf. Ellis 1966 p. 82; por cierto que en este lugar añade que incluso hay partes de la física que se simplificarían con f′.

[50] Este es el "segundo problema de la medición fundamental" (cf. Ellis 1960 y 1966 pp. 86-88).

absoluto evidente. Supongamos un mundo en el que los objetos que exhiben cierta magnitud se dividen en dos grupos de modo tal que los elementos de cada conjunto se comportan, en relación a la magnitud, establemente entre sí pero inestablemente con los del otro conjunto. En tal mundo, la forma de las leyes físicas se vería afectada por la elección del grupo al que pertenezca el estándar y, de nuevo, la única razón para elegir uno u otro sería de simplicidad.[51]

Ellis 1966 no contiene contribuciones importantes a las condiciones formales que hacen posible la medición ni se ocupa exhaustivamente de los diversos sistemas que ellas definen. El primero en reunir y presentar (gran parte de) los resultados que vimos en el apartado anterior es Pfanzagl. Hasta donde conozco, Pfanzagl 1968 es la primera obra dedicada a estudiar sistemáticamente (aunque tal sistematicidad no se refleja siempre en la presentación) las diferentes propiedades algebraicas de los sistemas empíricos y los tipos de representación posibles.[52]

En la presentación de los sistemas, Pfanzagl usa, en lugar de una única relación "menor o igual", dos relaciones, una $\prec$ de orden estricto y otra $\sim$ de coincidencia que es de equivalencia (no se ocupa pues de los semiórdenes). Además, estudia y presenta de modo general toda una serie de operaciones (sólo algunas interpretables como combinación) y los sistemas a que dan lugar. La presentación que hace de los sistemas es a veces peculiar[53] y el TR se presenta siempre en la versión de la existencia de un

---

[51] Esta cuestión es conceptualmente la misma que a la que se refiere Hempel (1952 pp. 73-74) cuando comenta (atribuyendo el ejemplo a Schlick) la posibilidad de tomar el pulso del Dalai Lama como estándar para la medición de la duración. Este problema también fue objeto de consideración por parte de Carnap (cf. Carnap 1966 cap. 8).

[52] Es por ello también la primera de una serie de obras dedicadas al análisis de la medición con una apariencia puramente matemática-algebraica, obras de las que uno se pregunta a veces qué tienen que ver con la medición.

[53] P. e., define los sistemas de diferencia con dos relaciones de orden (y de equivalencia), una entre pares de objetos y la otra entre objetos (p. 143) o introduce en los sistemas una relación L de "límite de una secuencia" (p. 78).

homomorfismo, con lo que a menudo los sistemas matemáticos que se toman para el teorema son realmente muy poco naturales.[54] Por otro lado, para la mayoría de sus sistemas exige condiciones estructurales excesivamente fuertes (que le permiten, p. e., prescindir amenudo de la condición arquimediana).

Independientemente de su carácter de primera *summa*, esta obra destaca por algunos resultados concretos. Estudia las escalas de intervalos basadas en operaciones (cap. 6) y estudia la relación entre estos sistemas con operaciones y los sistemas de diferencias usuales (sec. 9.2.). Presenta (cap. 7) aplicaciones psicofísicas de algunas de las operaciones estudiadas, entre las que destacan las consistentes en "dividir" un estímulo por la mitad (*middling*, y su generalización para la división en n partes) e interpolar un estímulo entre otros dos (*bisection*, igualmente ampliable a la n-interpolación). Generaliza los sistemas de medición conjunta[55] para casos en que haya más de dos atributos a medir simultáneamente (*k-dimensional conjoint measurement system*, p. 149) y prueba que el caso de tres o más es esencialmente diferente al de dos (p. 140). Por último, hay que destacar su análisis del estatus empírico de algunos de los axiomas (secs. 6.6. y 9.5.)[56].

La obra de Pfanzagl deja bastante que desear en cuanto a la completud del tratamiento y la sistematicidad de la exposición. No se puede decir lo mismo de *Foundations of Measurement*, cuyo primer volumen se publica en 1971 y cuyo segundo (y casi mítico) aparece, desdoblado al final en dos, veinte años después. Esta abrumadora obra (casi mil quinientas páginas, cerca de cuatrocientas definiciones y teoremas principales) está destinada sin duda a

---

[54] P. e., Teor. 6.1.1.; la versión del TR con homomorfismo se debe entender como una mera abreviatura, definiendo un sistema numérico, de un enunciado más complejo, no como la "semejanza" de un sistema empírico con otro matemático natural.

[55] Pfanzagl analiza con detalle en el cap. 12 la medición simultánea de la utilidad y la probabilidad subjetiva, pero su relación con el análisis general de la medición conjunta (cap. 9) no es claro.

[56] Este análisis había sido iniciado por Adams, Fagot y Robinson en una investigación de 1965 que es el origen de Adams-Fagot-Robinson 1970.

convertirse en la referencia básica sobre metrización. Sin embargo, e independientemente de que su desmesurado tamaño provoque cierta perdida de unidad, no siempre es fácil ver qué partes de ella tienen directamente que ver con las condiciones de medibilidad de un sistema empírico o con otras cuestiones diferentes aunque relacionadas.[57]

El primer volumen, y en relación a lo que aquí nos interesa, se ocupa básicamente de los sistemas extensivos, de diferencia, de probabilidad y conjuntos (*conjoint*). La relación de orden básica es $\succeq$, cuya interpretación pretendida es "mayor o igual".[58] En los extensivos, $\succeq$ es sobre un dominio A, y se añade además una operación de concatenación $\circ$. Se estudian varias posibilidades, según la operación sea o no cerrada, con o sin máximos y según el orden sea o no conexo. En los sistemas de diferencia, $\succeq$ es sobre el producto cartesiano AxA del dominio básico A, y se distinguen en función de si los intervalos son positivos, absolutos o igualmente espaciados. En cuanto a los sistemas de probabilidad, se analizan principalmente los correspondientes a la probabilidad incondicionada y condicionada, y se presentan algunas modificaciones para casos específicos de las mismas. Respecto de la medición conjunta, se investigan primero los sistemas conjuntos con dos componentes, principalmente los aditivos pero también los que tienen representaciones (esencialmente) no aditivas. Los resultados se generalizan después para sistemas de n componentes, con representación tanto aditiva como, en general, polinómica. La relación $\succeq$ es en este caso sobre el producto $A_1x...xA_n$ de los A_i dominios básicos. Los TR que se prueban no siempre tienen la forma de la existencia de un homomorfismo; cuando los sistemas numéricos serían poco naturales se prueba simplemente la

---

[57] Cf., p. e., caps. 12 y 13 sobre representación multidimensional o cap. 16 sobre representaciones con umbrales o entornos. Para un comentario y valoración general de los vols. 2 y 3 de *Foundations* desde la perspectiva de una teoría de los fundamentos de la medición, cf. Díez 1993.

[58] Los semiórdenes, que como vimos no se dejan analizar por este tipo de orden, se estudian en otro volumen y en el contexto del error.

existencia de una asignación numérica que cumple ciertas condiciones.

No es este el momento de desarrollar el esquema, ni siquiera de mencionar las principales contribuciones de la obra en las diversas partes del mismo. Me limitaré a comentar un único aspecto especialmente interesante relativo a la condición arquimediana. Como vimos, el axioma arquimediano exige que ningún elemento sea "infinitamente mayor" que otro. En los sistemas extensivos, por ejemplo, ello significa que si b es mayor que a, concatenando a consigo mismo (o con semejantes a él) un número finito de veces podemos "alcanzar" (superar) b. Dicho de otro modo (y definiendo recursivamente na así: 1a=a y na=(n-1)a∘a), si b es mayor que a, el conjunto de enteros n tales que b es mayor que na es finito. Todavía de otro modo, que no se cumpla la condición significa que hay una secuencia a, 2a, 3a,... que está estrictamente acotada (por b) y que es infinita. Una condición semejante se debe exigir en los otros sistemas.[59] En *Foundations*, vol. 1, se da una forma general de la condición arquimediana igual para todos los sistemas, aunque ella está relativizada a cierto elemento que varía de unos sistemas a otros. La forma general, que debe quedar clara si atendemos a la tercera de las caracterizaciones que hemos dado para el caso extensivo, es: (Arq) "Toda secuencia estándar estrictamente acotada es finita". Ahora sólo hará falta ir definiendo para cada caso qué es una secuencia estándar (esto es, una secuencia progresiva e igualmente espaciada). Ya lo sabemos para los sistemas extensivos. Para los de diferencias, por ejemplo, es una secuencia a_1, a_2,... tal que cada término forma con el anterior un intervalo equivalente al que forma con su siguiente (recuérdese que en este caso el orden, y por tanto la equivalencia derivada, es entre pares o intervalos).

De las obras que aparecen en los casi veinte años que separan el primero del segundo y tercer volumen de *Foundations* la más

---

[59] Sobre la posibilidad de representación sin arquimedianidad ver más adelante los comentarios a Narens 1985.

importante es la de Narens. Roberts 1979a es básicamente una excelente exposición actualizada de resultados anteriores que presta especial atención a las aplicaciones en psicología y ciencias sociales. Roberts utiliza siempre como relación primitiva de los sistemas empíricos una de orden estricto (irreflexiva) y con ella define otra de indiferencia (aIb syss no aRb y no bRa) que en general, aunque no siempre (semiórdenes), resulta de equivalencia.[60] Berka 1983 es un análisis de la medición en general que no contiene elementos nuevos de interés en el tema que nos ocupa.[61] Kyburg 1984 se aparta de la teoría representacional de la metrización, al menos del modo usual (el que estamos viendo) en que se desarrolla esta teoría. Kyburg concede un lugar central en su análisis al tema del error, lo que obliga, según él, a reformular el enfoque tradicional pues es incapaz de un tratamiento adecuado de tal fenómeno. El modo concreto, y muy complicado, en que desarrolla su teoría mediante la construcción de dos "lenguajes" no nos interesa ahora. Lo esencial es que la teoría se construye en dos niveles, uno que recoge (los juicios sobre) los estados de cosas (relacionales) observados y otro que expresa ciertas idealizaciones de tales estados de cosas. Las condiciones con las que la teoría representacional clásica caracteriza los diversos sistemas empíricos

[60] Este procedimiento es casi siempre equivalente al seguido en *Foundations*, "casi" porque en *Foundations* se contemplan un tipo de sistemas (sec. 3.12) para los que la relación "mayor o igual" no es necesariamente conexa, y en Roberts tal relación (R o I) sí lo es (por definición de I).

[61] La principal pretensión de esta obra es filosófica, en sentido amplio. Sin embargo, cuando no se limita a comentar críticamente la literatura sobre los diversos aspectos de la medición y desarrolla tesis propias, es algo difícil apreciar la naturaleza exacta de sus propuestas, principalmente por estar inspiradas y formuladas (como explícitamente afirma el autor, cf. p.e. pp. 53 y 217) siguiendo los principios del materialismo histórico-dialéctico. Lo que alcanzo a entender, y comparto, de su análisis es que el tratamiento puramente formal de la medición no agota el *explanandum*, pero dudo de que el sentido preciso en que para mí esta afirmación es cierta coincida con el del autor.

se sitúan en este segundo nivel[62], por lo que tales sistemas no serían después de todo -según Kyburg- propiamente empíricos.

El libro de Narens *Abstract Measurement Theory* es sin duda "la" otra referencia básica en teoría de la metrización y el mejor ejemplo de cómo la teoría adquiere a veces una apariencia puramente matemática. Además de presentar de modo impecable gran parte de los resultados que ya conocemos, esta obra contiene otros nuevos, muchos de los cuales aparecieron a finales de los setenta y principios de los ochenta como resultado de la colaboración entre el propio Narens, Luce y Cohen. Mencionaremos aquí sólo los más importantes.

El primero[63] es la generalización de los sistemas extensivos de *Foundations* a casos en los que la concatenación no es conmutativa y/o asociativa. El resultado es un tipo muy general de estructuras, las *estructuras de concatenación positivas*. Estas se pueden debilitar todavía más si no se exige positividad, lo que parece deseable en algunos casos, a saber, cuando la estructura de concatenación es *intensiva*.

La principal novedad recogida en esta obra tiene que ver con un nuevo modo (que guarda ciertas relaciones con el anterior usual) de caracterizar los diversos sistemas y su relación con los tipos de escalas.[64] La idea básica es definir los tipos de sistemas no mediante el listado directo de una serie de axiomas sobre sus constituyentes, sino en función de ciertas propiedades que satisfaga su grupo de automorfismos.[65] Estas propiedades se refieren fundamentalmente al número de puntos (parámetros o

[62] Esta observación está relacionada con, aunque tiene mayor alcance que, la discusión en la teoría representacional acerca del carácter descriptivo o normativo de los axiomas para algunas relaciones, como la de preferencia entre bienes o acontecimientos, típicas en las ciencias sociales (cf., p. e., Roberts 1979a pp. 3-4).

[63] Cf. Luce-Narens 1976.

[64] Cf. Cohen-Narens 1980, Narens 1981a y 1981b, Luce-Cohen 1983 y Luce-Narens 1985.

[65] Un automorfismo de un sistema E es un isomorfismo de E *sobre* E (si se trata de un homomorfismo *en* sí mismo es entonces un endomorfismo; todos los automorfismos son pues endomorfismos).

grados de libertad) necesarios en que deben coincidir dos automorfismos para que "coincidan" (en cierto sentido) en el resto. Las propiedades son las de *unicidad* y *homogeneidad*. El grupo de automorfismos de un sistema $\mathbf{X}=<X,\succsim,R_2,R_3,...>$, en el que $\succsim$ es un *orden total,* satisface n-unicidad syss cualesquiera dos automorfismos que coincidan en n puntos (diferentes) coinciden en el resto (son iguales). El grupo satisface n-homogeneidad syss para dos series cualesquiera $a_1 \succ a_2 \succ ... \succ a_n$ y $b_1 \succ b_2 \succ ... \succ b_n$ de n puntos diferentes cada una, hay un automorfismo f en el grupo tal que $f(a_i)=f(b_i)$, esto es, para cualesquiera n puntos diferentes y *cualesquiera* n otros hay un automorfismo en el grupo que "traslada" los primeros a los segundos (con la sola condición de que los segundos tengan el orden apropiado). Con estas propiedades se definen diferentes tipos de sistemas, por ejemplo, **X** es una *estructura escalar* syss su grupo de automorfismos es 1-homogéneo y 1-único.[66]

Los teoremas de representación y unicidad toman ahora una forma peculiar, estableciendo la relación entre los "grados de libertad" de un sistema y su representación. Primero se definen los tipos de escala de modo abstracto: Sea **X** un sistema relacional, F es una escala ... para **X** syss hay un sistema numérico **N** (concreto, y no importa que sea poco natural) tal que F es el conjunto de todos los homomorfismos de **X** en **N**, F no es vacío, si f está en F entonces toda transformación ... de f está en F (F está cerrado bajo transformaciones ...), y si f y g están en F entonces una es transformación ... de la otra (todos los elementos de F son equivalentes según la transformación ...).[67] Por ejemplo, para $\mathbf{N} = <Re^+,\geq,...>$ y transformaciones similares obtenemos la definición de *escala de razón para* **X**.[68] El TRU afirma ahora que si **X** es una estructura ... entonces tiene escala ... (a veces con condiciones adicionales

[66] Narens 1985, def. 2.4.6, p. 48.

[67] Como se habrá notado, ahora las escalas no son homomorfismos sino conjuntos de tales.

[68] Ibid. def. 2.4.1, p. 42.

probando también el sentido inverso); por ejemplo[69], **X** es una estructura escalar y todo endomorfismo suyo es un automorfismo syss hay F tal que F es escala de razón para **X** y F tiene algún elemento que es *sobre* Re^{+}.

Esta caracterización de los sistemas es más general que la tradicional (de la que también se ocupa Narens) en el sentido de que diferentes sistemas de los anteriores tienen las mismas propiedades de homogeneidad y unicidad (hay, p. e., estructuras escalares no extensivas), e. e., estas propiedades están más íntimamente vinculadas con las posibilidades representacionales que (los diversos grupos de) las otras. Estos resultados, y el enfoque basado en el análisis de los grupos de automorfismos en que se inspiran, tienen sin duda gran interés matemático, pero su función en una teoría no puramente matemática de la metrización es discutible. No sólo porque en muchos casos exige supuestos demasiado fuertes (como la ordenación total) sino además porque es difícil encontrar una interpretación empírica inmediata (sin pasar por el tipo de condiciones tradicional) de la homogeneidad y la unicidad.

Narens no siempre sigue la estrategia basada en el análisis de los grupos de automorfismos y gran parte de la obra se ajusta al enfoque tradicional. En términos generales el análisis sigue las líneas que ya conocemos, y no insistiré en él. Hay, sin embargo, una parte del mismo que es novedosa y que, aunque merecería quizás un comentario más detallado, sólo mencionaré. Se trata de las posibilidad de representación para estructuras en las que no se exige la condición arquimediana (ni, claro está, alguna otra más fuerte).[70] La motivación para estudiar este tipo de sistemas es doble. Por un lado, esta condición no es axiomatizable en primer

[69] Ibid., teor. 2.4.4, p. 49.

[70] Narens se había ocupado previamente de esta cuestión en Narens 1974, cf. también Skala 1975.

orden[71]; por otro, en algunos sistemas quizás sea razonable admitir la existencia de elementos infinitos y/o infinitesimales, esto es, infinitamente más grandes, o más pequeños, que otros.[72] Narens estudia diversos tipos de sistemas no arquimedianos extensivos y conjuntos. En general, estos sistemas no son representables en los reales, pero sí lo son en alguna ultrapotencia (*ultrapower*) suya y la última parte de la obra se ocupa de este tipo de representaciones usando las técnicas del análisis no estándar.[73]

Muchos resultados contenidos en la obra de Narens son recogidos, ampliados y actualizados, en el tercer volumen de *Foundations*. En él se generalizan los sistemas extensivos mediante las estructuras de concatenación (cap. 19)[74] y se presenta la nueva caracterización de los sistemas mediante las propiedades de sus grupos de automorfismos y su relación con los tipos de escalas (cap. 20). De los dos restantes capítulos de este tercer volumen, el cap. 21 no es tanto teórico cuanto, en relación con MT, metateórico, pues se ocupa de diversos cuestiones relacionadas con la axiomatizabilidad. En realidad, gran parte del mismo es simplemente teoría estándar de modelos y de la axiomatización en lenguajes formales,

71 Esta es una consecuencia del teorema de compacidad (cf. Narens p. 318 y ss.). Como se señala en *Foundations* 3 (p. 248), la importancia de este hecho para la teoría de la metrización debe ser matizada, pues si, como es usual en metrización, se toma la teoría de conjuntos como lenguaje básico, el axioma arquimediano se encuentra en igualdad de condiciones con el resto.

72 Kyburg (1988, p. 182) relativiza la importancia de esta posibilidad. Por otro lado, la posibiliadad de esta situación se piensa en general, no tiene que ver con algunos sistemas concretos que pueden tener elementos "insuperables", como los sistemas de máximo esencial comentados anteriormente y en los que la arquimedianidad puede ser relativizada (cf. *Foundations* 3, p. 34.).

73 Las ultrapotencias de los reales son sistemas numéricos del tipo $<{}^{*}Re, {}^{*}+, {}^{*}\cdot, {}^{*}\geq>$. ${}^{*}Re$ es el conjunto cociente de $Re^{I^{+}}$ (el conjunto (potencia) de las funciones de I^{+} en Re, secuencias infinitas de reales) bajo la relación de equivalencia $f \sim g$ syss $\{i / f(i)=g(i)\} \in U$, siendo U un ultrafiltro de I^{+} (dos secuencias son equivalentes si coinciden en "casi todos" los términos, el sentido exacto de lo cual lo da el ultrafiltro). Las relaciones del sistema son extensiones de las usuales en Re para estas clases de secuencias (destaca el hecho de que ${}^{*}\geq$ no resulta conexa).

74 Esta generalización y sistematización es sin embargo todavía parcial. Para una ulterior reconstrucción canónica de todos los tipos de sistemas de combinación, cf. Díez-Moulines 1993.

y sólo al final del mismo (21.7 y 21.8) se tratan cuestiones relativas a TM. El último capítulo está dedicado a la invarianza (tema que ya se había tratado parcialmente en *Foundations* I, cap. 10) y el problema de la significatividad. Se presentan tres conceptos de invarianza ("referencial", "estructural" y "transformacional") y se discute la importancia de cada uno y las relaciones lógicas que mantienen entre sí. La noción de invarianza tiene directamente que ver con el problema de la significatividad (*meaningfulness*), e.e., ¿qué uso legítimo o *significativo* podemos hacer de las representaciones-mediciones? Una vez tenemos una representación de cierto sistema-magnitud, no toda afirmación "numérica" sobre la magnitud es legítima o significativa, en el sentido de depender sólo de "los hechos del sistema". Así, p.e., "la probabilidad de este suceso es 0.7" es significativa, pero "la masa de este objeto es 4.3" no; y "la masa de este objeto es doble que la de aquél" lo es, pero "la temperatura (termométrica) de hoy es doble que la de ayer" no lo es. El primer modo de abordar esta cuestión (debido a Stevens) hacía depender la significatividad de la invarianza bajo las trasformaciones admisibles del morfismo-representación (cambios de escala). En este capítulo, los autores revisan la evolución de este criterio y de otros posteriores, y discuten su aplicación en los dos ámbitos más estudiados por la literatura, el análisis dimensional y la estadística.

El segundo volumen de *Foundations* se dedica principalmente al análisis de la representación multidimensional (caps. 12 a 15) y del error (16 y 17). En cuanto a esto último, más que del error (en la representación) propiamente dicho, de lo que se ocupan es de las diversas posibilidades de representación para sistemas en los que falla alguna condición central de los casos estándar. El caso clásico y el que centra sus esfuerzos es el de la transitividad, que ya comentamos en 9.2 y al que aquí los autores añaden, junto al modo usual algebraico de abordarlos (cap. 16), otro enfoque más probabilista (cap. 17). Este bloque dedicado al "error" contiene sin embargo pocos elementos nuevos que merezcan destacarse. Más interesante, por reveladora de la concepción extremadamente (y excesivamente a veces) amplia que los autores tienen de una teoría sobre fundamentos de medición, resulta la unidad dedicada a lo que llaman "representaciones multidimensionales". Con ella concluiremos.

Después de todo lo que hemos visto, uno esperaría que en la metrización multidimensional se investigaran las condiciones que debe satisfacer un sistema $E=<E,R_1,...,R_m>$ para ser homomorfo a cierto sistema vectorial (geometría) $V=<Re^n,S_1,...,S_m>$ o, en general, para que exista una función f de E en Re^n de la que sea verdad una fórmula (interesante, y "natural") Φ que relaciona f, las R_i y ciertas relaciones/operaciones ("naturales") sobre Re^n. Sin embargo, en muy pocos lugares de los cuatro capítulos que forman esta unidad encuentra uno algo semejante.

En primer lugar se presentan las diferentes estructuras representantes, esto es, diferentes geometrías analíticas.[75] A continuación se presentan diversas geometrías sintéticas, sistemas caracterizados mediante axiomas cualitativos acerca de las relaciones sobre el dominio (espacios proyectivos, afines, absolutos, euclideos, hiperbólicos, elípticos...). De ellos se prueba que son isomorfos a (en cada caso) determinada geometría analítica. Este es el lugar donde más claramente encontramos el esquema mencionado. Hasta qué punto ello forma parte de una teoría de la metrización (de sistemas *empíricos*), y no se trata simplemente de la reducción de la geometría sintética a la analítica, es discutible. Es cierto que se adecua al patrón general de la parte formal de la teoría: si tal estructura satisface tales condiciones, existe una representación (en este caso multidimensional) única hasta cierto grado. Otra cosa es si tales sistemas tienen aplicación empírica y, sobre todo, si puede ser considerada su representación como *medición*, esto es, representación de *magnitudes*. En es te sentido, es importante destacar que

[75] De hecho, el cap. 12 es básicamente un análisis de los fundamentos axiomáticos de la geometría analítica. Por cierto que al menos una de tales geometrías es algo peculiar en tanto que estructura representante, pues contiene una operación externa (geometría de Minkowski, def. 12.9, p. 43; la operación es la norma).

las estructuras cualitativas representadas, las geometrías sintéticas, carecen de una relación de comparación, relación que parece debe contener cualquier sistema cualitativo que pretenda expresar magnitudes, esto es, propiedades que se dan *según un más y un menos*.

Una última cuestión merece ser comentada. Se trata de la (sorprendente) inclusión en esta parte dedicada a la metrización multidimensional de las estructuras para la medición de proximidad o distancia (*proximity measurement*, cap. 14). Estas estructuras son de tipo $<A, \succsim>$, con $\succsim$ sobre AxA (del mismo tipo por tanto que las estructuras para diferencias que vimos en 9.1). Sus condiciones garantizan la existencia de una función δ de AxA en Re que, entre otras cosas, es una métrica ($\delta(x,x)=0$ y para $x\neq y$, $\delta(x,y)>0$; $\delta(x,y)=\delta(y,x)$; y $\delta(x,y)+\delta(y,z)\geq\delta(x,z)$). Cuando A es factorial, esto es, $A=A_1x...xA_n$, la representación puede, en ciertos casos, "descomponerse". Ello puede hacerse básicamente de dos modos. Unos grupos de condiciones garantizan la existencia de funciones f_i de A_ixA_i en Re y F de Re^n en Re tales que $\delta(a,b) = \delta(<a_1,...,a_n>,<b_1,...,b_n>) = F[f_1(<a_1,b_1>),...,f_n(<a_n,b_n>)]$. Otros grupos aseguran que existen funciones g_i de A_i en Re, G de Re^2 en Re y F de Re^n en Re tales que $\delta(a,b) = \delta(<a_1,...,a_n>,<b_1,...,b_n>) = F[G(g_1(a_1),g_1(b_1)),...,G(g_n(a_n),g_n(b_n))]$ (a veces δ deja de ser una métrica, aunque sigue preservando el orden). Si algún caso puede describirse como multidimensional es seguramente el último, pues puede considerarse que a los elementos de A se les asignan tuplas $<x_1,...,x_n>$ de reales (los valores de las g_i para las componentes del elemento) y que la "distancia" entre dos elementos es cierto resultado de operar con sus asignaciones-vectores. De todas formas, es quizás más apropiado describir este estado de cosas como un tipo de metrización conjunta para diferencias, y de hecho gran parte del arsenal que se utiliza en su análisis proviene efectivamente de ambos tipos de metrización.

Con la revisión de los dos últimos volúmenes de *Foundations* concluimos nuestro recorrido histórico por la teoría de la metrización. Con esta obra alcanza plena madurez una teoría cuyos primeros cimientos fueron puestos por Helmholtz un siglo antes y que todavía ha de seguir progresando en múltiples direcciones en el futuro. La "ciencia normal", en sentido kuhniano, no cesa tampoco para TM, y tras la reciente publicación del último volumen de *Foundations* son ya numerosos los trabajos que han aparecido. Pasará seguramente tiempo, sin embargo, hasta que el volumen e importancia de los mismos exijan una nueva *summa* del calibre de *Foundations*. Aunque algunas de sus partes se alejan un tanto de una teoría sobre fundamentos de *medición*, y otras son susceptibles de una más adecuada estructuración metateórica, no hay duda que esta obra ha de ser durante mucho tiempo la referencia básica para todo aquél interesado en la teoría de la metrización.

REFERENCIAS

ACZEL, J. 1948, 'On mean values', *Bull. Amer. Math. Soc.* 54, pp. 392-400.

ADAMS, E. 1965, 'Elements of a Theory of Inexact Measurement', *Philosophy of Science* 32, pp. 205-228.

ADAMS, E.-FAGOT, R.-ROBINSON, R. 1970, 'On the empirical status of axioms in theories of fundamental measurement', *Journal of Mathematical Psychology* 7, pp 379-409.

ARMSTRONG, D. 1987, 'Comments on Smoyer and Forge', en Forge (ed.), *Measurement, Realism and Objectivity*, pp. 311-317.

ARMSTRONG, D. 1988b, 'Are Quantities Relations?', *Philosophical Studies* 54, pp. 305-316.

BERKA, K. 1983, *Measurement. Its Concepts, Theories and Problems*, Reidel, Dordrecht.

BENNETT, J.F.-HAYS, W. 1960, 'Multidimensional unfolding: determining the dimensionality of ranked preference data', *Psychometrika* 25, p. 27-43.

CARNAP, R. 1966, *Philosophical Foundations of Physics*, Basic Books, N. York.

COHEN, M. -NARENS, L. 1979, 'Fundamental unit structures: a theory of ratio scalability', *Journal of Mathematical Psychology* 20, pp. 193-232.

COOMBS, C.H. 1950, 'Psychological scaling without a unit of measurement', *Psychological Review* 57, pp. 145-158.

COOMBS, C.H. 1960, 'A theory of data', *Psychological Review* 67, pp. 143-159.

DAVIDSON, D. -SUPPES, P. 1956, 'A finitistic axiomatization of subjective probability and utility', *Econometrica* 24, pp. 264-275.

DE FINETTI, B. 1937, 'La prevision: ses lois logiques, ses sources subjectives', *Ann. Inst. H. Poincare* 7, pp. 1-68.

DEBREU, G. 1960, 'Topological methods in cardinal utility theory', en Arrow-Karlin-Suppes(eds.), *Mathematical methods in social sciences*, pp. 16-26.
DIEZ, J.A. 1993, 'Comentario a *Foundations of Measurement* 2 y 3', *Theoria* pp. 163-168.
ELLIS, B. 1960, 'Some Fundamental Problems of Direct Measurement', *Australasian Journal of Philosophy* 38, pp. 37-47.
ELLIS, B. 1961, 'Some Fundamental Problema of Indirect Measurement', *Australasian Journal of Philosophy* 39, pp. 13-29.
ELLIS, B. 1966, *Basic Concepts of Measurement*, Cambridge U.P., Londres.
ELLIS, B. 1987, 'Comments on Forge and Swoyer', en Forge(ed.), *Measurement, Realism and Objectivity*, pp. 319-325.
FORGE, J. 1987, 'Ellis' Theory of Quantities', en Forge(ed.), *Measurement, Realism and Objectivity*, pp. 291-310.
HEMPEL, C.G. 1952, *Fundamental of Concept Formation in Empirical Sciences*, U. Chicago P., Chicago.
HEMPEL, C.G. 1958, 'The Theoretician's Dilema', en Feigl-Scriven-Maxwell (eds.), *Minnesota Studies in the Philosophy of Science II*. Tr. cs.: 'El Dilema del Teórico', en Hempel, *La Expliacción Científica*, Paidos, Buenos Aires 1979, pp. 177-229.
KRAFT, C.H. -PRATT, J.W. -SEIDENBERG, A. 1959, 'Intuitive probability on finite sets', *Ann. Math. Stat.* 30, pp. 408-419.
KRANTZ, D. 1964, 'Conjoint measurement: the Luce-Tukey axiomatization and some extensions', *Journal of Mathematical Psychology* 1, pp. 248-277.
KRANTZ, D. 1967, 'Extensive Measurement in Semi-Orders', *Philosophy of Science* 34, pp. 348-362.
KRANTZ, D.-LUCE, D.-SUPPES, P.-TVERSKI, A. 1971, *Foundations of Measurement* I, Academic P., New York.
KYBURG, H. 1984, *Theory and Measurement*, Cambridge U.P., Cambridge.
KYBURG, H. 1988, 'Review of Narens' Abstract Measurement Theory', *Synthese* 76, pp. 179-182.
LUCE, D. 1966, 'Two extensions of conjoint measurement', *Journal of Mathematical Psychology* 3, pp. 348-370.
LUCE, D. 1967, 'Sufficient conditions for the existence of a finitely additive probability structure', *Ann. Math. Statist.* 38, pp. 780-786.
LUCE, D. 1968, 'On the numerical representation of qualitative conditional probability', *Ann. Math. Statist.* 39, pp. 481-491.
LUCE, D. 1971, 'Periodic extensive measurement', *Compositio Mathem.*
LUCE, D. -COHEN, M. 1983, 'Solvable conjoint structures with factorizable automorphisms', *Journal of Pure and Applied Algebra* 27, pp. 225-261.
LUCE, D. -KRANTZ, D. -SUPPES, P. -TVERSKY, A. 1990, *Foundations of Measurement* 3, Academic P., New York.
LUCE, D. -NARENS, L. 1976, 'A qualitative equivalent for the relativistic addition law for velocities', *Synthese* 33, pp. 483-487.

LUCE, D. -NARENS, L. 1985, 'Classification of concatenation structures by scale type', *Journal of Mathematical Psychology* 29, pp. 1-72.
LUCE, D. -MARLEY, A. 1969, 'Extensive measurement when concatenation is restricted and maximal elements may exist', en Morgenbesser-Suppes-White (eds.), *Essays in Honor of Ernest Nagel*, pp. 235-249.
LUCE, D. -SUPPES, P. 1965, 'Preference, utility and subjective probability', en Luce-Bush-Galanter(eds.), *Handbook of Mathematical Psychology*, pp. 249-410 (vol. 3).
LUCE, D. -TUKEY, J. 1964, 'Simultaneous conjoint measurement: a new type of fundamental measurement', *Journal of Mathematical Psychology* 1, pp. 1-27.
MOULINES, C. U. -DIEZ, J. A. 1993, 'Theories as Nets: Combinatorial Measurement Theory', en P. Humphreys (ed.), *Patrick Suppes, Mathematical Philosopher*, Kluwer Ac. P., Dordrecht 1993 (en prensa).
NARENS, L. 1974, 'Measurement without Archimedian Axioms', *Philosophy of Science* 41, pp. 374-393.
NARENS, L. 1981a, 'A general theory of ratio scalability with remarks about the measurement-theoretic concept of maningfulness', *Theory and Decision* 13, pp. 1-70.
NARENS, L. 1981b, 'On the scales of measurement', *Journal of Mathematical Psychology* 24, pp. 249-275.
NARENS, L. 1985, *Abstract Measurement Theory*, MIT P., Cambridge.
PFANZAGL, J. 1968, *Theory of Measurement*, Wiley, New York.
ROBERTS, F. 1979a, *Measurement Theory*, Addison, Massachusetts.
ROBERTS, F. 1979b, 'Structural Modeling and Measurement Theory', *Technol. Forecast. Soc. Change* 14, pp. 353-365.
SCOTT, D. 1964, 'Measurement models and linear inequalities', *Journal of Mathematical Psychology* 1, pp. 233-247.
SCOTT, D.-SUPPES, P. 1958, 'Foundational Aspects of Theories of Measurement', *Journal of Symbolic Logic* 23, pp. 113-128.
SKALA, H.J. 1975, *Non-Archimedian Utility Theory*, Reidel, Dordrecht.
SUPPES, P. 1951, 'A set of independent axioms for extensive quantities', *Portugaliae Mathematica* 10, pp. 163-172. Tr. cs.: 'Un conjunto de axiomas independientes para cantidades extensivas', en Suppes, *Estudios de Filosofía y Metodología de la Ciencia*, Alianza, Madrid 1988, pp. 173-183.
SUPPES, P. 1957, *Introduction to Logic*, Van Nostrand, Princeton.
SUPPES, P. 1969, *Studies in the Methodology and Foundations of Science*, Reidel, Dordrecht.
SUPPES, P. 1972, 'Finite Equal-Interval Measurement Structures', *Theoria* 38, pp. 45-63. Tr. cs.: 'Estructuras finitas de medición de intervalos iguales', en Suppes, *Estudios de Filosofía y Metodología de la Ciencia*, Alianza, Madrid 1988, pp. 185-201.
SUPPES, P. -KRANTZ, D. -LUCE, D. -TVERSKY, A. 1989, *Foundations of Measurement II*, Academic P., New York.
SUPPES, P. -WINET, M. 1955, 'An axiomatization of utility based on the notion of utility differences', *Management Scince* 1, pp. 259-270.

SUPPES, P.-ZINNES, J. 1963, 'Basic Measurement Theory', en Luce-Bush-Galanter (eds.), *Handbook of Mathematical Psychology 1*, pp. 3-76.
SWOYER, Ch. 1987, 'The Metaphysics of Measurement', en Forge(ed.), *Measurement, Realism and Objectivity*, pp. 235-290.
TVERSKY, A. 1967, 'A general theory of polynomial conjoint measurement', *Journal of Mathematical Psychology* 4, pp. 1-20.