PROBLEMAS DE

AUTOMATICA II

(Primer parcial)

Jose Manuel Díaz

Joaquín Aranda

Departamento de Informática y Automática
E.T.S.I. Informática
U.N.E.D

Problemas de Automática II (Primer parcial).

Última reimpresión: Octubre 2006.

ISBN: 84-690-0485-9

Departamento de Informática y Automática

E.T.S.I Informática.
Universidad de Educación a Distancia (UNED).
C/ Juan del Rosal nº 16.
Madrid 28040 (España)

INDICE

ENUNCIADOS PROBLEMAS
TEMA 1: Modelos de sistemas continuos

1.1 Una representación en el espacio de estados de un sistema en la forma canónica controlable se obtiene mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

El mismo sistema se representa mediante la siguiente ecuación en el espacio de estados, que está en forma canónica observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

a) Demostrar que la representación en el espacio de estados obtenida mediante las ecuaciones (1) produce un sistema que es de estado controlable pero no observable.
b) Demostrar que la representación en el espacio de estados definida mediante las ecuaciones (2) produce un sistema que no es de estado completamente controlable pero si observable.
c) Explicar qué provoca las diferencias evidentes en la controlabilidad y la observabilidad del mismo sistema.

1.2 Considere el sistema dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

¿Es el sistema de estado completamente controlable y completamente observable? ¿Es el sistema de salida completamente controlable?

1.3 Considérese el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Se desea ubicar los valores característicos del sistema en -3 y -5 usando un control mediante la realimentación del estado $u=-K\cdot x$. Determinar la matriz de ganancias de realimentación K necesaria y la señal de control u.

1.4 Considérese el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Se quiere diseñar un observador de orden completo. Determine la matriz de ganancias del observador K_e usando: a) El método de sustitución directa. b) La fórmula de Ackermann. Supóngase que los valores característicos deseados de la matriz de ganancias del observador son

$$\mu_1 = -2 + j \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \qquad \mu_2 = -2 - j \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \qquad \mu_3 = -5$$

1.5 Para el sistema definido en el problema 1.4 se supone que la variable de estado x_1 es igual a y. En consecuencia x_1 es medible y no necesita observarse. Determinar la matriz de ganancias del observador K_e para el observador de orden mínimo. Los valores característicos deseados son

$$\mu_1 = -2 + j \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \qquad \mu_2 = -2 - j \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$$

ENUNCIADOS PROBLEMAS
TEMA 2: Modelos de sistemas discretos

2.1 Considérese el sistema definido por

$$G(z) = \frac{z+1}{z^2 + 1.37z + 0.4}$$

Obtener la representación en el espacio de estados para este sistema en las tres configuraciones siguientes:

a) Forma canónica controlable
b) Forma canónica observable
c) Forma canónica diagonal (Jordan)

2.2 Considérese el sistema con doble integrador

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x_k + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \cdot u_k$$

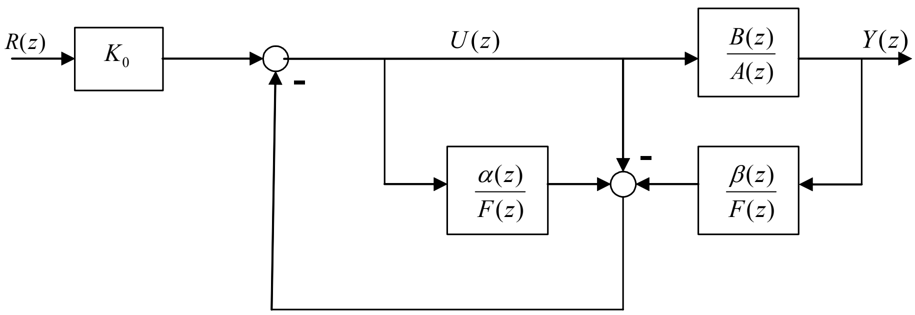
donde T es el periodo de muestreo. Se pide:

a) Determinar la matriz de ganancia de realimentación del estado *K* tal que la respuesta a una condición arbitraria sea con oscilaciones muertas, es decir, los polos en lazo cerrado deseados deberán estar en el origen de modo que $\mu_1 = \mu_2 = 0$.
b) Para el estado inicial $x(0) = [1\ 1]^T$ determinar u(0) y u(T), para T=0.1 seg, T=1 seg y T=10 seg. ¿Que ocurre con las magnitudes de u(0) y u(T) al aumentar T?.

2.3 Considérese la planta definida por

$$G(z) = \frac{1}{z^2 + z + 0.16}$$

Utilizando el enfoque de las ecuaciones polinomiales, diseñar un sistema de control para esta planta basado en el diagrama de bloques siguiente



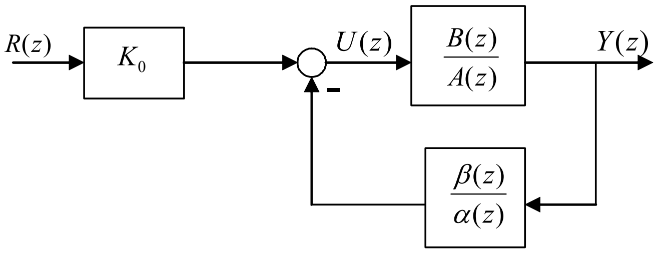
Suponer que la ecuación característica deseada es $H(z) = z^2 - 1.2 \cdot z + 0.52$ y que el polinomio del observador de orden mínimo es $F(z) = z$.

2.4 Sea la planta

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -0.2 & 1.1 \end{bmatrix} \cdot x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

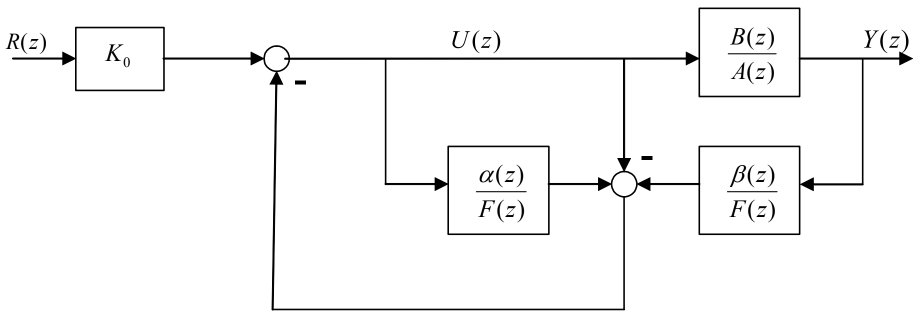
Usando el enfoque de ecuaciones polinomiales, diseñar un sistema de control para esta planta cuya diagrama de bloques sea



considérese que

$$H(z) = z^3$$
$$F(z) = z^2$$

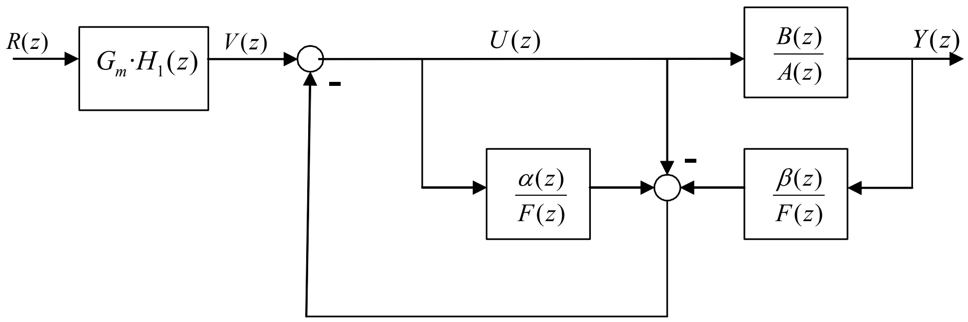
2.5 Para la planta del problema 2.4 supuestos los mismos $H(z)$ y $F(z)$ emplear el enfoque polinomial para diseñar un sistema de control para la planta cuyo diagrama de bloques sea



2.6 Considérese una planta definida por

$$G(z) = \frac{z + 0.5}{z^3 - z^2 + 0.01z + 0.12}$$

El periodo de muestreo T es de un segundo. Supóngase que en el presente problema es importante tener un error de seguimiento cero a una entrada rampa unitaria. Se quiere diseñar el siguiente sistema de control para la planta



Se considera que

$$G_m(z) = \frac{0.64{\cdot}z - 0.512}{(z^2 - 1.2z + 0.52){\cdot}(z - 0.6)} = \frac{0.64{\cdot}z - 0.512}{z^3 - 1.8{\cdot}z^2 + 1.24{\cdot}z - 0.312}$$

Se pide:
a) Obtener los polinomios α(z) y β(z).

b) Obtener las expresiones de Y(z)/V(z) e Y(z)/R(z).

ENUNCIADOS PROBLEMAS
TEMA 3: Modelos de perturbaciones

3.1 Usar el Teorema 3.1(pp. 138 de los apuntes) para calcular la función de covarianza estacionaria del proceso

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ -0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \cdot x_k + v_k$$

donde v es un proceso de ruido blanco con media cero y varianza

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.2 Considérese el proceso

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \cdot x_k + v_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot x_k$$

donde v es un proceso de ruido blanco con media cero y matriz de covarianza

$$R_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Demostrar que y_k puede ser expresado en la forma

$$y(k) = \lambda \cdot \frac{q+c}{(q+a)\cdot(q+b)} e(k)$$

donde e(k) es ruido blanco con media cero y varianza unidad. Encontrar la relación a partir de la cual es posible determinar λ y c.

3.3 Un proceso estocástico y(k) esta descrito por

$$x_{k+1} = a \cdot x_k + v_k$$
$$y_k = x_k + e_k$$

donde v y e son procesos de ruido blanco de distribución normal con las propiedades

$$E[v] = E[e] = 0$$
$$Var[v] = 1$$
$$Var[e] = r_2$$
$$E[v(k)e(j)] = \begin{cases} r_{12} & si\ k = j \\ 0 & si\ k \neq j \end{cases}$$

Demostrar que y(k) puede ser expresada como la salida del siguiente filtro lineal:

$$y(k) = \lambda \cdot \frac{q-c}{q-a} \varepsilon(k) \qquad |c|<1$$

donde ε(k) es ruido blanco con media cero y varianza unidad. Determinar λ y c.

3.4 Determinar la función de covarianza $r_y(\tau)$ y el espectro $\phi_y(\omega)$ del proceso y(k)

$$y(k) - 0.7 \cdot y(k-1) = e(k) - 0.5 \cdot e(k-1)$$

donde e(k) es ruido blanco de varianza unidad.

3.5 Determinar la varianza del proceso estocástico y(k) definido por

$$y(k) - 1.5 \cdot y(k-1) + 0.7 \cdot y(k-2) = e(k) + 0.2 \cdot e(k-1)$$

donde e(k) es ruido blanco de varianza unidad.

ENUNCIADOS PROBLEMAS
TEMA 4: Estimación óptima

4.1 Se genera un proceso estocástico mediante

$$x_{k+1} = 0.5 \cdot x_k + v_k$$
$$y_k = x_k + e_k$$

donde v y e son procesos de ruido blanco no correlacionados con covarianzas r_1 y r_2, respectivamente. Además x(0) tiene una distribución normal con media cero y desviación estándar σ. ¿Cual es la ganancia en estado estacionario?. Calcúlese el polo del filtro estacionario y compárese con el polo del sistema.

4.2 El integrador doble con ruido de proceso puede describirse mediante las ecuaciones:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ v_k \end{bmatrix}$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_k$$

donde $v(k)$ es una secuencia de variables aleatorias normales de media nula e independientes. Supóngase que x(0) es normal de media nula y matriz de covarianza unidad. Determinar las ecuaciones de la matriz de covarianza del error de estimación y el vector de ganancias del filtro de Kalman.

4.3 Considere el problema anterior pero con salida

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + e_k$$

Determinar la covarianza del error de estimación y la ganancia del filtro de Kalman si la varianza de $e(k)$, señal de media nula, es σ^2.

4.4 Dado el sistema

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ v_k \end{bmatrix}$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_k$$

donde $v(k)$ es ruido blanco de media nula y desviación estándar 0.1. Supóngase que se conoce $x(0)$ perfectamente. Determinar la estimación de $x(k+3)$, dado $y(k)$ que minimiza el error de predicción.

ENUNCIADOS PROBLEMAS
TEMA 5: Identificación de sistemas

5.1 Considérese el sistema:

$$y(t) - 0.8 \cdot y(t-1) = u(t-1) + e(t) - 0.8 \cdot e(t-1)$$

Se supone que las entradas *u*(.) y *e*(.) son ruido blanco de varianza 1. Para este sistema se considera un modelo de la forma:

$$y(t) + a \cdot y(t-1) = b \cdot u(t-1)$$

a) Obtener por mínimos cuadrados las estimas de los parámetros de este modelo.
b) Cuando $t \to \infty$ ¿Qué parámetro coincide con el del sistema real y cuál no? ¿Por qué?.
c) ¿Se puede conseguir que las estimas de los dos parámetros (*a* y *b*) no estén polarizadas? ¿Como?

5.2 Considérese el sistema:

$$y(k) + a \cdot y(k-1) = u(k) + e(k)$$

donde *u* es la variable de control (supóngase que es ruido blanco de varianza λ^2), *y* es la salida y $\{e(k)\}$ es una secuencia de variables aleatorias gaussianas independientes de varianza σ^2. Considérese un controlador autosintonizante basado en el modelo:

$$y(k) + \beta \cdot y(k-1) = u(k-1) + e(k)$$

a) Obtener la estima de mínimos cuadrados de β basada en los datos disponibles hasta el instante *k* (es decir, y(k), y(k-1),..., y(1), u(k-1),..., u(1))
b) Estudiar si $\beta \to a$ cuando $k \to \infty$.
c) Describir un algoritmo recursivo de estimación para este modelo.

Nota: El término e(k) en este modelo está indicando que no existe ruido correlacionado en el modelo. Luego a la hora de realizar los cálculos no hay que tener en cuenta este término.

5.3 Razonar cual es la influencia de la introducción de un factor de olvido en el proceso de identificación de sistemas con parámetros variables con el tiempo y en sistemas con parámetros invariantes con el tiempo.

5.4 Para un sistema descrito por

$$y(t) + a \cdot y(t-1) = b \cdot u(t-1) + e(t)$$

con una ley de control dada por

$$u(t) = -K \cdot y(t)$$

¿Es posible identificar los parámetros de este modelo en lazo cerrado? Justifique razonadamente la respuesta.

5.5 Considérese el sistema:

$$y(k) + a \cdot y(k-1) + b \cdot y(k-2) = u(k) + e(k)$$

donde *u* es la variable de control, *y* es la salida y $\{e(k)\}$ es una secuencia de variables aleatorias gaussianas independientes de varianza σ^2. Considérese un modelo de la forma:

$$y(k) + \theta_1 \cdot y(k-1) + \theta_2 \cdot y(k-2) = u(k-1) + e(k)$$

a) Discutir qué tipo de señales de entrada se debe aplicar para realizar la identificación.
b) Obtener por mínimos cuadrados las estimas de los parámetros de este modelo.
c) Estudiar si $\theta_1 \to a$ y $\theta_1 \to b$ cuando $k \to \infty$.

Nota: El término e(k) en este modelo está indicando que no existe ruido correlacionado en el modelo. Luego a la hora de realizar los cálculos no hay que tener en cuenta este término.

SOLUCIONES PROBLEMAS
TEMA 1: Modelos de sistemas continuos

♦ Solución problema 1.1

a) Para el sistema en la forma (1) la matriz de controlabilidad M_c es:

$$M_c = \left[B \mid A \cdot B\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1.3 \end{pmatrix}$$

El rango de M_c es 2 ya que $|M_c|$=-1, luego el sistema es de estado completamente controlable.

Por otra parte, la matriz de observabilidad es:

$$M_o = \left[C^T \mid A^T \cdot C^T\right] = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg] = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

El rango de M_o es 1 ya que $|M_o|$=0, luego el sistema es no observable.

b) Para el sistema en la forma (2) la matriz de controlabilidad M_c es:

$$M_c = \left[B \mid A \cdot B\right] = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg] = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

El rango de M_c es 1 ya que $|M_c|$=0, luego el sistema no es de estado completamente controlable.

Por otra parte, la matriz de observabilidad es:

$$M_o = \left[C^T \mid A^T \cdot C^T\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1.3 \end{pmatrix}$$

El rango de M_o es 2 ya que $|M_o|$=-1, luego el sistema es observable.

c) La diferencia aparente en la controlabilidad y la observabilidad del mismo sistema la provoca el hecho de que el sistema original tiene una cancelación de polos y ceros en la función de transferencia asociada al sistema en la forma (1):

$$G(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B = [0.8 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0.4 & s+1.3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2 + 1.3 \cdot s + 0.4} \cdot [0.8 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} s+1.3 & 1 \\ -0.4 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+0.8}{(s+0.8) \cdot (s+0.5)}$$

Nótese que se obtendría la misma función de transferencia si se hubiese considerado el sistema en la forma (2).

Si ocurre una cancelación de polos y ceros en la función de transferencia, la controlabilidad y la observabilidad varían, dependiendo de cómo se eligen las variables de estado. Recuérdese que para ser de estado completamente controlable y observable, la función de transferencia no debe tener cancelaciones de polos ni ceros.

♦

♦ Solución problema 1.2

La matriz de controlabilidad del sistema es

$$M_c = \left[B \mid A\cdot B \mid A^2\cdot B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

El rango de M_c es 3 ya que

$$\left|\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right| = -3$$

Luego el sistema es de estado completamente controlable.

Por otra parte, la matriz de observabilidad es:

$$M_o = \left[C^T \mid A^T\cdot C^T \mid \left(A^2\right)^T\cdot C^T\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango de M_o es 2, luego el sistema es no completamente observable.

Finalmente, para analizar la controlabilidad de la salida hay que estudiar el rango de la siguiente matriz

$$M_{cy} = \left[C\cdot B \mid C\cdot A\cdot B \mid C\cdot A^2\cdot B \mid D\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango de M_{cy} es 2, luego el sistema es de salida completamente controlable.

♦

♦ Solución problema 1.3

En primer lugar hay que comprobar que el sistema es de estado completamente controlable, ya que sólo en dicho caso podrá realizarse una ubicación arbitraria de polos. La matriz de controlabilidad para este sistema es:

$$M_c = [B \mid A \cdot B] = \left[\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

El rango de M_c es 2, ya que $|M_c|=-4$, luego el sistema es de estado completamente controlable. Por tanto es posible la ubicación arbitraria de polos.

Para sistema de ordenes pequeños ($n \leq 3$) una forma sencilla de calcular *K* es igualando la ecuación característica en lazo cerrado $|s \cdot I - (A - B \cdot K)|$,

$$|s \cdot I - (A - B \cdot K)| = \left| \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 + 2 \cdot K_1 & s + 3 + 2 \cdot K_2 \end{bmatrix} \right| = s^2 + (3 + 2 \cdot k_2) \cdot s + (2 + 2 \cdot k_1)$$

con la ecuación característica deseada:

$$(s+3) \cdot (s+5) = s^2 + 8 \cdot s + 15$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 3 + 2 \cdot k_2 &= 8 \\ 2 + 2 \cdot k_1 &= 15 \end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores se obtienen los elementos del vector de ganancias *K*

$$K = [k_1 \quad k_2] = [6.5 \quad 2.5]$$

Asimismo, la señal de control *u* es:

$$u = -K \cdot x = [6.5 \quad 2.5] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

♦

♦ Solución problema 1.4

En primer lugar hay que comprobar la observabilidad del sistema, para ello se calcula la matriz de observabilidad:

$$M_o = \left[C^T \mid A^T \cdot C^T \mid \left(A^2\right)^T \cdot C^T \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $|M_o|=1$ el rango de M_o es 3, por lo tanto el sistema es de estado completamente observable y es posible la determinación de la matriz de ganancias del observador K_e.

a) <u>Determinación de K_e mediante sustitución directa</u>

Este método consiste en igualar la ecuación característica del observador con la ecuación característica deseada. Para este sistema se tendría:

$$\left| s \cdot I - A + K_e \cdot C \right| = (s+\mu_1)\cdot(s+\mu_2)\cdot(s+\mu_3) = (s+2-j\cdot 2\cdot\sqrt{3})\cdot(s+2+j\cdot 2\cdot\sqrt{3})\cdot(s+5) = s^3 + 9\cdot s^2 + 36\cdot s + 80$$

Desarrollando el lado izquierdo de la ecuación anterior se obtiene:

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \\ k_{e3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s+k_{e1} & -1 & 0 \\ k_{e2} & s & -1 \\ 6+k_{e3} & 11 & s+6 \end{vmatrix} =$$
$$= s^3 + (k_{e1}+6)\cdot s^2 + (6\cdot k_{e1} + k_{e2} + 11)\cdot s + (11\cdot k_{e1} + 6\cdot k_{e2} + k_{e3} + 6)$$

Luego:

$$s^3 + (k_{e1}+6)\cdot s^2 + (6\cdot k_{e1} + k_{e2} + 11)\cdot s + (11\cdot k_{e1} + 6\cdot k_{e2} + k_{e3} + 6) = s^3 + 9\cdot s^2 + 36\cdot s + 80$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & k_{e1} + 6 = 9 \\ & 6\cdot k_{e1} + k_{e2} + 11 = 36 \\ & 11\cdot k_{e1} + 6\cdot k_{e2} + k_{e3} + 6 = 80 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$K_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \\ k_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a) <u>Determinación de K_e mediante la fórmula de Ackerman</u>

La fórmula de Ackerman para la obtención de K_e es:

$$K_e = \left(e_n \cdot M_o^{-1} \cdot \phi(A^T)\right)^T$$

Para aplicar esta fórmula hay que calcular en primer lugar la inversa de la matriz de observabilidad:

$$M_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica deseada para el observador es

$$\Delta^c(s) = (s+\mu_1)\cdot(s+\mu_2)\cdot(s+\mu_3) = (s+2-j\cdot 2\cdot\sqrt{3})\cdot(s+2+j\cdot 2\cdot\sqrt{3})\cdot(s+5) = s^3 + 9\cdot s^2 + 36\cdot s + 80$$

Por el Teorema de Caley-Hamilton se obtiene $\phi(A)$:

$$\phi(A) = A^3 + 9\cdot A^2 + 36\cdot A + 80\cdot I$$

Y evaluándola en A^T:

$$\phi(A^T) = \left(A^T\right)^3 + 9\cdot\left(A^T\right)^2 + 36\cdot\left(A^T\right) + 80\cdot I =$$
$$= \begin{bmatrix} -6 & 36 & -150 \\ -11 & 60 & -239 \\ -6 & 25 & -90 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -54 & 324 \\ 0 & -99 & 540 \\ 9 & -54 & 225 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -216 \\ 36 & 0 & -396 \\ 0 & 36 & -216 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 74 & -18 & -42 \\ 25 & -41 & -95 \\ 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego sustituyendo en la fórmula de Ackerman y operando se obtiene:

$$K_e = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 74 & -18 & -42 \\ 25 & -41 & -95 \\ 3 & 7 & -1 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

♦

♦ Solución problema 1.5

El vector de estado y las matrices A y B se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ -- \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a \\ -- \\ x_b \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & | & 1 & 0 \\ -- & -- & -- & -- \\ 0 & | & 0 & 1 \\ -6 & | & -11 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & | & A_{ab} \\ -- & -- & -- \\ A_{ba} & | & A_{bb} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -- \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_a \\ -- \\ B_b \end{bmatrix}$$

Luego se tiene:

$$x_a = x_1 \qquad x_b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A_{aa} = 0 \qquad A_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{ba} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} \quad A_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B_a = 0 \;\; B_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para que sea posible la determinación de la matriz de ganancias del observador K_e y poder diseñar el observador de orden mínimo, la condición de observabilidad que se debe cumplir es que:

$$O_{min} = \begin{bmatrix} A_{ab} \\ A_{ab} \cdot A_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sea de rango n-1=3-1=2. Efectivamente esto es así.

La ecuación característica deseada para el observador de orden mínimo es:

$$\Delta^c_{\min}(s) = (s+10) \cdot (s+10) = s^2 + 20 \cdot s + 100 = 0 \tag{1.1}$$

Luego $\phi(A_{bb})$ es:

$$\phi(A_{bb}) = A_{bb}{}^2 + 20 \cdot A_{bb} + 100 \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}^2 + 20 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} + 100 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89 & 14 \\ -154 & 5 \end{bmatrix}$$

Luego la matriz de ganancias del observador es:

$$K_e = \phi(A_{bb}) \cdot \left(M_o^{\min}\right)^{-1} \cdot e_{n-1}^T = \begin{bmatrix} 89 & 14 \\ -154 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix}$$

♦

SOLUCIONES PROBLEMAS
TEMA 2: Modelos de sistemas discretos

♦ Solución problema 2.1

El sistema tiene la siguiente función de transferencia

$$G(z) = \frac{z+1}{z^2 + 1.3z + 0.4}$$

Comparando con la expresión:

$$G(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

Se obtiene:

$$b_0 = 1,\ b_1 = 1,\ a_1 = 1.3,\ a_2 = 0.4$$

a) *Forma canónica controlable*

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix} \cdot x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u_k$$
$$y_k = [b_1 \quad b_0] \cdot x_k = [1 \quad 1] \cdot x_k$$

b) *Forma canónica observable*

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot x_k + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \cdot u_k$$
$$y_k = [1 \quad 0] \cdot x_k$$

Los elementos g_1 y g_2 provienen del desarrollo en *serie de Laurent* en el origen de $G(z)$.

$$G(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \cdot z^{-k} = g_0 + g_1 \cdot z^{-1} + g_2 \cdot z^{-2} + \ldots \qquad (2.2)$$

En el caso de sistemas discretos este desarrollo se obtiene dividiendo de forma directa el numerador y el denominador de la función de transferencia $G(z^{-1})$, que en este caso es:

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 + 1.3 \cdot z^{-1} + 0.4 \cdot z^{-2}}$$

Dividiendo

$$\begin{array}{l|l} z^{-1} + \quad z^{-2} & 1+1.3\cdot z^{-1}+0.4\cdot z^{-2} \\ \hline -z^{-1}-1.3\cdot z^{-2}-0.4\cdot z^{-3} & z^{-1}-0.3\cdot z^{-2}+\ldots \\ \quad -0.3\cdot z^{-2}-0.4\cdot z^{-3} & \\ \quad +0.3z^{-2}+0.39\cdot z^{-3}+0.12\cdot z^{-4} & \\ \qquad -0.01\cdot z^{-3}+0.12\cdot z^{-4} & \\ \qquad \vdots & \end{array}$$

Se obtiene g_1=1 y g_2=-0.3, luego

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix}\cdot x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.3 \end{bmatrix}\cdot u_k$$
$$y_k = [1 \quad 0]\cdot x_k$$

c) *Forma canónica de Jordan*

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\cdot x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot u_k$$
$$y_k = [c_1 \quad c_2]\cdot x_k$$

Los coeficientes c_i y los autovalores λ_i i=1,2 se obtienen desarrollando en fracciones simples la función de transferencia $G(z)$:

$$G(z) = \frac{z+1}{z^2+1.3z+0.4} = \frac{5/3}{z+0.5} + \frac{-2/3}{z+0.8} = \frac{c_1}{z-\lambda_1} + \frac{c_2}{z-\lambda_2}$$

Luego

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix}\cdot x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot u_k$$
$$y_k = [5/3 \quad -2/3]\cdot x_k$$

♦

♦ Solución problema 2.2

a) Para el sistema considerado se tiene que

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

Si se define el vector de ganancias de realimentación como

$$K = [k_1 \quad k_2]$$

la ecuación característica en lazo cerrado es:

$$|z \cdot I - (F \cdot - G \cdot K)| = \begin{vmatrix} z - 1 + \frac{T^2}{2} \cdot k_1 & -T + \frac{T^2}{2} \cdot k_2 \\ T \cdot k_1 & z - 1 + T \cdot k_2 \end{vmatrix} = z^2 - \left(2 - \frac{T^2}{2} \cdot k_1 - T \cdot k_2\right) \cdot z + 1 + \frac{T^2}{2} \cdot k_1 - T \cdot k_2 = 0$$

Asimismo, la ecuación característica deseada es

$$z^2 = 0$$

Igualando los coeficientes de ambas ecuaciones características se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$2 - \frac{T^2}{2} \cdot k_1 - T \cdot k_2 = 0$$
$$1 + \frac{T^2}{2} \cdot k_1 - T \cdot k_2 = 0$$

Resolviendo se obtiene:

$$k_1 = \frac{1}{T^2}; \ k_2 = \frac{3}{2 \cdot T}$$

Luego:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{T^2} & \frac{3}{2 \cdot T} \end{bmatrix}$$

Aunque no lo pide el problema, a continuación se va a demostrar que la respuesta a las condiciones iniciales es con oscilaciones muertas. Suponga que el estado inicial es:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

La ecuación con la realimentación del estado es:

$$x((k+1) \cdot T) = (F - G \cdot K) \cdot x(k \cdot T)$$

sustituyendo valores se obtiene

$$\begin{bmatrix} x_1((k+1)\cdot T) \\ x_2((k+1)\cdot T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{T}{4} \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k\cdot T) \\ x_2(k\cdot T) \end{bmatrix}$$

Se observa que

$$\begin{bmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{T}{4} \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{T}{4} \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{T}{4}\cdot b \\ -\frac{1}{T}\cdot a - \frac{1}{2}\cdot b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(2\cdot T) \\ x_2(2\cdot T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{T}{4} \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{T}{4}\cdot b \\ -\frac{1}{T}\cdot a - \frac{1}{2}\cdot b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, queda claro que la respuesta es con oscilaciones muertas.

b) En primer lugar se va a determinar *u(kT)*

$$u(k\cdot T) = -K\cdot x(k\cdot T) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{T^2} & \frac{3}{2\cdot T} \end{bmatrix} \cdot x(K\cdot T)$$

Por lo tanto:

$$u(0) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{T^2} & \frac{3}{2\cdot T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -\frac{a}{T^2} - \frac{3\cdot b}{2\cdot T}$$

$$u(T) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{T^2} & \frac{3}{2\cdot T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{T}{4}\cdot b \\ -\frac{1}{T}\cdot a - \frac{1}{2}\cdot b \end{bmatrix} = \frac{a}{T^2} + \frac{b}{2\cdot T}$$

En el enunciado se indica que a=1 y b=1, luego

$$u(0) = -\frac{1}{T^2} - \frac{3}{2\cdot T} \qquad u(T) = \frac{1}{T^2} + \frac{1}{2\cdot T}$$

Para T=0.1 s se obtiene

$$u(0) = -115 \qquad u(T) = u(0.1) = 105$$

Para T=1 s se obtiene

$$u(0) = -2.5 \qquad u(T) = u(1) = 1.5$$

Para T=10 s se obtiene

$$u(0) = -0.16 \qquad u(T) = u(10) = 0.06$$

Se observa que para un valor pequeño del periodo de muestreo se hacen grandes $u(0)$ y $u(T)$. Al aumentar el valor del periodo de muestreo T se reducen de forma significativa las magnitudes de $u(0)$ y de $u(T)$.

♦

♦ Solución problema 2.3

Para la planta dada

$$A(z) = z^2 + z + 0.16$$
$$B(z) = 1$$

Por lo tanto a_1=1, a_2=0.16, b_0=0, b_1=0, b_2=1. Para determinar α(z) y β(z), se debe resolver la siguiente ecuación Diofántica:

$$\alpha(z) \cdot A(z) + \beta(z) \cdot B(z) = F(z) \cdot H(z) = D(z)$$

Se tiene que

$$D(z) = F(z) \cdot H(z) = z \cdot (z^2 - 1.2 \cdot z + 0.52) = z^3 - 1.2 \cdot z^2 + 0.52 \cdot z$$

Por lo tanto d_0=1, d_1=-1.2, d_2=0.52, d_3=0.

Además

$$\alpha(z) = \alpha_0 \cdot z + \alpha_1$$
$$\beta(z) = \beta_0 \cdot z + \beta_1$$

Para resolver la ecuación Diofántica hay que resolver el sistema de ecuaciones:

$$E \cdot M = D$$

Donde E es la matriz de Sylvester E, que en este caso toma la forma

$$E = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ 1 & a_1 & b_0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.16 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0.16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Asimismo el vector *D* es:

$$D = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.52 \\ -1.2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego el sistema a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.02 & 0 \\ -2 & 1 & 0.02 & 0.02 \\ 1 & -2 & 0 & 0.02 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.52 \\ -1.2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviéndolo se obtiene: α_1=-2.2, α_0=1, β_1=0.352 y β_0=2.56

Luego

$$\alpha(z) = z - 2.2$$
$$\beta(z) = 2.56 \cdot z + 0.352$$

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 \cdot B(z)}{H(z)} = K_0 \cdot \frac{1}{z^2 - 1.2 \cdot z + 0.52}$$

Para determinar la constante K_0 se requiere que y(∞) en la respuesta al escalón unitario sea igual a uno.

$$\lim_{k \to \infty} y(k) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \cdot Y(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{K_0}{z^2 - 1.2 \cdot z + 0.52} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{K_0}{0.32} = 1$$

Luego

$$K_0 = 8$$

Entonces la función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{8}{z^2 - 1.2\cdot z + 0.52}$$

♦

♦ Solución problema 2.4

En primer lugar hay que obtener la función de transferencia de la planta a partir de la representación mediante variables de estado:

$$G_p(z) = C\cdot(z\cdot I - F)^{-1}\cdot G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 0.5 & 0.2 & z-1.1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{z^3 - 1.1\cdot z^2 + 0.2\cdot z + 0.5} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{bmatrix} = \frac{z}{z^3 - 1.1\cdot z^2 + 0.2\cdot z + 0.5} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Luego:

$$A(z) = z^3 - 1.1\cdot z^2 + 0.2\cdot z + 0.5$$
$$B(z) = z$$

En consecuencia

$$a_1 = -1.1,\ a_2 = 0.2,\ a_3 = 0.5$$
$$b_0 = 0,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0$$

Por otra parte el polinomio característico para el sistema completo es:

$$D(z) = F(z)\cdot H(z) = z^3\cdot z^2 = z^5$$

Por lo tanto:

$$d_0 = 1,\ d_1 = 0,\ d_2 = 0,\ d_3 = 0,\ d_4 = 0,\ d_5 = 0$$

Para determinar α(z) y β(z), se debe resolver la siguiente ecuación Diofántica:

$$\alpha(z)\cdot A(z) + \beta(z)\cdot B(z) = F(z)\cdot H(z) = D(z)$$

Donde

$$\alpha(z)=\alpha_0\cdot z^2+\alpha_1\cdot z+\alpha_2$$
$$\beta(z)=\beta_0\cdot z^2+\beta_1\cdot z+\beta_2$$

Para resolver la ecuación Diofántica hay que resolver el sistema de ecuaciones:

$$E\cdot M=D$$

Donde *E* es la matriz de Sylvester *E*, que en este caso toma la forma

$$E=\begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.1 & 0.2 & 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1.1 & 0.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Asimismo el vector *D* es:

$$D=\begin{bmatrix} d_5 \\ d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego el sistema a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.1 & 0.2 & 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1.1 & 0.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviéndolo se obtiene: α_2=-0, α_1=1.1, α_0=1, β_2=-0.55, β_1=-0.72, β_0=1.01

Luego

$$\alpha(z)=z^2+1.1\cdot z$$
$$\beta(z)=1.01\cdot z^2-0.72\cdot z-0.55$$

Por lo tanto el controlador diseñado es:

$$\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \frac{1.01\cdot z^2 - 0.72\cdot z - 0.55}{z^2 + 1.1\cdot z}$$

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0\cdot\alpha(z)\cdot B(z)}{\alpha(z)\cdot A(z) + \beta(z)\cdot B(z)} = \frac{K_0\cdot\alpha(z)\cdot\beta(z)}{H(z)\cdot F(z)} = \frac{K_0\cdot(z^2 + 1.1\cdot z)\cdot z}{z^5} = \frac{K_0\cdot(z+1.1)}{z^3}$$

Para determinar la constante K_0 se requiere que $y(\infty)$ en la respuesta al escalón unitario sea igual a uno.

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\cdot Y(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\cdot\frac{K_0\cdot(z+1.1)}{z^3}\cdot\frac{z}{z-1} = 2.1\cdot K_0 = 1$$

Luego

$$K_0 = 0.4762$$

Entonces la función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.4762\cdot(z+1.1)}{z^3}$$

♦

♦ Solución problema 2.5

Para este problema la función de transferencia de la planta es:

$$G_p(z) = \frac{z}{z^3 - 1.1\cdot z^2 + 0.2\cdot z + 0.5} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

La ecuación diofántica para este problema es:

$$\alpha(z)\cdot(z^3 - 1.1\cdot z^2 + 0.2\cdot z + 0.5) + \beta(z)\cdot z = z^5$$

Esta ecuación es la misma que fue resuelta en el problema 2.4, luego

$$\alpha(z) = z^2 + 1.1\cdot z$$
$$\beta(z) = 1.01\cdot z^2 - 0.72\cdot z - 0.55$$

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 \cdot B(z)}{H(z)} = K_0 \cdot \frac{z}{z^3} = \frac{K_0}{z^2}$$

Para determinar la ganancia K_0 se requiere que y(∞) en la respuesta al escalón unitario sea igual a uno.

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1}) \cdot Y(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{K_0}{z^2} \cdot \frac{z}{z-1} = K_0 = 1$$

Luego

$$K_0 = 1$$

Entonces la función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1}{z^2}$$

♦

♦ Solución problema 2.6

a) Para la planta dada

$$B(z) = z + 0.5$$
$$A(z) = z^3 - z^2 + 0.01z + 0.12$$

Por lo tanto a_1=-1, a_2=0.01, a_3=0.12 b_0=0, b_1=0, b_2=1, b_3=0.5. Por otra parte, se observa que no existen factores comunes entre *A*(*z*) y *B*(*z*). En este problema se puede seleccionar $H_1(z)$ como

$$H_1(z) = z^2 - 1.2z + 0.52$$

con el objetivo de cancelar una parte del denominador del modelo $G_m(z)$. Conviene resaltar que esta elección de $H_1(z)$ no es única, de hecho existe una infinidad de elecciones posibles. El único requisito necesario es que $H_1(z)$ debe ser un polinomio estable de grado *n*-1 (en este problema *n*=3).

Por otra parte se define

$$H(z) = B(z) \cdot H_1(z) = (z + 0.5) \cdot (z^2 - 1.2z + 0.52) = z^3 - 0.7 \cdot z^2 - 0.08 \cdot z + 0.26$$

Ahora se escoge a F(z) como

$$F(z) = z^2$$

Al igual que ocurría con $H_1(z)$, esta elección de $F(z)$ no es única, de hecho existe una infinidad de elecciones posibles. El único requisito necesario es que $F(z)$ debe ser un polinomio estable de grado n-1 (en este problema n=3).

Luego $D(z)$ es:

$$D(z) = F(z) \cdot H(z) = z^5 - 0.7 \cdot z^4 - 0.08 \cdot z^3 + 0.26 \cdot z^2$$

Por lo tanto d_0=1, d_1=-0.7, d_2=-0.08, d_3=0.26, d_4=0, d_5=0.

Ahora se debe resolver la siguiente ecuación Diofántica:

$$\alpha(z) \cdot A(z) + \beta(z) \cdot B(z) = D(z)$$

Donde α(z) y β(z) son polinomios en z de segundo orden:

$$\alpha(z) = \alpha_0 \cdot z^2 + \alpha_1 \cdot z + \alpha_0$$
$$\beta(z) = \beta_0 \cdot z^2 + \beta_1 \cdot z + \beta_0$$

Para resolver la ecuación Diofántica hay que resolver el sistema de ecuaciones:

$$E \cdot M = D$$

Donde E es la matriz de Sylvester E, que en este caso toma la forma

$$E = \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.12 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ -1 & 0.01 & 0.12 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & -1 & 0.01 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Asimismo el vector D es:

$$D = \begin{bmatrix} d_5 \\ d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.26 \\ -0.08 \\ -0.7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego el sistema a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.12 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ -1 & 0.01 & 0.12 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & -1 & 0.01 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.26 \\ -0.08 \\ -0.7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviéndolo se obtiene: α_2=-0.1, α_1=0.3, α_0=1, β_2=0.024, β_1=-0.118, β_0=0.31

Luego

$$\alpha(z) = z^2 + 0.3 \cdot z - 0.1$$
$$\beta(z) = 0.31 \cdot z^2 - 0.118 \cdot z + 0.024$$

b) La función de transferencia *Y*(*z*)/*V*(*z*) es:

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{F(z) \cdot B(z)}{F(z) \cdot B(z) \cdot H_1(z)} = \frac{1}{H_1(z)} = \frac{1}{z^2 - 1.2z + 0.52}$$

Puesto que:

$$\frac{V(z)}{R(z)} = G_m \cdot H_1(z) = \frac{(0.64 \cdot z - 0.512) \cdot (z^2 - 1.2z + 0.52)}{(z^2 - 1.2z + 0.52) \cdot (z - 0.6)} = \frac{0.64 \cdot z - 0.512}{z - 0.6}$$

Se tiene que la función de transferencia *Y*(*z*)/*R*(*z*) es

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{Y(z) \cdot V(z)}{V(z) \cdot R(z)} = \frac{1}{z^2 - 1.2z + 0.52} \cdot \frac{0.64 \cdot z - 0.512}{z - 0.6} = G_m$$

♦

SOLUCIONES PROBLEMAS
TEMA 3: Modelos de perturbaciones

♦ Solución problema 3.1

Comparando las ecuaciones del proceso con la expresión general de un proceso lineal discreto estocástico se obtiene:

$$F = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ -0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$

En primer lugar se va a calcular la incertidumbre en el estado *P*(*k*) que de acuerdo con el Teorema 3.1 viene dada por la ecuación:

$$P(k+1) = \mathrm{F}\cdot P(k)\cdot F^T + R_1$$

Por simplificar la escritura se va a utilizar la siguiente notación:

$$P(k) = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(k) & f(k) \\ g(k) & h(k) \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{bmatrix} e(k+1) & f(k+1) \\ g(k+1) & h(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ -0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e(k) & f(k) \\ g(k) & h(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4 & -0.6 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Operando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} e(k+1) & f(k+1) \\ g(k+1) & h(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.16\cdot e(k)+1 & -0.24\cdot e(k)+0.08\cdot f(k) \\ -0.24\cdot e(k)+0.08\cdot g(k) & 0.36\cdot e(k)-0.12\cdot g(k)-0.12\cdot f(k)+0.04\cdot h(k)+2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto para obtener las expresiones de *e*(*k*), *f*(*k*), *g*(*k*) y *h*(*k*) hay que resolver cuatro ecuaciones en diferencias.

Se va a resolver en primer lugar la ecuación en diferencias:

$$e(k+1) = 0.16\cdot e(k) + 1$$

Tomando la transformada *Z* se obtiene:

$$E(z)\cdot z - e(0)\cdot z = 0.16\cdot E(z) + \frac{z}{z-1}$$

Despejando *E*(*z*)

$$E(z) = \frac{e(0) \cdot z}{(z-0.16)} + \frac{z}{(z-1) \cdot (z-0.16)}$$

y descomponiendo en fracciones simples el segundo termino se obtiene

$$E(z) = \frac{e(0) \cdot z}{(z-0.16)} + \left[\frac{\frac{-0.16}{0.84}}{z-0.16} + \frac{\frac{1}{0.84}}{z-1} \right]$$

Tomando la transformada Z inversa se obtiene:

$$e(k) = e(0) \cdot 0.16^k - \left(\frac{1}{0.84} \right) \cdot 0.16^k + \frac{1}{0.84} \qquad k = 1, 2, 3, ...$$

Supuesto que $e(k_0)=e_0$, entonces:

$$e(k_0) = e_0 = e(0) \cdot 0.16^{k_0} - \left(\frac{1}{0.84} \right) \cdot 0.16^{k_0} + \frac{1}{0.84}$$

Despejando el valor de *e*(0)

$$e(0) = e_0 \cdot 0.16^{-k_0} + \left(\frac{1}{0.84} \right) - \left(\frac{1}{0.84} \right) \cdot 0.16^{-k_0}$$

Con lo que:

$$e(k) = e_0 \cdot 0.16^{k-k_0} - \left(\frac{1}{0.84} \right) \cdot 0.16^{k-k_0} + \frac{1}{0.84} \qquad k = 1, 2, 3, ...$$

En el estacionario $k_0 \to -\infty$ entonces

$$e(k) = \frac{1}{0.84} = 1.1905$$

Si se compara esta expresión con la expresión de E(z) se observa que e(k) en el estacionario coincide con el coeficiente de la fracción 1/(z-1).

Se va a resolver en segundo lugar la ecuación en diferencias:

$$f(k+1) = -0.24 \cdot e(k) + 0.08 \cdot f(k)$$

Tomando la transformada *Z*

$$F(z)\cdot z - f(0)\cdot z = -0.24\cdot E(z) + 0.08\cdot F(z)$$

y despejando *F*(*z*) se obtiene:

$$F(z) = \frac{f(0)\cdot z}{z-0.08} - \frac{0.24\cdot E(z)}{z-0.08}$$

Sustituyendo el valor de E(z) calculado con anterioridad se obtiene la expresión

$$F(z) = \frac{f(0)\cdot z}{z-0.08} + \frac{\alpha_1\cdot z}{(z-0.08)\cdot(z-0.16)} + \frac{\alpha_2}{(z-0.08)\cdot(z-0.16)} + \frac{\alpha_3}{(z-0.08)\cdot(z-1)}$$

$$\alpha_1 = -0.24\cdot e(0)$$

$$\alpha_2 = 0.24\cdot\frac{0.16}{0.84}$$

$$\alpha_3 = -\frac{0.24}{0.84}$$

Por otra parte como

$$\frac{c\cdot z+d}{(z-a)\cdot(z-b)} = \frac{\frac{-c\cdot a-d}{b-a}}{(z-a)} + \frac{\frac{c\cdot b+d}{b-a}}{(z-b)}$$

entonces descomponiendo en fracciones simples a *F*(*z*) se obtiene

$$F(z) = \frac{f(0)\cdot z}{z-0.08} - \frac{\alpha_1}{(z-0.08)} + \frac{2\alpha_1}{(z-0.16)} - \frac{\frac{\alpha_2}{0.08}}{(z-0.08)} + \frac{\frac{\alpha_2}{0.08}}{(z-0.16)} - \frac{\frac{\alpha_3}{0.92}}{(z-0.08)} + \frac{\frac{\alpha_3}{0.92}}{(z-1)}$$

Aplicando la transformada Z inversa se obtiene la siguiente expresión si *k*=1, 2, 3,...

$$f(k) = f(0)\cdot 0.08^{k} - \alpha_1 0.08^{k-1} + 2\alpha_1\cdot 0.16^{k-1} - \frac{\alpha_2}{0.08}0.08^{k-1} + \frac{\alpha_2}{0.08}\cdot 0.16^{k-1} - \frac{\alpha_3}{0.92}0.08^{k-1} + \frac{\alpha_3}{0.92}$$

Supuesto que $f(k_0)=f_0$ entonces

$$f(k) = f(k_0)\cdot 0.08^{k-k_0} - \alpha_1 0.08^{k-k_0-1} + 2\alpha_1\cdot 0.16^{k-k_0-1} - \frac{\alpha_2}{0.08}0.08^{k-k_0-1} + \frac{\alpha_2}{0.08}\cdot 0.16^{k-k_0-1} - \frac{\alpha_3}{0.92}0.08^{k-k_0-1} + \frac{\alpha_3}{0.92}$$

En el estacionario $k_0 \to -\infty$ entonces

$$f(k) = \frac{\alpha_3}{0.92} - \frac{0.24}{0.84\cdot 0.92} = -0.3106$$

Si se compara esta expresión con la expresión de *F*(*z*) se observa que *f*(*k*) en el estacionario coincide con el coeficiente de la fracción 1/(*z*-1).

Por analogía la ecuación en diferencias

$$g(k+1) = -0.24 \cdot e(k) + 0.08 \cdot g(k)$$

tiene la siguiente solución en el estacionario:

$$g(k) = -\frac{0.24}{0.84 \cdot 0.92} = -0.3106$$

Por último queda resolver la ecuación en diferencias

$$h(k+1) = 0.36 \cdot e(k) - 0.12 \cdot g(k) - 0.12 \cdot f(k) + 0.04 \cdot h(k) + 2$$

Tomando la transformada z

$$H(z) \cdot z - h(0) \cdot z = 0.36 \cdot E(z) - 0.12 \cdot G(z) - 0.12 \cdot F(z) + 0.04 \cdot H(z) + \frac{2 \cdot z}{z-1}$$

y despejando *H*(*z*) se obtiene:

$$H(z) = \frac{h(0) \cdot z}{z-0.04} + \frac{0.36 \cdot E(z)}{z-0.04} - \frac{0.12 \cdot G(z)}{z-0.04} - \frac{0.12 \cdot F(z)}{z-0.04} + \frac{2 \cdot z}{(z-1) \cdot (z-0.04)}$$

Sustituyendo las expresiones de *E*(*z*), *F*(*z*) y *G*(*z*) obtenidas con anterioridad se obtiene:

$$H(z) = \frac{h(0) \cdot z}{z-0.04} + \frac{0.36}{z-0.04} \cdot \left[\frac{e(0) \cdot z}{(z-0.16)} + \left[\frac{\frac{-0.16}{0.84}}{z-0.16} + \frac{\frac{1}{0.84}}{z-1} \right] \right]$$

$$-\frac{0.24}{z-0.04} \cdot \left[\frac{f(0) \cdot z}{z-0.08} - \frac{\alpha_1}{(z-0.08)} + \frac{2\alpha_1}{(z-0.16)} - \frac{\frac{\alpha_2}{0.08}}{(z-0.08)} + \frac{\frac{\alpha_2}{0.08}}{(z-0.16)} - \frac{\frac{\alpha_3}{0.92}}{(z-0.08)} + \frac{\frac{\alpha_3}{0.92}}{(z-1)} \right]$$

$$+\frac{2 \cdot z}{(z-1) \cdot (z-0.04)}$$

Aunque se podría proceder como en los casos anteriores es más sencillo usar la propiedad observada con anterioridad: La solución de *h*(*k*) en el estacionario será el coeficiente de la fracción 1/(*z*-1). Luego basta con quedarnos con los siguientes términos de la expresión anterior

$$\frac{\frac{0.36}{0.84}}{(z-0.04)(z-1)}-\frac{0.24\cdot\frac{\alpha_3}{0.92}}{(z-0.04)(z-1)}+\frac{2\cdot z}{(z-1)\cdot(z-0.04)}$$

Descomponiendo en fracciones simples y quedándose únicamente con los términos 1/(z-1) se obtiene

$$\frac{\frac{0.36}{0.84\cdot 0.96}}{(z-1)}-\frac{\frac{0.24\cdot\alpha_3}{0.92\cdot 0.96}}{(z-1)}+\frac{\frac{2}{0.96}}{(z-1)}$$

Luego

$$h(k)=\frac{0.36}{0.84\cdot 0.96}-\frac{0.24\cdot\alpha_3}{0.92\cdot 0.96}+\frac{2}{0.96}=\frac{1}{0.96}\cdot\left[\frac{0.36}{0.84}-\frac{0.24\cdot\alpha_3}{0.92}+2\right]=$$
$$=\frac{1}{0.96}\cdot\left[\frac{0.36}{0.84}+\frac{0.24^2}{0.92\cdot 0.84}+2\right]=2.6074$$

Luego P(k) en el estacionario es:

$$P(k)=\begin{bmatrix}1.1905 & -0.3106\\ -0.3106 & 2.6074\end{bmatrix}$$

Por otra parte, de acuerdo con el Teorema 3.1, la función de covarianza estacionaria del proceso $r_x(\tau)$ viene dada por la ecuación:

$$r_x(\tau)=F^{\tau}\cdot P(k)\quad \tau\geq 0$$

Operando se obtiene que

$$F^{\tau}=\begin{bmatrix}0.4 & 0\\ -0.6 & 0.2\end{bmatrix}^{\tau}=\begin{bmatrix}0.4^{\tau} & 0\\ b(\tau) & 0.2^{\tau}\end{bmatrix}$$

donde

$$b(\tau)=\begin{cases}0 & \tau=0\\ -0.6\cdot\sum_{j=0}^{\tau-1}0.4^{\tau-j}\cdot 0.2^{j} & \tau>0\end{cases}$$

Finalmente realizando un producto de matrices se obtiene:

$$r_x(\tau)=\begin{bmatrix} 1.1905{\cdot}0.4^{\tau} & -0.3106{\cdot}0.4^{\tau} \\ 1.1905{\cdot}b(\tau)-0.3106{\cdot}0.2^{\tau} & -0.3106{\cdot}b(\tau)+2.6074{\cdot}0.2^{\tau} \end{bmatrix} \quad \tau\geq 0$$

♦

♦ Solución problema 3.2

Comparando las ecuaciones del proceso con la expresión general de un proceso lineal discreto estocástico se obtiene:

$$F=\begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

En primer lugar se va a calcular la incertidumbre en el estado *P*(*k*) que de acuerdo con el Teorema 3.1 viene dada por la ecuación:

$$P(k+1)=\mathrm{F}{\cdot}P(k){\cdot}F^T+R_1 \qquad P(0)=R_0$$

Por simplificar la escritura se va a utilizar la siguiente notación:

$$P(k)=\begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e(k) & f(k) \\ g(k) & h(k) \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{bmatrix} e(k+1) & f(k+1) \\ g(k+1) & h(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}{\cdot}\begin{bmatrix} e(k) & f(k) \\ g(k) & h(k) \end{bmatrix}{\cdot}\begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Operando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} e(k+1) & f(k+1) \\ g(k+1) & h(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2{\cdot}e(k)+\sigma_1^2 & a{\cdot}b{\cdot}f(k) \\ a{\cdot}b{\cdot}g(k) & b^2{\cdot}h(k)+\sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Luego para obtener las expresiones de *e*(*k*), *f*(*k*), *g*(*k*) y *h*(*k*) hay que resolver cuatro ecuaciones en diferencias.

Se va a resolver en primer lugar la ecuación en diferencias:

$$e(k+1)=a^2{\cdot}e(k)+\sigma_1^2$$

Tomando la transformada *Z*

$$E(z)\cdot z - e(0)\cdot z = a^2\cdot E(z) + \sigma_1^2\cdot\frac{z}{z-1}$$

y despejando $E(z)$ se obtiene:

$$E(z) = \frac{e(0)\cdot z}{(z-a^2)} + \sigma_1^2\cdot\frac{z}{(z-1)\cdot(z-a^2)}$$

Descomponiendo en fracciones simples el segundo termino

$$E(z) = \frac{e(0)\cdot z}{(z-a^2)} + \sigma_1^2\cdot\left[\frac{\frac{-a^2}{1-a^2}}{z-a^2} + \frac{\frac{1}{1-a^2}}{z-1}\right]$$

y tomando la transformada Z inversa se obtiene:

$$e(k) = e(0)\cdot a^{2\cdot k} - \left(\frac{\sigma_1^2}{1-a^2}\right)\cdot a^{2\cdot k} + \left(\frac{\sigma_1^2}{1-a^2}\right) \qquad k = 1,2,3,...$$

Supuesto que $e(k_0)=e_0$, entonces:

$$e(k_0) = e_0 = e(0)\cdot a^{2\cdot k_0} - \left(\frac{\sigma_1^2}{1-a^2}\right)\cdot a^{2\cdot k_0} + \left(\frac{\sigma_1^2}{1-a^2}\right)$$

Despejando el valor de $e(0)$

$$e(0) = e_0\cdot a^{-2\cdot k_0} + \left(\frac{\sigma_1^2}{1-a^2}\right) - \left(\frac{\sigma_1^2}{1-a^2}\right)\cdot a^{-2\cdot k_0}$$

Con lo que:

$$e(k) = e_0\cdot a^{2\cdot(k-k_0)} - \left(\frac{\sigma_1^2}{1-a^2}\right)\cdot a^{2\cdot(k-k_0)} + \left(\frac{\sigma_1^2}{1-a^2}\right) \qquad k = 1,2,3,...$$

En el estacionario $k_0 \to -\infty$ si $|a|<1$ entonces

$$e(k) = \frac{\sigma_1^2}{1-a^2}$$

Por analogía, la ecuación en diferencias

$$h(k+1) = b^2 \cdot h(k) + \sigma_2^2$$

tiene como solución en el estacionario a:

$$h(k) = \frac{\sigma_2^2}{1-b^2}$$

Por otra parte la ecuación en diferencias:

$$f(k+1) = a \cdot b \cdot f(k)$$

tiene como solución

$$f(k) = (a \cdot b)^{k-k_0}$$

En el estacionario $k_0 \to -\infty$ si $|a \cdot b|<1$ entonces $f(k) = 0$.

Por analogía, la ecuación en diferencias

$$g(k+1) = a \cdot b \cdot g(k)$$

tiene como solución en el estacionario a $g(k) = 0$

Luego en el estacionario

$$P(k) = \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_1^2}{1-a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\sigma_2^2}{1-b^2} \end{bmatrix}$$

Por otra parte, de acuerdo con el Teorema 3.1 la función de covarianza del estado viene dada por:

$$r_{xx}(k+\tau, k) = \mathrm{F}^{\tau} \cdot P(k), \qquad \tau \geq 0$$

Hay que calcular F^{τ},

$$F^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}, F^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}, F^3 = \begin{bmatrix} -a^3 & 0 \\ 0 & -b^3 \end{bmatrix}, \ldots, F^{\tau} = \begin{bmatrix} (-a)^{\tau} & 0 \\ 0 & (-b)^{\tau} \end{bmatrix}$$

Luego en el estacionario

$$r_x(\tau) = \begin{bmatrix} \dfrac{(-1)^\tau \cdot a^\tau \sigma_1^2}{1-a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{(-1)^\tau \cdot b^\tau \sigma_2^2}{1-b^2} \end{bmatrix}$$

Asimismo la función de covarianza de la salida viene dada por:

$$r_y(\tau) = C \cdot r_x(\tau) \cdot C^T = [1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{(-1)^\tau \cdot a^\tau \sigma_1^2}{1-a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{(-1)^\tau \cdot b^\tau \sigma_2^2}{1-b^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{(-1)^\tau \cdot a^\tau \sigma_1^2}{1-a^2} + \frac{(-1)^\tau \cdot b^\tau \sigma_2^2}{1-b^2}$$

Para considerar además la posibilidad de que τ pueda ser negativo, la expresión anterior se debe escribir en la forma:

$$r_y(\tau) = \frac{(-1)^{|\tau|} \cdot a^{|\tau|} \sigma_1^2}{1-a^2} + \frac{(-1)^{|\tau|} \cdot b^{|\tau|} \sigma_2^2}{1-b^2}$$

o equivalentemente

$$r_y(\tau) = (-1)^{|\tau|} \cdot a^{|\tau|} c_1 + (-1)^{|\tau|} \cdot b^{|\tau|} c_2$$

donde

$$c_1 = \frac{\sigma_1^2}{1-a^2} \qquad c_2 = \frac{\sigma_2^2}{1-b^2}$$

A continuación hay que calcular la función de densidad espectral de la salida a través de su definición:

$$\Phi_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_y(k) e^{-ik\omega}$$

Que se puede expresar equivalente en la forma:

$$\Phi_y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[r_y(0) + \sum_{k=-\infty}^{-1} r_y(k) e^{-ik\omega} + \sum_{k=1}^{\infty} r_y(k) e^{-ik\omega} \right] = \frac{1}{2\pi}\left[r_y(0) + \sum_{\beta=1}^{\infty} r_y(\beta) e^{i\beta\omega} + \sum_{k=1}^{\infty} r_y(k) e^{-ik\omega} \right]$$

Se van a calcular por separado cada uno de los términos. Para τ=0 se tiene

$$r_y(0) = c_1 + c_2$$

Para τ>0 se tiene

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} r_y(k)e^{-ik\omega} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^k \cdot a^k \cdot c_1 + (-1)^k \cdot b^k \cdot c_2\right]e^{-ik\omega} = c_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \left(a \cdot e^{-i\omega}\right)^k + c_2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \left(b \cdot e^{-i\omega}\right)^k$$

Considerando de forma independiente los términos pares de los impares es posible expresar la ecuación anterior en la forma:

$$S_1 = c_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(a \cdot e^{-i\omega}\right)^{2k} + c_2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(b \cdot e^{-i\omega}\right)^{2k} - c_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \cdot \left(a \cdot e^{-i\omega}\right)^{2k-1} - c_2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(b \cdot e^{-i\omega}\right)^{2k-1}$$

$$S_1 = c_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(a^2 \cdot e^{-i2\omega}\right)^k + c_2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(b^2 \cdot e^{-i2\omega}\right) - c_1 \cdot a^{-1} \cdot e^{i\omega} \sum_{k=1}^{\infty} \cdot \left(a^2 \cdot e^{-i2\omega}\right)^k - c_2 \cdot b^{-1} \cdot e^{i\omega} \sum_{k=1}^{\infty}\left(b^2 \cdot e^{-i2\omega}\right)$$

$$S_1 = (c_1 - c_1 \cdot a^{-1} \cdot e^{i\omega}) \sum_{k=1}^{\infty}\left(a^2 \cdot e^{-i2\omega}\right)^k + (c_2 - c_2 \cdot b^{-1} \cdot e^{i\omega}) \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(b^2 \cdot e^{-i2\omega}\right)$$

Se tienen series de progresiones geométricas que poseen una expresión analítica para su suma, con lo que

$$S_1 = (c_1 - c_1 \cdot a^{-1} \cdot e^{i\omega}) \frac{a^2 \cdot e^{-i2\omega}}{1 - a^2 \cdot e^{-i2\omega}} + (c_2 - c_2 \cdot b^{-1} \cdot e^{i\omega}) \cdot \frac{b^2 \cdot e^{-i2\omega}}{1 - b^2 \cdot e^{-i2\omega}}$$

$$S_1 = \frac{a^2 c_1 - c_1 \cdot a \cdot e^{i\omega}}{e^{i2\omega} - a^2} + \frac{b^2 c_2 - c_2 \cdot b \cdot e^{i\omega}}{e^{i2\omega} - b^2}$$

Para τ<0 se tiene

$$S_2 = \sum_{\beta=1}^{\infty} r_y(\beta)e^{i\beta\omega} = \sum_{\beta=1}^{\infty}\left[(-1)^{\beta} \cdot a^{\beta} \cdot c_1 + (-1)^{\beta} \cdot b^{\beta} \cdot c_2\right]e^{i\beta\omega}$$

siguiendo un procedimiento de cálculo similar al descrito con anterioridad se puede demostrar que:

$$S_2 = \frac{a^2 c_1 - c_1 \cdot a \cdot e^{-i\omega}}{e^{-i2\omega} - a^2} + \frac{b^2 c_2 - c_2 \cdot b \cdot e^{-i\omega}}{e^{-i2\omega} - b^2}$$

Luego la función de densidad espectral de la salida es:

$$\Phi_y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[c_1 + c_2 + \frac{a^2 c_1 - c_1 \cdot a \cdot e^{-i\omega}}{e^{-i2\omega} - a^2} + \frac{b^2 c_2 - c_2 \cdot b \cdot e^{-i\omega}}{e^{-i2\omega} - b^2} + \frac{a^2 c_1 - c_1 \cdot a \cdot e^{i\omega}}{e^{i2\omega} - a^2} + \frac{b^2 c_2 - c_2 \cdot b \cdot e^{i\omega}}{e^{i2\omega} - b^2}\right]$$

O equivalentemente

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\left[c_1+c_2+\frac{a^2c_1-c_1\cdot a\cdot z^{-1}}{z^{-2}-a^2}+\frac{b^2c_2-c_2\cdot b\cdot z^{-1}}{z^{-2}-b^2}+\frac{a^2c_1-c_1\cdot a\cdot z}{z^2-a^2}+\frac{b^2c_2-c_2\cdot b\cdot z}{z^2-b^2}\right]$$

Sacando factor común a c_1 y c_2,

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\left[c_1\cdot\left(1+\frac{a(a-z^{-1})}{z^{-2}-a^2}+\frac{a(a-z)}{z^2-a^2}\right)+c_2\cdot\left(1+\frac{b(b-z^{-1})}{z^{-2}-b^2}+\frac{b(b-z)}{z^2-b^2}\right)\right]$$

desarrollando los denominadores,

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\left[c_1\cdot\left(1+\frac{a(a-z^{-1})}{(z^{-1}-a)(z^{-1}+a)}+\frac{a(a-z)}{(z-a)(z+a)}\right)+c_2\cdot\left(1+\frac{b(b-z^{-1})}{(z^{-1}-b)(z^{-1}+b)}+\frac{b(b-z)}{(z-b)(z+b)}\right)\right]$$

simplificando,

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\left[c_1\cdot\left(1-\frac{a}{(z^{-1}+a)}-\frac{a}{(z+a)}\right)+c_2\cdot\left(1-\frac{b}{(z^{-1}+b)}-\frac{b}{(z+b)}\right)\right]$$

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\left[c_1\cdot\left(\frac{(z^{-1}+a)\cdot(z+a)-a\cdot(z+a)-a\cdot(z^{-1}+a)}{(z^{-1}+a)\cdot(z+a)}\right)+c_2\cdot\left(\frac{(z^{-1}+b)\cdot(z+b)-b\cdot(z+b)-b\cdot(z^{-1}+b)}{(z^{-1}+b)\cdot(z+b)}\right)\right]$$

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\left[\cdot\frac{c_1\cdot(1-a^2)}{(z^{-1}+a)\cdot(z+a)}+\frac{c_2\cdot(1-b^2)}{(z^{-1}+b)\cdot(z+b)}\right]$$

y dejando un denominador común se llega a la siguiente expresión para la función de densidad espectral:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\left[\cdot\frac{c_1\cdot(1-a^2)\cdot(z^{-1}+b)\cdot(z+b)+c_2\cdot(1-b^2)\cdot(z^{-1}+a)\cdot(z+a)}{(z^{-1}+a)\cdot(z+a)\cdot(z^{-1}+b)\cdot(z+b)}\right]$$

Se sabe del enunciado que la expresión del filtro H(z) que teniendo como entrada ruido blanco genera la salida *y* cuya densidad espectral es F(z), es:

$$H(z)=\lambda\cdot\frac{z+c}{(z+a)\cdot(z+b)}$$

Por el teorema de factorización espectral se sabe que

$$2\pi \cdot F(z) = H(z) \cdot H(z^{-1})$$

y sustituyendo el valor de H(z) se tiene:

$$2\pi \cdot F(z) = \frac{\lambda^2 \cdot (z+c) \cdot (z^{-1}+c)}{(z+a)\cdot(z+b)\cdot(z^{-1}+a)\cdot(z^{-1}+b)}$$

Comparando esta expresión con la función de densidad espectral obtenida con anterioridad se obtiene la ecuación

$$\lambda^2 \cdot (z+c) \cdot (z^{-1}+c) = c_1 \cdot (1-a^2) \cdot (z^{-1}+b) \cdot (z+b) + c_2 \cdot (1-b^2) \cdot (z^{-1}+a) \cdot (z+a)$$

que es equivalente a:

$$\lambda^2 \cdot (z+c) \cdot (z^{-1}+c) = \sigma_1^2 \cdot (z+b) \cdot (z^{-1}+b) + \sigma_2^2 \cdot (z+a) \cdot (z^{-1}+a)$$

Esta es la relación pedida a partir de la cual es posible determinar λ y c

♦

♦ Solución problema 3.3

El proceso estocástico de este problema es similar al del Ejemplo 3.2 de los apuntes, por lo tanto la función de covarianza estacionaria del estado es

$$r_x(\tau) = \frac{r_1 \cdot a^{|\tau|}}{1-a^2}$$

y el valor medio del estado en el estacionario es 0. En este problema r_1=1

Se va a calcular la función de covarianza estacionaria de la salida y:

$$\begin{aligned} r_y(\tau) &= E[y_{k+\tau} \cdot y_k] = E[(x_{k+\tau} + e_{k+\tau}) \cdot (x_k + e_k)] = E[x_{k+\tau} \cdot x_k] + E[x_{k+\tau} \cdot e_k] + E[e_{k+\tau} \cdot x_k] + E[e_{k+\tau} \cdot e_k] = \\ &= r_x(\tau) + E[a \cdot x_{k+\tau-1} \cdot e_k] + E[v_{k+\tau-1} \cdot e_k] + E[e_{k+\tau} \cdot x_k] + r_e(\tau) \end{aligned}$$

Como el estado es independiente del ruido blanco que afecta a la entrada entonces la expresión anterior se reduce a

$$r_y(\tau) = r_x(\tau) + E[v_{k+\tau-1} \cdot e_k] + r_e(\tau)$$

que de acuerdo con los datos del enunciado es equivalente a

$$r_y(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a^2} + r_2 & si \quad \tau = 0 \\ \dfrac{a}{1-a^2} + r_{12} & si \quad |\tau| = 1 \\ \dfrac{a^{|\tau|}}{1-a^2} & si \quad |\tau| > 1 \end{cases}$$

A continuación hay que calcular la función de densidad espectral de la salida a través de su definición:

$$\Phi_y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} r_y(k) e^{-ik\omega}$$

Que se puede expresar equivalente en la forma:

$$\Phi_y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{k=-\infty}^{-2} r_y(k)e^{-ik\omega} + r_y(-1)e^{i\omega} + r_y(0) + r_y(1)e^{-i\omega}\sum_{k=2}^{\infty} r_y(k)e^{-ik\omega}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{\beta=2}^{\infty} r_y(-\beta)e^{i\beta\omega} + r_y(-1)e^{i\omega} + r_y(0) + r_y(1)e^{-i\omega}\sum_{k=2}^{\infty} r_y(k)e^{-ik\omega}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{\beta=2}^{\infty}\frac{a^\beta}{1-a^2}e^{i\beta\omega} + \left[\frac{a}{1-a^2} + r_{12}\right]\cdot e^{i\omega} + \left[\frac{1}{1-a^2} + r_2\right] + \left[\frac{a}{1-a^2} + r_{12}\right]\cdot e^{-i\omega} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{a^k}{1-a^2}e^{-ik\omega}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[b\sum_{\beta=2}^{\infty}\left(a\cdot e^{i\omega}\right)^\beta + \alpha_2\cdot e^{i\omega} + \alpha_1 + \alpha_2\cdot e^{-i\omega} + b\sum_{k=2}^{\infty}\left(a\cdot e^{-i\omega}\right)^k\right]$$

donde

$$b = \frac{1}{1-a^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{1-a^2} + r_2$$

$$\alpha_2 = \frac{a}{1-a^2} + r_{12}$$

Puesto que se trata de series de progresiones geométricas, entonces existe una expresión analitica para su suma:

$$\Phi_y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[-b\frac{\left(a\cdot e^{i\omega}\right)^2}{1-a\cdot e^{i\omega}} + \alpha_2\cdot e^{i\omega} + \alpha_1 + \alpha_2\cdot e^{-i\omega} - b\frac{\left(a\cdot e^{-i\omega}\right)^2}{1-a\cdot e^{-i\omega}}\right]$$

La expresión anterior es equivalente a:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-b\cdot a^2}{(z^{-1}-a)\cdot z^{-1}}+\alpha_2\cdot z+\alpha_1+\alpha_2\cdot z^{-1}-\frac{b\cdot a^2}{(z-a)\cdot z}\right]$$

Si se define

$$\alpha_3=-b\cdot a^2$$

entonces:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\alpha_3}{(z^{-1}-a)\cdot z^{-1}}+\frac{\alpha_3}{(z-a)\cdot z}+\alpha_2\cdot(z+z^{-1})+\alpha_1\right]$$

Dejando un denominador común se obtiene la siguiente expresión:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\alpha_3\cdot z\cdot(z-a)+\alpha_3\cdot z^{-1}\cdot(z^{-1}-a)+\alpha_2\cdot(z+z^{-1})(z^{-1}-a)\cdot(z-a)+\alpha_1\cdot(z^{-1}-a)\cdot(z-a)}{(z^{-1}-a)\cdot(z-a)}\right]$$

Se sabe del enunciado que la expresión del filtro H(z) que teniendo como entrada ruido blanco genera la salida *y* cuya densidad espectral es F(z), es:

$$H(z)=\lambda\cdot\frac{z-c}{z-a}$$

Por el teorema de factorización espectral se sabe que

$$2\pi\cdot F(z)=H(z)\cdot H(z^{-1})$$

y sustituyendo el valor de H(z) se tiene:

$$2\pi\cdot F(z)=\frac{\lambda^2\cdot(z-c)\cdot(z^{-1}-c)}{(z-a)\cdot(z^{-1}-a)}$$

Comparando esta expresión con la expresión de F(z) calculada con anterioridad se obtiene la siguiente ecuación:

$$\lambda^2\cdot(z-c)\cdot(z^{-1}-c)=\alpha_3\cdot z\cdot(z-a)+\alpha_3\cdot z^{-1}\cdot(z^{-1}-a)+\alpha_2\cdot(z+z^{-1})(z^{-1}-a)\cdot(z-a)+\alpha_1\cdot(z^{-1}-a)\cdot(z-a)$$

que es equivalente a

$$\lambda^2\cdot(1+c^2)-\lambda^2\cdot c\cdot(z^{-1}+z)=[\alpha_3-a\cdot\alpha_3]\cdot(z^2+z^{-2})+[-a\cdot\alpha_3+\alpha_2\cdot(1+a)-a\cdot\alpha_1]\cdot(z+z^{-1})+[-2\cdot a\cdot\alpha_2+\alpha_1\cdot(1+a^2)]$$

Igualando los coeficientes asociados a las mismas potencias se obtiene el siguiente par de ecuaciones:

$$\lambda^2 \cdot \left(1 + c^2\right) = \alpha_1 \cdot (1 + a^2) - 2 \cdot a \cdot \alpha_2$$
$$\lambda^2 \cdot c = a \cdot \alpha_3 - \alpha_2 \cdot (1 + a) + a \cdot \alpha_1$$

Que se pueden expresar equivalentemente en la forma:

$$\lambda^2 \cdot \left(1 + c^2\right) = p_1$$
$$\lambda^2 \cdot c = p_2$$

donde

$$p_1 = \alpha_1 \cdot (1 + a^2) - 2 \cdot a \cdot \alpha_2$$
$$p_2 = a \cdot \alpha_3 - \alpha_2 \cdot (1 + a) + a \cdot \alpha_1$$

Resolviendo este par de ecuaciones se obtiene como soluciones:

$$c = \frac{p_1}{2 \cdot p_2} \pm \sqrt{\frac{p_1^2}{4 \cdot p_2^2} - 1}$$
$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{p_2}{c}}$$

De estas cuatro soluciones solamente serían válidas aquellas que fuesen reales y cumplan que |*c*|<1.

♦

♦ Solución problema 3.4

En primer lugar hay que determinar la expresión del filtro *H*(*z*) que excitado con la entrada *e* genera la salida *y*, para ello hay que aplicar la transformada *Z* sobre la ecuación en diferencias del enunciado:

$$Y(z) - 0.7 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) = E(z) - 0.5 \cdot z^{-1} \cdot E(z)$$

con lo que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{z - 0.5}{z - 0.7}$$

En segundo lugar hay que determinar la expresión temporal de este filtro, es decir *h*(*k*), para ello hay que aplicar la transformada *Z* inversa a la expresión *H*(z), con lo que se obtiene:

$$h(k) = \begin{cases} 1 & si \;\; k = 0 \\ 0.2 \cdot 0.7^{k-1} & si \;\; k = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

Por otra en el dominio temporal la relación entre la entrada y la salida viene dada por la expresión:

$$y(k) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot e(k-n)$$

Tomando valores medios

$$m_y(k) = E[y(k)] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot e(k-n)\right] =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot E[e(k-n)] = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot m_e(k-n)$$

Supuesto que el ruido blanco de la entrada tiene valor medio 0, entonces el valor medio de la salida también sería 0. Por lo tanto, de la definición de covarianza se obtiene:

$$r_y(\tau) = E[y(k+\tau) \cdot y^T(k)] =$$
$$= E\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot [e(k+\tau-n)]\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} h(l) \cdot [e(k-l)]\right)^T\right] =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} h(n) \cdot E[e(k+\tau-n) \cdot e^T(k-l)] \cdot h^T(l) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} h(n) \cdot r_e(\tau+l-n) \cdot h^T(l)$$

Desarrollando el sumatorio más interno se obtiene:

$$r_y(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot r_e(\tau+0-n) \cdot h^T(0) + \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot r_e(\tau+1-n) \cdot h^T(1) + \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot r_e(\tau+2-n) \cdot h^T(2) + \ldots$$

Puesto que la entrada de la entrada es ruido blanco su función de covarianza es no nula únicamente cuando se evalúa en 0, y en dicho caso de acuerdo el enunciado vale 1, por ello dentro de cada sumatorio solamente existe un término no nulo:

$$r_y(\tau) = h(\tau) \cdot h^T(0) + h(\tau+1) \cdot h^T(1) + h(\tau+2) \cdot h^T(2) + \ldots.$$

La expresión anterior es equivalente a:

$$r_y(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} h(\tau+k) \cdot h^T(k)$$

Y como se trata de un sistema escalar:

$$r_y(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} h(\tau + k) \cdot h(k)$$

Si τ=0, entonces

$$r_y(0) = \sum_{k=0}^{\infty} h^2(k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (0.2 \cdot 0.7^{k-1})^2 = 1 + 0.2^2 \cdot 0.7^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} (0.7^2)^k$$

Esta sumatoria es una progresión geométrica de razón 0.7^2, que tiene una expresión analitica para su suma, por lo tanto:

$$r_y(0) = 1 + 0.2^2 \cdot 0.7^{-2} \frac{0.7^2}{1-0.7^2} = 1 + \frac{0.2^2}{1-0.7^2} = \frac{55}{51}$$

Si τ>0, entonces

$$\begin{aligned} r_y(\tau) &= h(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} h(\tau + k) \cdot h^T(k) = 0.2 \cdot 0.7^{\tau-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 0.2 \cdot 0.7^{\tau+k-1} \cdot 0.2 \cdot 0.7^{k-1} = \\ &= 0.2 \cdot 0.7^{\tau-1} + 0.2^2 \cdot 0.7^{-2} \cdot 0.7^{\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \left(0.7^2\right)^k = 0.2 \cdot 0.7^{\tau-1} + 0.2^2 \cdot 0.7^{-2} \cdot 0.7^{\tau} \frac{0.7^2}{1-0.7^2} = \\ &= 0.2 \cdot 0.7^{\tau-1} + \frac{0.2^2 \cdot 0.7^{\tau}}{1-0.7^2} = \left[\frac{0.2}{0.7} + \frac{0.2^2}{1-0.7^2}\right] \cdot 0.7^{\tau} = \frac{130}{357} \cdot 0.7^{\tau} \end{aligned}$$

Luego la función de covarianza de la salida es:

$$r_y(\tau) = \begin{cases} \dfrac{55}{51} & \tau = 0 \\ \dfrac{130}{357} \cdot 0.7^{|\tau|} & \tau \neq 0 \end{cases}$$

La función de densidad espectral se puede calcular mediante la expresión dada por el teorema 3.3

$$\phi_y(\omega) = H(e^{i\omega}) \cdot \phi_u(\omega) \cdot H^T(e^{-i\omega})$$

Sustituyendo valores se obtiene:

$$\phi_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\left(e^{i\omega} - 0.5\right)}{\left(e^{i\omega} - 0.7\right)} \cdot \frac{\left(e^{-i\omega} - 0.5\right)}{\left(e^{-i\omega} - 0.7\right)}$$

o equivalentemente

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(z-0.5)}{(z-0.7)}\cdot\frac{(z^{-1}-0.5)}{(z^{-1}-0.7)}$$

♦

♦ Solución problema 3.5

En primer lugar hay que determinar la expresión del filtro *H*(*z*) que excitado con la entrada *e* genera la salida *y*, para ello hay que aplicar la transformada *Z* sobre la ecuación en diferencias del enunciado:

$$Y(z)-1.5\cdot z^{-1}\cdot Y(z)+0.7\cdot z^{-2}\cdot Y(z)=E(z)+0.2\cdot z^{-1}\cdot E(z)$$

con lo que

$$H(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{z^2+0.2\cdot z}{z^2-1.5\cdot z^1+0.7}$$

Si se supone que:

$$B(z)=b_0\cdot z^2+b_1\cdot z+b_2$$

$$A(z)=a_0\cdot z^2+a_1\cdot z+a_2$$

entonces b_0=1, b_1=0.2, b_2=0, a_0=1, a_1=-1.5 y a_2=0.7.

De acuerdo con el Teorema 3.5 la densidad espectral de la señal *y* esta dada por

$$\phi(\omega)=\frac{1}{2\cdot\pi}\frac{B(z)\cdot B(z^{-1})}{A(z)\cdot A(z^{-1})}$$

También se sigue de dicho Teorema 3.5 que la varianza de la señal *y* está dada por la integral compleja

$$E\left[y^2\right]=\int_{-\pi}^{\pi}\phi(\omega)\cdot d\omega=\frac{1}{i}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\phi(\omega)\cdot e^{-i\omega}d(e^{i\omega})=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\oint\frac{B(z)\cdot B(z^{-1})}{A(z)\cdot A(z^{-1})}\cdot\frac{dz}{z}$$

Puesto que el orden del denominador es 2, se puede demostrar que en dicho caso la varianza viene dada por la expresión:

$$E\left[y^2\right]=\frac{B_0\cdot a_0\cdot e_1-B_1\cdot a_0\cdot a_1+B_2\cdot(a_1^2-a_2\cdot e_1)}{a_0\cdot[(a_0^2-a_2^2)\cdot e_1-(a_0\cdot a_1-a_1\cdot a_2)\cdot a_1]}$$

donde

$$B_0 = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2$$
$$B_1 = 2\cdot(b_0\cdot b_1 + b_1\cdot b_2)$$
$$B_2 = 2\cdot b_0\cdot b_2$$
$$e_1 = a_0 + a_2$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes de A y B en las expresiones anteriores se obtiene

$$B_0 = 1.04, B_1 = 0.4, B_2 = 0, e_1 = 1.7$$

y

$$E\left[y^2\right] = \frac{2.368}{0.192} = \frac{37}{3} = 12.3333...$$

♦

SOLUCIONES PROBLEMAS
TEMA 4: Estimación óptima

♦ Solución problema 4.1

Considerando que la ecuación general de un proceso discreto es:

$$x_{k+1} = \Phi \cdot x_k + \Gamma \cdot u_k + v_k$$
$$y_k = C \cdot x_k + e_k$$

se obtiene que para el proceso del problema Φ=0.5, Γ=0 y C=1.

La ganancia de Kalman en el estado estacionario es:

$$K^e = P \cdot C^T \cdot \left(R_2 + C \cdot P \cdot C^T\right)^{-1}$$

donde

$$P = \Phi \cdot [P - P \cdot C^T \cdot (R_2 + C \cdot P \cdot C^T)^{-1} \cdot C \cdot P] \cdot \Phi^T + R_1$$

En este caso se trata de un sistema escalar luego:

$$K^e = \frac{P \cdot C}{r_2 + C^2 \cdot P}$$

$$P = \Phi^2 \cdot \left[P - \frac{P^2 \cdot C^2}{(r_2 + C^2 \cdot P)} \right] + r_1 = \frac{\Phi^2 \cdot r_2 \cdot P}{r_2 + C^2 \cdot P} \cdot + r_1$$

Expresando la ecuación de la covarianza del error de estimación como una ecuación de segundo orden:

$$P \cdot r_2 + C^2 \cdot P^2 = \Phi^2 \cdot r_2 \cdot P + r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot C^2 \cdot P$$

$$C^2 \cdot P^2 + (r_2 - \Phi^2 \cdot r_2 - r_1 \cdot C^2) P - r_1 \cdot r_2 = 0$$

$$C^2 \cdot P^2 + [(1 - \Phi^2) r_2 - r_1 \cdot C^2] P - r_1 \cdot r_2 = 0$$

y sustituyendo valores se obtiene:

$$P^2 + [0.75 \cdot r_2 - r_1] \cdot P - r_1 \cdot r_2 = 0$$

La solución positiva de esta ecuación es:

$$P = \frac{r_1 - 0.75 \cdot r_2 + \sqrt{(0.75 \cdot r_2 - r_1)^2 + 4 \cdot r_1 \cdot r_2}}{2}$$

Luego la ganancia de Kalman en el estado estacionario es:

$$K^e = \frac{P}{r_2 + \cdot P} = \frac{r_1 - 0.75 \cdot r_2 + \sqrt{(0.75 \cdot r_2 - r_1)^2 + 4 \cdot r_1 \cdot r_2}}{r_1 + 1.25 \cdot r_2 + \sqrt{(0.75 \cdot r_2 - r_1)^2 + 4 \cdot r_1 \cdot r_2}}$$

Por otra se pide calcular el polo del filtro estacionario y compararlo con el del sistema. De forma general, el sistema real viene dado por:

$$x_{k+1} = \Phi \cdot x_k + \Gamma \cdot u_k + v_k$$

Por su parte el estimador del sistema implementado por el filtro de Kalman viene dado por la ecuación:

$$\hat{x}(k+1 \mid k+1) = \hat{x}(k+1 \mid k) + K^e_{k+1} \cdot \left[y_{k+1} - C \cdot \hat{x}(k+1 \mid k) \right]$$

donde:

$$\hat{x}(k+1 \mid k) = \Phi \cdot \hat{x}(k \mid k) + \Gamma \cdot u_k$$

Sustituyendo $\hat{x}(k+1 \mid k)$ en la expresión de $\hat{x}(k+1 \mid k+1)$

$$\hat{x}(k+1 \mid k+1) = \Phi \cdot \hat{x}(k \mid k) + \Gamma \cdot u_k + K^e_{k+1} \cdot \left[y_{k+1} - C \cdot \Phi \cdot \hat{x}(k \mid k) - C \cdot \Gamma \cdot u_k \right]$$

y reordenando términos se obtiene:

$$\hat{x}(k+1 \mid k+1) = [1 - K^e_{k+1} \cdot C] \cdot \Phi \cdot \hat{x}(k \mid k) + [1 - K^e_{k+1} \cdot C] \cdot \Gamma \cdot u_k + K^e_{k+1} \cdot y_{k+1}$$

Que en el estacionario toma la forma:

$$\hat{x}(k+1 \mid k+1) = [1 - K^e \cdot C] \cdot \Phi \cdot \hat{x}(k \mid k) + [1 - K^e \cdot C] \cdot \Gamma \cdot u_k + K^e_{k+1} \cdot y_{k+1}$$

Para este problema, el sistema real es:

$$x_{k+1} = 0.5 \cdot x_k + v_k$$

cuyo polo es z=0.5.

Mientras que el estimador en el estado estacionario es

$$\hat{x}(k+1|k+1) = [1-K^e]\cdot 0.5\cdot\hat{x}(k|k) + K^e\cdot y_{k+1}$$

cuyo polo es

$$z = [1-K^e]\cdot 0.5$$

Es decir el polo del estimador en el estado estacionario modifica el polo del sistema real con un factor $[1-K^e]$.

♦

♦ Solución problema 4.2

Comparando la expresión del enunciado con la ecuación general de un proceso discreto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi\cdot x_k + \Gamma\cdot u_k + w_k \\ y_k &= C\cdot x_k + e_k \end{aligned}$$

donde

$$w_k = \Omega\cdot v_k$$

se obtiene que

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; \Gamma = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \; \Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por otra parte la varianza de w_k es:

$$R_1 = E[w_k\cdot w_k{}^T] = E[\Omega\cdot v_k\cdot v_k{}^T\cdot\Omega^T] = \Omega\cdot E[v_k\cdot v_k{}^T]\cdot\Omega^T = r_1\cdot\Omega\cdot\Omega^T = r_1\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_1 \end{bmatrix}$$

Por otra parte como e_k es 0 para este sistema, entonces R_2=0;

Las ecuaciones de la matriz de covarianza del error de estimación y del vector de ganancias del filtro de Kalman son:

$$P(k+1|k) = \Phi\cdot P(k|k)\cdot\Phi^T + R_1$$

$$K_{k+1}^{e} = P(k+1\,|\,k)\cdot C^{T}\cdot\left(R_2 + C\cdot P(k+1\,|\,k)\cdot C^{T}\right)^{-1}$$

$$P(k+1\,|\,k+1) = P(k+1\,|\,k) - K_{k+1}^{e}\cdot C\cdot P(k+1\,|\,k)$$

Sustituyendo valores se obtiene:

$$P(k+1\,|\,k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot P(k\,|\,k)\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_1 \end{bmatrix}$$

$$K_{k+1}^{e} = P(k+1\,|\,k)\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot P(k+1\,|\,k)\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$P(k+1\,|\,k+1) = P(k+1\,|\,k) - K_{k+1}^{e}\cdot[0 \quad 1]\cdot P(k+1\,|\,k)$$

Considerando la siguiente notación

$$P(k\,|\,k) = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix}$$

$$P(k+1\,|\,k+1) = \begin{bmatrix} p_{11}(k+1) & p_{12}(k+1) \\ p_{21}(k+1) & p_{22}(k+1) \end{bmatrix}$$

Entonces operando se obtienen las ecuaciones buscadas

$$P(k+1\,|\,k) = \begin{bmatrix} \mathrm{p}_{11}(k) + \mathrm{p}_{21}(k) + \mathrm{p}_{12}(k) + \mathrm{p}_{22}(k) & \mathrm{p}_{12}(k) + \mathrm{p}_{22}(k) \\ \mathrm{p}_{21}(k) + \mathrm{p}_{22}(k) & \mathrm{p}_{22}(k) + r_1 \end{bmatrix}$$

$$K_{k+1}^{e} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{p}_{12}(\mathrm{k}) + \mathrm{p}_{22}(\mathrm{k})}{\mathrm{p}_{22}(\mathrm{k}) + \mathrm{r}_1} & 1 \end{bmatrix}^{T}$$

$$\mathrm{p}_{11}(k+1) = \mathrm{p}_{11}(k) + \mathrm{p}_{21}(k) + \mathrm{p}_{12}(k) + \mathrm{p}_{22}(k) - \frac{(\mathrm{p}_{12}(k) + \mathrm{p}_{22}(k))\cdot(\mathrm{p}_{21}(k) + \mathrm{p}_{22}(k))}{(\mathrm{p}_{22}(k) + \mathrm{r}_1)}$$

$$\mathrm{p}_{12}(k+1) = \mathrm{p}_{21}(k+1) = \mathrm{p}_{22}(k+1) = 0$$

♦

♦ Solución problema 4.3

Este problema es análogo al anterior pero ahora $R_2=\sigma^2$, en consecuencia las ecuaciones de la matriz de covarianza del error de estimación y del vector de ganancias del filtro de Kalman ahora son:

$$P(k+1|k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P(k|k) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_1 \end{bmatrix}$$

$$K_{k+1}^{e} = P(k+1|k) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\sigma^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P(k+1|k) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k) - K_{k+1}^{e} \cdot [0 \quad 1] \cdot P(k+1|k)$$

Luego operando se obtienen las ecuaciones buscadas:

$$P(k+1|k) = \begin{bmatrix} \mathrm{p}_{11}(k) + \mathrm{p}_{21}(k) + \mathrm{p}_{12}(k) + \mathrm{p}_{22}(k) & \mathrm{p}_{12}(k) + \mathrm{p}_{22}(k) \\ \mathrm{p}_{21}(k) + \mathrm{p22}(k) & \mathrm{p}_{22}(k) + r_1 \end{bmatrix}$$

$$K_{k+1}^{e} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{p}_{12}(\mathrm{k}) + \mathrm{p}_{22}(\mathrm{k})}{\mathrm{p}_{22}(\mathrm{k}) + \mathrm{r}_1 + \sigma^2} & \dfrac{\mathrm{p}_{22}(\mathrm{k}) + \mathrm{r}_1}{\mathrm{p}_{22}(\mathrm{k}) + \mathrm{r}_1 + \sigma^2} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathrm{p}_{11}(k+1) = \mathrm{p}_{11}(k) + \mathrm{p}_{21}(k) + \mathrm{p}_{12}(k) + \mathrm{p}_{22}(k) - \frac{(\mathrm{p}_{12}(k) + \mathrm{p}_{22}(k)) \cdot (\mathrm{p}_{21}(k) + \mathrm{p}_{22}(k))}{(\mathrm{p}_{22}(k) + \mathrm{r}_1 + \sigma^2)}$$

$$\mathrm{p}_{12}(k+1) = \mathrm{p}_{12}(k) + \mathrm{p}_{22}(k) - \frac{(\mathrm{p}_{12}(k) + \mathrm{p}_{22}(k)) \cdot (\mathrm{p}_{22}(k) + \mathrm{r}_1)}{(\mathrm{p}_{22}(k) + \mathrm{r}_1 + \sigma^2)}$$

$$\mathrm{p}_{21}(k+1) = \mathrm{p}_{21}(k) + \mathrm{p}_{22}(k) - \frac{(\mathrm{p}_{21}(k) + \mathrm{p}_{22}(k)) \cdot (\mathrm{p}_{22}(k) + \mathrm{r}_1)}{(\mathrm{p}_{22}(k) + \mathrm{r}_1 + \sigma^2)}$$

$$\mathrm{p}_{22}(k+1) = \mathrm{p}_{22}(k) + \mathrm{r}_1 - \frac{(\mathrm{p}_{22}(k) + \mathrm{r}_1)^2}{(\mathrm{p}_{22}(k) + \mathrm{r}_1 + \sigma^2)}$$

♦

♦ Solución problema 4.4

Puesto que el estado inicial *x*(0) se conoce perfectamente, eso significa que la matriz de covarianza del error de estimación en el instante inicial *k*=0 es:

$$P(0\,|\,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con las ecuaciones del filtro de Kalman:

$$P(1\,|\,0) = \Phi \cdot P(0\,|\,0) \cdot \Phi^{Y} + R_1 = R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_1 \end{bmatrix}$$

$$K_1^e = P(1\,|\,0) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P(1\,|\,0) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(1\,|\,1) = P(1\,|\,0) - K_1^e \cdot [0 \quad 1] \cdot P(1\,|\,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con lo que se deduce que en cualquier instante k se tendrá:

$$P(k\,|\,k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{k+1}^e = K^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por otra parte el estimador del sistema implementado por el filtro de Kalman viene dado por la ecuación:

$$\hat{x}(k+1\,|\,k+1) = \hat{x}(k+1\,|\,k) + K_{k+1}^e \cdot \left[y_{k+1} - C \cdot \hat{x}(k+1\,|\,k) \right]$$

donde:

$$\hat{x}(k+1\,|\,k) = \Phi \cdot \hat{x}(k\,|\,k) + \Gamma \cdot u_k$$

Sustituyendo $\hat{x}(k+1\,|\,k)$ en la expresión de $\hat{x}(k+1\,|\,k+1)$:

$$\hat{x}(k+1\,|\,k+1) = \Phi \cdot \hat{x}(k\,|\,k) + \Gamma \cdot u_k + K_{k+1}^e \cdot \left[y_{k+1} - C \cdot \Phi \cdot \hat{x}(k\,|\,k) - C \cdot \Gamma \cdot u_k \right]$$

y reordenando términos se obtiene:

$$\hat{x}(k+1\,|\,k+1) = [I - K^e_{k+1}\cdot C]\cdot\Phi\cdot\hat{x}(k\,|\,k) + [I - K^e_{k+1}\cdot C]\cdot\Gamma\cdot u_k + K^e_{k+1}\cdot y_{k+1}$$

Que se puede escribir de forma equivalente como:

$$\hat{x}(k+1\,|\,k+1) = A\cdot\hat{x}(k\,|\,k) + B\cdot u_k + K^e_{k+1}\cdot y_{k+1}$$

donde

$$A = [I - K^e_{k+1}\cdot C]\cdot\Phi$$
$$B = [I - K^e_{k+1}\cdot C]\cdot\Gamma$$

Para este sistema la ganancia de Kalman es constante, luego

$$\hat{x}(k+1\,|\,k+1) = A\cdot\hat{x}(k\,|\,k) + B\cdot u_k + K^e\cdot y_{k+1}$$

En el instante k+2 el estimador es:

$$\hat{x}(k+2\,|\,k+2) = A\cdot\hat{x}(k+1\,|\,k+1) + B\cdot u_{k+1} + K^e\cdot y_{k+2}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la expresión del estimador en k+1 y operando se obtiene:

$$\hat{x}(k+2\,|\,k+2) = A^2\cdot\hat{x}(k\,|\,k) + A\cdot B\cdot u_k + A\cdot K^e\cdot y_{k+1} + B\cdot u_{k+1} + K^e\cdot y_{k+2}$$

En el instante k+3 el estimador es:

$$\hat{x}(k+3\,|\,k+3) = A\cdot\hat{x}(k+2\,|\,k+2) + B\cdot u_{k+2} + K^e\cdot y_{k+3}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la expresión del estimador en k+2 y operando se obtiene:

$$\hat{x}(k+3\,|\,k+3) = A^3\cdot\hat{x}(k\,|\,k) + A^2\cdot B\cdot u_k + A^2\cdot K^e\cdot y_{k+1} + A\cdot B\cdot u_{k+1} + A\cdot K^e\cdot y_{k+2} + B\cdot u_{k+2} + K^e\cdot y_{k+3}$$

Reordenando términos se obtiene:

$$\hat{x}(k+3\,|\,k+3) = A^3\cdot\hat{x}(k\,|\,k) + [A^2\cdot B\cdot u_k + A\cdot B\cdot u_{k+1} + B\cdot u_{k+2}] + [A^2\cdot K^e\cdot y_{k+1} + A\cdot K^e\cdot y_{k+2} + K^e\cdot y_{k+3}]$$

Por tanto se ha conseguido expresar el estimador en el instante k+3 en función de: el estimador en el instante k, las señales de control en los instantes k, k+1 y k+2, y las salidas medidas en los instantes k+1, k+2 y k+3.

Para el sistema del problema las matrices A y B toman los siguientes valores:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además se puede comprobar que

$$A^n = A \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

que

$$A \cdot B = B$$

y que

$$A \cdot K^e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = D$$

Luego el estimador en el instante *k*+3 para este sistema toma la expresión:

$$\hat{x}(k+3 \mid k+3) = A \cdot \hat{x}(k \mid k) + [B \cdot u_k + B \cdot u_{k+1} + B \cdot u_{k+2}] + [D \cdot y_{k+1} + D \cdot y_{k+2} + K^e \cdot y_{k+3}]$$

$$\hat{x}(k+3 \mid k+3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{x}(k \mid k) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (u_k + u_{k+1} + u_{k+2}) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (y_{k+1} + y_{k+2}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot y_{k+3}$$

♦

SOLUCIONES PROBLEMAS
TEMA 5: Identificación

♦ Solución problema 5.1

a) El proceso a identificar es:

$$y(t) = 0.8\cdot y(t-1) + u(t-1) + e(t) - 0.8\cdot e(t-1)$$

El modelo que se considera para la identificación es:

$$y(t) = -a\cdot y(t-1) + b\cdot u(t-1)$$

En este caso:

$$\phi^T(t) = [-y(t-1)\ u(t-1)],\ \theta = \begin{bmatrix} a \\ \mathrm{b} \end{bmatrix}$$

Para construir la ecuación normal hay que hacer las siguientes multiplicaciones de matrices

$$\Phi^T \cdot \Phi = \begin{bmatrix} -y(1-1) & \cdot & -y(i-1) & \cdot & -y(t-1) \\ u(1-1) & \cdot & u(i-1) & \cdot & u(t-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -y(1-1) & u(1-1) \\ \cdot & \cdot \\ -y(i-1) & u(i-1) \\ \cdot & \cdot \\ -y(t-1) & u(t-1) \end{bmatrix}_{tx1}$$

$$\Phi^T \cdot Y = \begin{bmatrix} -y(1-1) & \cdot & -y(i-1) & \cdot & -y(t-1) \\ u(1-1) & \cdot & u(i-1) & \cdot & u(t-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(1) \\ \cdot \\ y(i) \\ \cdot \\ y(t) \end{bmatrix}_{tx1}$$

que se pueden expresar en la forma:

$$\Phi^T \cdot \Phi = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{t} y^2(i-1) & -\sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot u(i-1) \\ -\sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot u(i-1) & \sum_{i=1}^{t} u^2(i-1) \end{bmatrix}.$$

$$\Phi^T \cdot Y = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-1) \\ \sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot u(i-1) \end{bmatrix}.$$

Luego la ecuación normal es:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{t} y^2(i-1) & -\sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot u(i-1) \\ -\sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot u(i-1) & \sum_{i=1}^{t} u^2(i-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-1) \\ \sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot u(i-1) \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen las estimas de mínimos cuadrados de los parámetros *a* y *b*

$$a = \frac{-\left(\sum_{i=1}^{t} u^2(i-1)\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-1)\right) + \left(\sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot u(i-1)\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot u(i-1)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{t} y^2(i-1)\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{t} u^2(i-1)\right) - \left(\sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot u(i-1)\right)^2}$$

$$b = \frac{-\left(\sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot u(i-1)\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-1)\right) + \left(\sum_{i=1}^{t} y^2(i-1)\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot u(i-1)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{t} y^2(i-1)\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{t} u^2(i-1)\right) - \left(\sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot u(i-1)\right)^2}$$

b) Multiplicando ambos miembros de la ecuación por 1/*t* y haciendo la aproximación:

$$\frac{1}{t}\cdot\sum_{i=1}^{t} x^2(i-1) \approx \frac{1}{t}\cdot\sum_{i=1}^{t} x^2(i)$$

la ecuación normal se puede expresar en la forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{t}\cdot\sum_{i=1}^{t} y^2(i) & -\frac{1}{t}\cdot\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot u(i) \\ -\frac{1}{t}\cdot\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot u(i) & \frac{1}{t}\cdot\sum_{i=1}^{t} u^2(i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{t}\cdot\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-1) \\ \frac{1}{t}\cdot\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot u(i-1) \end{bmatrix}$$

Si $t\to\infty$, entonces se obtiene

$$\begin{bmatrix} E[y^2(t)] & -E[y(t)\cdot u(t)] \\ -E[y(t)\cdot u(t)] & E[u^2(t)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E[y(t)\cdot y(t-1)] \\ E[y(t)\cdot u(t-1)] \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Hay que calcular los valores esperados de diferentes magnitudes. Como la entrada *u* y el ruido *e* son independientes se cumple:

$$E[e(t)\cdot e(t-1)] = 0$$
$$E[u(t)\cdot u(t-1)] = 0$$
$$E[e(t)\cdot u(t)] = 0$$

Por otra parte

$$E[e(t)^2] = 1$$
$$E[u(t)^2] = 1$$

Además como el valor actual de *e* o de *u* es independiente del valor pasado de la salida *y*, se cumple:

$$E[y(t-1)\cdot u(t)] = 0$$
$$E[y(t-1)\cdot e(t)] = 0$$

Teniendo en cuenta toda esta información, en primer lugar, se va a calcular $E[y(t)\cdot u(t)]$:

$$\begin{aligned} E[y(t)\cdot u(t)] &= E[(0.8\cdot y(t-1)+u(t-1)+e(t)-0.8\cdot e(t-1))\cdot u(t)] = \\ &= E[0.8\cdot y(t-1)\cdot u(t)] + E[u(t-1)\cdot u(t)] + E[e(t)\cdot u(t)] + E[-0.8\cdot e(t-1)\cdot u(t)] = \\ &= 0+0+0+0 = 0 \end{aligned}$$

En segundo lugar se va a calcular $E[y(t)\cdot u(t-1)]$

$$\begin{aligned} E[y(t)\cdot u(t-1)] &= E[(0.8y(t-1)+u(t-1)+e(t)-0.8e(t-1))\cdot u(t-1)] = \\ &= E[0.8\cdot y(t-1)\cdot u(t-1)] + E[u(t-1)\cdot u(t-1)] + E[e(t)\cdot u(t-1)] + E[-0.8\cdot e(t-1)\cdot u(t-1)] = \\ &= 0+1+0+0 = 1 \end{aligned}$$

En tercer lugar se va a calcular $E[y(t)^2]$

$$E[y(t)^2] = E[(0.8\cdot y(t-1)+u(t-1)+e(t)-0.8\cdot e(t-1))^2]$$

desarrollando el cuadrado, tomando el valor esperado, y considerando únicamente los términos no nulos se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} E[y(t)^2] = {} & 0.64\cdot E[y^2(t-1)] - 1.28\cdot E[e(t-1)\cdot y(t-1)] + E[u^2(t-1)] + \\ & + E[e^2(t)] + 0.64\cdot E[e^2(t-1)] \end{aligned} \quad (2)$$

Se observa que para poder obtener $E[y(t)^2]$ se requiere calcular $E[e(t-1)\cdot y(t-1)]$:

$$E[y(t-1)\cdot e(t-1)] = E[(0.8\cdot y(t-2)+u(t-2)+e(t-1)-0.8\cdot e(t-2))\cdot e(t-1)] =$$
$$= E[0.8\cdot y(t-2)\cdot e(t-1)] + E[u(t-2)\cdot e(t-1)] + E[e(t-1)\cdot e(t-1)] + E[-0.8\cdot e(t-2)\cdot e(t-1)] =$$
$$= 0+0+1+0 = 1$$

Asimismo si se consideran las siguientes aproximaciones:

$$E[y(t-1)^2] \approx E[y(t)^2]$$
$$E[u(t-1)^2] \approx E[u(t)^2] = 1$$
$$E[e(t-1)^2] \approx E[e(t)^2] = 1$$

entonces la ecuación (2) toma la forma

$$E[y(t)^2] = 0.64\cdot E[y(t)^2] - 1.28 + 1 + 1 + 0.64 = 0.64\cdot E[y(t)^2] + 1.36$$

Luego, despejando $E[y(t)^2]$ se obtiene:

$$E[y^2(t)] = \frac{1.36}{0.36} = 3.78$$

Finalmente se va a calcular $E[y(t)\cdot y(t-1)]$

$$E[y(t)\cdot y(t-1)] = E[(0.8\cdot y(t-1)+u(t-1)+e(t)-0.8e(t-1))\cdot y(t-1)] =$$
$$= E[0.8y(t-1)\cdot y(t-1)] + E[u(t-1)\cdot y(t-1)] + E[e(t)\cdot y(t-1)] + E[-0.8\cdot e(t-1)\cdot y(t-1)] =$$
$$= 0.8\cdot E[y(t)^2] + 0 + 0 - 0.8 =$$
$$= 0.8\cdot 3.78 - 0.8 = 2.22$$

Por lo tanto, la ecuación normal toma la forma:

$$\begin{bmatrix} 3.78 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.22 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviéndola se obtienen las siguientes estimas:

$$a = 0.59$$
$$b = 1$$

Solamente el parámetro b=1 coincide con el parámetro real b_0=1. Por su parte el parámetro a=0.59 difiere del parámetro real a_0=0.8 debido a la existencia de ruido correlacionado que hace que la estima esté polarizada.

c) Si es posible, para ello se deben utilizar otros métodos de estimación como el método de los mínimos cuadrados extendidos, el algoritmo de máxima verosimilitud o el método de la variable instrumental.

♦

♦ Solución problema 5.2

a) El proceso a identificar es:

$$y(t) = -ay(t-1) + u(t) + e(t)$$

donde *e*(*t*) es ruido gaussiano independiente.

El modelo que se considera para la identificación es:

$$\hat{y}(t) = -\beta y(t-1) + u(t-1)$$

En este caso:

$$\phi^T(t) = [-y(t-1)\ u(t-1)],\ \theta = \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para construir la ecuación normal hay que hacer las siguientes multiplicaciones de matrices

$$\Phi^T \cdot \Phi = \begin{bmatrix} -y(1-1) & \cdot & -y(i-1) & \cdot & -y(t-1) \\ u(1-1) & \cdot & u(i-1) & \cdot & u(t-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -y(1-1) & u(1-1) \\ \cdot & \cdot \\ -y(i-1) & u(i-1) \\ \cdot & \cdot \\ -y(t-1) & u(t-1) \end{bmatrix}_{tx1}$$

$$\Phi^T \cdot Y = \begin{bmatrix} -y(1-1) & \cdot & -y(i-1) & \cdot & -y(t-1) \\ u(1-1) & \cdot & u(i-1) & \cdot & u(t-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(1) \\ \cdot \\ y(i) \\ \cdot \\ y(t) \end{bmatrix}_{tx1}$$

que se pueden expresar en la forma:

$$\Phi^T \cdot \Phi = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{t} y^2(i-1) & -\sum_{i=1}^{t} y(i-1) \cdot u(i-1) \\ -\sum_{i=1}^{t} y(i-1) \cdot u(i-1) & \sum_{i=1}^{t} u^2(i-1) \end{bmatrix}.$$

$$\Phi^T \cdot Y = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-1) \\ \sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot u(i-1) \end{bmatrix}.$$

Luego la ecuación normal es:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{t} y^2(i-1) & -\sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot u(i-1) \\ -\sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot u(i-1) & \sum_{i=1}^{t} u^2(i-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-1) \\ \sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot u(i-1) \end{bmatrix}$$

Despejando β se obtiene:

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot u(i-1) - \sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-1)}{\sum_{i=1}^{t} y^2(i-1)} \qquad (1)$$

b) Multiplicando el númerador y el denominador de (1) por 1/*t* y haciendo la aproximación:

$$\frac{1}{t}\cdot\sum_{i=1}^{t} x^2(i-1) \approx \frac{1}{t}\cdot\sum_{i=1}^{t} x^2(i)$$

la ecuación (1) si $t \to \infty$ se puede expresar en la forma:

$$\beta = \frac{E[y(t-1)\cdot u(t-1)] - E[y(t)\cdot y(t-1)]}{E[y^2(t)]} \qquad (2)$$

Hay que calcular los valores esperados de diferentes magnitudes. Como la entrada *u* y el ruido *e* son independientes se cumple:

$$E[e(t)\cdot e(t-1)] = 0$$
$$E[u(t)\cdot u(t-1)] = 0$$
$$E[e(t)\cdot u(t)] = 0$$

Por otra parte

$$E[e(t)^2] = \sigma^2$$
$$E[u(t)^2] = \lambda^2$$

Además como el valor actual de *e* o de *u* es independiente del valor pasado de la salida *y*, se cumple:

$$E[y(t-1)\cdot u(t)] = 0$$
$$E[y(t-1)\cdot e(t)] = 0$$

Teniendo en cuenta toda esta información, en primer lugar, se va a calcular $E[y(t)\cdot u(t)]$:

$$\begin{aligned}E[y(t)\cdot u(t)] &= E[(-a\cdot y(t-1)+u(t)+e(t))\cdot u(t)] = \\ &= E[-a\cdot y(t-1)\cdot u(t)] + E[u(t)^2] + E[e(t)\cdot u(t)] = \\ &= 0 + E[u(t)^2] + 0 = \lambda^2\end{aligned}$$

En segundo lugar se va a calcular $E[y(t)^2]$

$$E[y(t)^2] = E[(-a\cdot y(t-1)+u(t)+e(t))^2]$$

desarrollando el cuadrado, tomando el valor esperado, y considerando únicamente los términos no nulos se obtiene la siguiente expresión

$$E[y(t)^2] = a^2\cdot E[y^2(t-1)] + \cdot E[u^2(t)] + E[e^2(t)] \qquad (3)$$

Asimismo si se consideran las siguientes aproximaciones:

$$E[y(t-1)^2] \approx E[y(t)^2]$$

entonces la ecuación (3) toma la forma

$$E[y(t)^2] = a^2\cdot E[y^2(t)] + \cdot E[u^2(t)] + E[e^2(t)]$$

Luego, despejando $E[y(t)^2]$ se obtiene:

$$E[y^2(t)] = \frac{\lambda^2 + \sigma^2}{1-a^2}$$

Finalmente se va a calcular $E[y(t)\cdot y(t-1)]$

$$\begin{aligned}E[y(t)\cdot y(t-1)] &= E[(-a\cdot y(t-1)+u(t)+e(t))\cdot y(t-1)] = \\ &= E[-a\cdot y(t-1)\cdot y(t-1)] + E[u(t)\cdot y(t-1)] + E[e(t)\cdot y(t-1)] = \\ &= -a\cdot E[y(t)^2] \\ &= \frac{-a\cdot\lambda^2 + -a\cdot\sigma^2}{1-a^2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (2) toma la forma:

$$\beta = \frac{\lambda^2 - a\dfrac{\lambda^2 +\cdot\sigma^2}{1-a^2}}{\dfrac{\lambda^2+\sigma^2}{1-a^2}}$$

Desarrollando y simplificando se obtiene

$$\beta = \frac{(1+a)\cdot\lambda^2}{\lambda^2+\sigma^2}$$

Luego se observa que cuando $t\to\infty$ la estima del parámetro β no tiende al parámetro real a.

c) En la sección 5.2.3 de los apuntes se dedujo el siguiente algoritmo de estima de mínimos cuadrados recursiva:

$$\begin{aligned}
&\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)[y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)] \\
&K(t) = P(t)\phi(t) = P(t-1)\phi(t)[1+\phi^T(t)P(t-1)\phi(t)]^{-1} \\
&P(t) = (I - K(t)\phi^T(t))P(t-1)
\end{aligned}$$

Para este sistema se tiene que

$$\phi^T(t) = [-y(t-1)\ u(t-1)],\ \theta = \begin{bmatrix}\beta \\ 1\end{bmatrix}$$

$$K(t) = \begin{bmatrix}k_1(t) \\ k_2(t)\end{bmatrix},\ P(t) = \begin{bmatrix}P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{21}(t) & P_{21}(t)\end{bmatrix}$$

En este modelo sólo hay que estimar un único parámetro, β. Luego sustituyendo las expresiones anteriores en las ecuaciones del algoritmo y operando se pueden obtener las siguientes expresiones para la estimación de β por mínimos cuadrados recursivos:

$$\begin{aligned}
&\beta(t) = \beta(t-1) + K_1(t)\cdot[y(t) + \beta(t-1)\cdot y(t-1) - u(t-1)] \\
&k_1(t) = \frac{-y(t-1)\cdot P_{11}(t-1) + u(t-1)\cdot P_{12}(t-1)}{y^2(t-1)\cdot P_{11}(t-1) - y(t-1)\cdot u(t-1)\cdot[P_{12}(t-1)+P_{21}(t-1)] + u^2(t-1)\cdot P_{22}(t-1)} \\
&k_2(t) = \frac{-y(t-1)\cdot P_{21}(t-1) + u(t-1)\cdot P_{22}(t-1)}{y^2(t-1)\cdot P_{11}(t-1) - y(t-1)\cdot u(t-1)\cdot[P_{12}(t-1)+P_{21}(t-1)] + u^2(t-1)\cdot P_{22}(t-1)} \\
&P_{11}(t) = [1 + k_1(t)\cdot y(t-1)]\cdot P_{11}(t-1) - k_1(t)\cdot u(t-1)\cdot P_{21}(t-1) \\
&P_{12}(t) = [1 + k_1(t)\cdot y(t-1)]\cdot P_{12}(t-1) - k_1(t)\cdot u(t-1)\cdot P_{22}(t-1) \\
&P_{21}(t) = k_2(t)\cdot y(t-1)\cdot P_{11}(t-1) + [1 - k_2(t)\cdot u(t-1)]\cdot P_{21}(t-1) \\
&P_{22}(t) = k_2(t)\cdot y(t-1)\cdot P_{12}(t-1) + [1 - k_2(t)\cdot u(t-1)]\cdot P_{22}(t-1)
\end{aligned}$$

♦

♦ Solución problema 5.3

El algoritmo recursivo de estimación por mínimos cuadrados se puede formular de forma general de la siguiente forma

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\varepsilon(t)$$
$$K(t) = P(t)\phi(t)$$
$$\varepsilon(t) = y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)$$

P es la matriz de covarianza y se define en función del vector de regresión ϕ

$$P(t) = \left(\sum_{i=1}^{t} \phi(i)\phi^T(i) \right)^{-1}$$

P satisface la ecuación

$$P^{-1}(t) = P^{-1}(t-1) + \phi(t)\phi^T(t)$$

Se observa que *P* crece de forma monótona con el tiempo, luego la ganancia del algoritmo de mínimos cuadrados $K(t) \to 0$, cuando *t* crece. Esto es, llega un momento en que el estimador de mínimos cuadrados se *desconecta*.

Este comportamiento puede resultar adecuado si los parámetros son invariantes con el tiempo, pero no si el algoritmo debe seguir de forma continua a parámetros variables con el tiempo.

Una solución posible para el seguimiento de los parámetros variables con el tiempo es la introducción de un peso denominado *factor de olvido* en la función de coste:

$$V(\theta, t) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{t} w_i \cdot \varepsilon(i)^2$$

donde w_i es el *peso*. Una ponderación muy utilizada es

$$w_i = \lambda^{t-i}, \quad 0 < \lambda \leq 1$$

donde λ *factor de olvido*, un valor usual de este parámetro es $0.9 < \lambda \leq 0.995$.

En consecuencia, se les aplica más valor (peso) a los datos recientes que a los pasados, los cuales se deben irán olvidando de forma exponencial. Esta estrategia se basa en el hecho de que los datos más recientes aportan más información sobre la estructura actual del sistema que los datos anteriores.

El método tiene la desventaja de que el olvido se produce aunque no haya aporte de nueva información en los datos. Así, en sistemas servo con pocas perturbaciones, la mayor excitación al sistema se produce por cambios en el punto de consigna. Tales cambios pueden ser muy irregulares y si no existen cambios el vector $P\phi$ es cero. En este caso, como se ve en la ecuación

$$P(t) = \frac{1}{\lambda} P(t-1)$$

P crece de forma exponencial si $\lambda<1$.

Si no existe aporte de información durante mucho tiempo en un sistema de parámetros variables con el tiempo o si el sistema es de parámetros invariables con el tiempo, *P* puede hacerse muy grande y un pequeño cambio en la señal de control puede llevar entonces a cambios bruscos en el valor de los parámetros y de la señal de salida produciéndose el fenómeno conocido como *estallido*.

♦

♦ Solución problema 5.4

El modelo que se considera para la identificación es:

$$\hat{y}(t) = -ay(t-1) + bu(t-1)$$

En este caso:

$$\phi^T(t) = [-y(t-1)\ \ u(t-1)],\ \theta = \begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{bmatrix}$$

Para construir la ecuación normal

$$(\Phi^T \cdot \Phi)\cdot\widehat{\theta} = \Phi^T \cdot Y$$

hay que hacer las siguientes multiplicaciones de matrices

$$\Phi^T \cdot \Phi = \begin{bmatrix} -y(1-1) & \cdot & -y(i-1) & \cdot & -y(t-1) \\ u(1-1) & \cdot & u(i-1) & \cdot & u(t-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -y(1-1) & u(1-1) \\ \cdot & \cdot \\ -y(i-1) & u(i-1) \\ \cdot & \cdot \\ -y(t-1) & u(t-1) \end{bmatrix}_{tx1}$$

$$\Phi^T \cdot Y = \begin{bmatrix} -y(1-1) & \cdot & -y(i-1) & \cdot & -y(t-1) \\ u(1-1) & \cdot & u(i-1) & \cdot & u(t-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(1) \\ \cdot \\ y(i) \\ \cdot \\ y(t) \end{bmatrix}_{tx1}$$

que se pueden expresar en la forma:

$$\Phi^T \cdot \Phi = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{t} y^2(i-1) & -\sum_{i=1}^{t} y(i-1) \cdot u(i-1) \\ -\sum_{i=1}^{t} y(i-1) \cdot u(i-1) & \sum_{i=1}^{t} u^2(i-1) \end{bmatrix}.$$

$$\Phi^T \cdot Y = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{t} y(i) \cdot y(i-1) \\ \sum_{i=1}^{t} y(i) \cdot u(i-1) \end{bmatrix}.$$

Luego la ecuación normal es:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{t} y^2(i-1) & -\sum_{i=1}^{t} y(i-1) \cdot u(i-1) \\ -\sum_{i=1}^{t} y(i-1) \cdot u(i-1) & \sum_{i=1}^{t} u^2(i-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{t} y(i) \cdot y(i-1) \\ \sum_{i=1}^{t} y(i) \cdot u(i-1) \end{bmatrix}$$

Sustituyendo la ley de control $u(t) = -K \cdot y(t)$ en la ecuación normal se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{t} y^2(i-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & k^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -\sum_{i=1}^{t} y(i) \cdot y(i-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}$$

Se observa que la matriz $\Phi^T \cdot \Phi$ es no singular ya que su determinante es $\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & k^2 \end{vmatrix} = 0$

Luego los parámetros de este modelo en lazo cerrado no se pueden identificar de forma única.

♦

♦ Solución problema 5.5

a) Puesto que hay que estimar dos parámetros en el modelo la señal de entrada que se utilice en el proceso de identificación debe poseer un grado 2 de excitación persistente (EP) mayor o igual a 2. Así señales validas serían una sinusoide, una suma de sinusoides, una señal PRBS, ruido blanco, ...

b) El modelo que se considera para la identificación es:

$$y(t) = -\theta_1 \cdot y(t-1) - \theta_2 \cdot y(t-2) + u(t-1)$$

En este caso:

$$\phi^T(t) = [-y(t-1) \quad -y(t-2) \quad u(t-1)],\ \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para construir la ecuación normal (5.5) hay que hacer las siguientes multiplicaciones de matrices

$$\Phi^T \cdot \Phi = \begin{bmatrix} -y(1-1) & -y(2-1) & \cdots & -y(t-1) \\ 0 & -y(2-2) & \cdots & -y(t-2) \\ u(1-1) & u(2-1) & \cdots & u(t-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -y(1-1) & 0 & u(1-1) \\ -y(2-1) & -y(2-2) & u(2-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(t-1) & -y(t-2) & u(t-1) \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T \cdot Y = \begin{bmatrix} -y(1-1) & -y(2-1) & \cdots & -y(t-1) \\ 0 & -y(2-2) & \cdots & -y(t-2) \\ u(1-1) & u(2-1) & \cdots & u(t-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(t) \end{bmatrix}$$

que se pueden expresar en la forma:

$$\Phi^T \cdot \Phi = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{t} y^2(i-1) & \sum_{i=1}^{t} y(i-1) \cdot y(i-2) & -\sum_{i=1}^{t} y(i-1) \cdot u(i-1) \\ \sum_{i=1}^{t} y(i-1) \cdot y(i-2) & \sum_{i=1}^{t} y^2(i-2) & -\sum_{i=1}^{t} y(i-2) \cdot u(i-1) \\ -\sum_{i=1}^{t} y(i-1) \cdot u(i-1) & -\sum_{i=1}^{t} y(i-2) \cdot u(i-1) & \sum_{i=1}^{t} u^2(i-1) \end{bmatrix}.$$

$$\Phi^T \cdot Y = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-1) \\ -\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-2) \\ \sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot u(i-1) \end{bmatrix}\cdot$$

Luego la ecuación normal es:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{t} y^2(i-1) & \sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot y(i-2) & -\sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot u(i-1) \\ \sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot y(i-2) & \sum_{i=1}^{t} y^2(i-2) & -\sum_{i=1}^{t} y(i-2)\cdot u(i-1) \\ -\sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot u(i-1) & -\sum_{i=1}^{t} y(i-2)\cdot u(i-1) & \sum_{i=1}^{t} u^2(i-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-1) \\ -\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-2) \\ \sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot u(i-1) \end{bmatrix} \quad (1)$$

La estima de mínimos cuadrados de los parámetros θ_1 y θ_2 del modelo se obtendría resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones derivado de la ecuación normal:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^{t} y^2(i-1)\right]\cdot\theta_1 + \left[\sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot y(i-2)\right]\cdot\theta_2 - \sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot u(i-1) &= -\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-1) \\ \left[\sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot y(i-2)\right]\cdot\theta_1 + \left[\sum_{i=1}^{t} y^2(i-2)\right]\cdot\theta_2 - \sum_{i=1}^{t} y(i-2)\cdot u(i-1) &= -\sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-2) \end{aligned} \quad (2)$$

Si se definen las siguientes variables

$$s_1 = \sum_{i=1}^{t} y^2(i-1) \qquad s_2 = \sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot y(i-2) \qquad s_3 = \sum_{i=1}^{t} y(i-1)\cdot u(i-1) \quad s_4 = \sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-1)$$

$$s_5 = \sum_{i=1}^{t} y^2(i-2) \qquad s_6 = \sum_{i=1}^{t} y(i-2)\cdot u(i-1) \qquad s_7 = \sum_{i=1}^{t} y(i)\cdot y(i-2)$$

El sistema de ecuaciones se puede expresar en la forma

$$\begin{matrix} s_1\cdot\theta_1 + s_2\cdot\theta_2 - s_3 = -s_4 \\ s_2\cdot\theta_1 + s_5\cdot\theta_2 - s_6 = -s_7 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} s_1\cdot\theta_1 + s_2\cdot\theta_2 = s_3 - s_4 \\ s_2\cdot\theta_1 + s_5\cdot\theta_2 = s_6 - s_7 \end{matrix}$$

Y resolviendo el sistema se obtienen las siguientes expresiones:

$$\theta_1 = \frac{s_5\cdot(s_3 - s_4) - s_2\cdot(s_6 - s_7)}{s_1\cdot s_5 - s_2^2}$$

$$\theta_2 = \frac{-s_2 \cdot (s_3 - s_4) + s_1 \cdot (s_6 - s_7)}{s_1 \cdot s_5 - s_2^2}$$

b) Multiplicando ambos miembros de la ecuación (2) por 1/*t* y haciendo la aproximación:

$$\frac{1}{t} \cdot \sum_{i=1}^{t} x^2 (i-1) \approx \frac{1}{t} \cdot \sum_{i=1}^{t} x^2 (i)$$

la ecuación normal se puede expresar en la forma:

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{i=1}^{t} y^2(i)\right] \cdot \theta_1 + \left[\sum_{i=1}^{t} y(i) \cdot y(i-1)\right] \cdot \theta_2 - \sum_{i=1}^{t} y(i) \cdot u(i) = -\sum_{i=1}^{t} y(i) \cdot y(i-1) \\
&\left[\sum_{i=1}^{t} y(i) \cdot y(i-1)\right] \cdot \theta_1 + \left[\sum_{i=1}^{t} y^2(i-1)\right] \cdot \theta_2 - \sum_{i=1}^{t} y(i-1) \cdot u(i) = -\sum_{i=1}^{t} y(i) \cdot y(i-2)
\end{aligned}$$

Si $t \to \infty$, entonces se obtiene

$$\begin{aligned}
&E[y^2(t)] \cdot \theta_1 + E[y(t) \cdot y(t-1)] \cdot \theta_2 - E[y(t) \cdot u(t)] = -E[y(t) \cdot y(t-1)] \\
&E[y(t) \cdot y(t-1)] \cdot \theta_1 + E[y^2(t-1)] \cdot \theta_2 - E[y(t-1) \cdot u(t)] = -E[y(t) \cdot y(t-2)]
\end{aligned} \quad (3)$$

Hay que calcular los valores esperados de diferentes magnitudes. Como la entrada *u* y el ruido *e* son independientes se cumple:

$$\begin{aligned}
&E[e(t) \cdot e(t-1)] = 0 \\
&E[u(t) \cdot u(t-1)] = 0 \\
&E[e(t) \cdot u(t)] = 0
\end{aligned}$$

Por otra parte, supuesto que tanto la perturbación e como la salida u son ruido blanco

$$\begin{aligned}
&E[e(i)^2] = \sigma^2 \\
&E[u(i)^2] = \lambda^2
\end{aligned}$$

Además como el valor el valor pasado de la salida *y* es independiente del valor actual de *e* o de *u*, se cumple:

$$\begin{aligned}
&E[y(t-1) \cdot u(t)] = 0 \\
&E[y(t-1) \cdot e(t)] = 0
\end{aligned}$$

Asimismo se consideran las siguientes aproximaciones:

$$E[y(t-1)^2] \approx E[y(t-1)^2] \approx E[y(t)^2]$$
$$E[u(t-1)^2] \approx E[u(t)^2] = \lambda^2$$
$$E[e(t-1)^2] \approx E[e(t)^2] = \sigma^2$$
$$E[y(t-1)\cdot y(t-2)] \approx E[y(t)\cdot y(t-1)]$$

Teniendo en cuenta toda esta información, en primer lugar, se va a calcular $E[y(t)\cdot u(t)]$:

$$\begin{aligned}E[y(t)\cdot u(t)] &= E[(-a\cdot y(t-1) - b\cdot y(t-2) + u(t) + e(t))\cdot u(t)] = \\ &= E[-a\cdot y(t-1)\cdot u(t)] + E[-b\cdot y(t-2)\cdot u(t)] + E[u^2(t)] + E[e(t)\cdot u(t)] = \\ &= 0 + 0 + \lambda^2 + 0 = \lambda^2\end{aligned}$$

En segundo lugar se va a calcular $E[y(t)^2]$

$$E[y(t)^2] = E[(-a\cdot y(t-1) - b\cdot y(t-2) + u(t) + e(t))^2]$$

desarrollando el cuadrado, tomando el valor esperado, y considerando únicamente los términos no nulos se obtiene la siguiente expresión

$$E[y(t)^2] = a^2\cdot E[y^2(t-1)] + 2\cdot a\ \cdot b\cdot E[y(t-1)\cdot y(t-2)] + b^2\cdot E[y^2(t-2)] + E[u^2(t)] + E[e^2(t)]$$

Que se puede expresar equivalentemente en la forma:

$$E[y(t)^2] = a^2\cdot E[y^2(t)] + 2\cdot a\cdot b\cdot E[y(t)\cdot y(t-1)] + b^2\cdot E[y^2(t)] + \lambda^2 + \sigma^2$$

Despejando $E[y(t)^2]$ se obtiene:

$$E[y(t)^2] = \frac{2\cdot a\cdot b\cdot E[y(t)\cdot y(t-1)] + \lambda^2 + \sigma^2}{1 - a^2 - b^2} \qquad (4)$$

En tercer lugar se requiere calcular $E[y(t)\cdot y(t-1)]$:

$$\begin{aligned}E[y(t)\cdot y(t-1)] &= E[(-a\cdot y(t-1) - b\cdot y(t-2) + u(t) + e(t))\cdot y(t-1)] = \\ &= E[-a\cdot y^2(t-1)] + E[-b\ \cdot y(t-2)\cdot y(t-1)] + E[u(t)\cdot y(t-1)] + E[e(t)\cdot y(t-1)] = \\ &= -a\cdot E[y(t)^2] - b\cdot E[y(t)\cdot y(t-1)] + 0 + 0\end{aligned}$$

Despejando $E[y(t)\cdot y(t-1)]$ se obtiene:

$$E[y(t)\cdot y(t-1)] = \frac{-a\cdot E[y(t)^2]}{1+b} \qquad (5)$$

A partir de (4) y (5) es posible obtener las siguientes expresiones para $E[y(t)^2]$ y $E[y(t)\cdot y(t-1)]$

$$E[y(t)^2]=\frac{(1+b)\cdot(\lambda^2+\sigma^2)}{(1-a^2-b^2)\cdot(1+b)+2\cdot a^2\cdot b}$$

$$E[y(t)\cdot y(t-1)]=\frac{-a\cdot(\lambda^2+\sigma^2)}{(1-a^2-b^2)\cdot(1+b)+2\cdot a^2\cdot b}$$

En cuarto lugar se requiere calcular $E[y(t)\cdot y(t-2)]$:

$$\begin{aligned}
E[y(t)\cdot y(t-2)] &= E[(-a\cdot y(t-1)-b\cdot y(t-2)+u(t)+e(t))\cdot y(t-2)]=\\
&= E[-a\cdot y(t-1)\cdot y(t-2)]+E[-b\cdot y^2(t-2)]+E[u(t)\cdot y(t-2)]+E[e(t)\cdot y(t-2)]=\\
&= -a\cdot E[y(t)^2]-b\cdot E[y(t)\cdot y(t-1)]+0+0\\
&= -a\cdot\frac{(1+b)\cdot(\lambda^2+\sigma^2)}{(1-a^2-b^2)\cdot(1+b)+2\cdot a^2\cdot b}-b\cdot\frac{-a\cdot(\lambda^2+\sigma^2)}{(1-a^2-b^2)\cdot(1+b)+2\cdot a^2\cdot b}\\
&= \frac{-a(\lambda^2+\sigma^2)-a\cdot b\cdot(\lambda^2+\sigma^2)+a\cdot b\cdot(\lambda^2+\sigma^2)}{(1-a^2-b^2)\cdot(1+b)+2\cdot a^2\cdot b}=\frac{-a(\lambda^2+\sigma^2)}{(1-a^2-b^2)\cdot(1+b)+2\cdot a^2\cdot b}=E[y(t)\cdot y(t-1)]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación normal toma la forma:

$$\begin{aligned}
&E[y^2(t)]\cdot\theta_1+E[y(t)\cdot y(t-1)]\cdot\theta_2-E[y(t)\cdot u(t)]=-E[y(t)\cdot y(t-1)]\\
&E[y(t)\cdot y(t-1)]\cdot\theta_1+E[y^2(t)]\cdot\theta_2=-E[y(t)\cdot y(t-1)]
\end{aligned}\tag{3}$$

Si se definen las siguientes variables

$$\begin{aligned}
s_1 &= E[y^2(t)]=\frac{(1+b)\cdot(\lambda^2+\sigma^2)}{(1-a^2-b^2)\cdot(1+b)+2\cdot a^2\cdot b}\\
s_2 &= E[y(t)\cdot y(t-1)]=\frac{-a\cdot(\lambda^2+\sigma^2)}{(1-a^2-b^2)\cdot(1+b)+2\cdot a^2\cdot b}\\
s_3 &= E[y(t)\cdot u(t)]=\lambda^2\\
D &= (1-a^2-b^2)\cdot(1+b)+2\cdot a^2\cdot b
\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned}
s_1\cdot\theta_1+s_2\cdot\theta_2 &= s_3-s_2\\
s_2\cdot\theta_1+s_1\cdot\theta_2 &= -s_2
\end{aligned}$$

Y resolviendo el sistema se obtienen las siguientes expresiones:

$$\theta_1 = \frac{s_1 \cdot s_3 - s_1 \cdot s_2 + s_2^2}{s_1^2 - s_2^2}$$

$$\theta_2 = \frac{-s_2 \cdot s_3 - s_1 \cdot s_2 + s_2^2}{s_1^2 - s_2^2}$$

Deshaciendo el cambio de variables y operando se obtienen las siguientes expresiones:

$$\theta_1 = \frac{(1+b) \cdot \lambda^2 \cdot [(1-a^2-b^2) \cdot (1+b) + 2 \cdot a^2 \cdot b]}{[(1+b)^2 - a^2](\lambda^2 + \sigma^2)} + \frac{a + a \cdot b + a^2}{(1+b)^2 - a^2}$$

$$\theta_1 = \frac{-a \cdot \lambda^2 \cdot [(1-a^2-b^2) \cdot (1+b) + 2 \cdot a^2 \cdot b]}{[(1+b)^2 - a^2](\lambda^2 + \sigma^2)} + \frac{a + a \cdot b + a^2}{(1+b)^2 - a^2}$$

Luego se observa que cuando $t \to \infty$ las estimas de los parámetros θ_1 y θ_2 no tienden a los parámetros reales *a* y *b*, respectivamente.

♦

BIBLIOGRAFIA

- ASTRÖM, K. J. y WITTENMARK, B. Sistemas Controlados por Computador. Ed. Paraninfo, 1996.
- OGATA, K. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall.1998.
- OGATA, K. *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. Prentice Hall.1996.

PROBLEMAS DE

AUTOMATICA II

(Segundo parcial)

Jose Manuel Díaz

Joaquín Aranda

Departamento de Informática y Automática
E.T.S.I. Informática
U.N.E.D

Problemas de Automática II (Segundo parcial).

Última reimpresión: enero 2007.

ISBN:

Departamento de Informática y Automática
E.T.S.I Informática.
Universidad de Educación a Distancia (UNED).
C/ Juan del Rosal nº 16.
Madrid 28040 (España)

INDICE

ENUNCIADOS PROBLEMAS
TEMA 6: Introducción a la optimización

6.1 Sea la función $J(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 3 \cdot x_1$. Se pide:
(a) Calcular los puntos críticos.
(b) Determinar la matriz de curvatura y establecer el carácter (máximo, mínimo o punto silla) de los puntos críticos calculados en el apartado anterior.

6.2 Sea la función $f(x, y) = x^2 + y^4$. Se pide:
(a) Calcular los puntos críticos.
(b) Determinar la matriz de curvatura. ¿Es posible establecer el carácter (máximo, mínimo o punto silla) de los puntos críticos calculados en el apartado anterior a partir de la matriz de curvatura?. En caso negativo ¿Podría determinarse de otra forma el carácter de dichos puntos?

6.3 Un barco se mueve a 10 Km/h en una trayectoria de 30° (medido en el sentido de las aguja del reloj, con respecto al Norte que es 0°). Encontrar:
(a) El punto de máxima aproximación del barco a una isla que en t=0 s está a 10 Km Este y 30 Km Norte del barco.
(b) Encontrar la distancia de la isla a dicho punto.
(c) Encontrar el instante de máxima aproximación.

6.4 Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos dados. Encontrar el tercer punto $P_3(x_3,y_3)$ de modo que se minimiza d_1=d_2, donde d_1 es la distancia de P_3 a P_1 y d_2 la distancia de P_3 a P_2.

6.5 Un meteoro está en la órbita hiperbólica, descrita con respecto a la Tierra, situado en el origen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Encontrar el punto de máxima aproximación a un satélite que tiene una posición constante (x_1, y_1). Verificar que la solución es exactamente un mínimo.

6.6 Encontrar el rectángulo de máxima área con perímetro p, es decir,, minimizar $J(x, y) = x \cdot y$ con la ligadura $f(x, y) = 2 \cdot x + 2 \cdot y - p = 0$.

6.7 Encontrar el rectángulo de mínimo perímetro con área a^2, es decir,, minimizar $J(x, y) = 2 \cdot x + 2 \cdot y$ con la ligadura $f(x, y) = xy - a^2 = 0$

6.8 Minimizar

$$J = \frac{1}{2} x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \frac{1}{2} u^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

si

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

Hallar x^*, u^*, λ^*, J^*.

6.9 Mostrar que el máximo valor de $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es $(r^2/3)^3$.

ENUNCIADOS PROBLEMAS
TEMA 7: Control óptimo de sistemas discretos

7.1 Considérese la planta escalar $x_{k+1} = x_k \cdot u_k + 1$ con la función de coste

$$J = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2$$

con el tiempo final N=2. Dado x_0, se desea hacer, x_2=0. Se pide:

a) Escribir las ecuaciones de estado y de co-estado con u_k eliminado.
b) Supuesto que el valor final del co-estado λ_2 es conocido. Se pide: 1) Determinar λ_0, λ_1 en función de λ_2 y del estado x_0. 2) Expresar x_2 en términos de λ_2 y de x_0. 3) Determinar una ecuación de cuarto orden para λ_2 en función del estado inicial x_0.
c) Si x_0=1, encontrar las secuencias óptimas para el estado y el co-estado; determinar la secuencia de control óptima y el valor de la función de coste.

7.2 Sea $x_{k+1} = 2x_k + u_k$, encontrar la ganancia de realimentación óptima K_k que minimiza la función de coste

$$J = 5 \cdot x_5^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4} \left(x_k^2 + u_k^2 \right)$$

así como la trayectoria resultante para el estado y la señal de control. ¿Cual es el valor óptimo de la función de coste?

7.3 Un oscilador armónico está descrito por la ecuación

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\omega_n^2 \cdot x_1 + u$$

a) Discretizar la planta utilizando un periodo de muestreo T.
b) A la planta discretizada se le asocia la siguiente función de coste:

$$J = \frac{1}{2} \cdot \left[s_1 (x_k^1)^2 + s_2 (x_k^2)^2 \right] + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left[q_1 (x_k^1)^2 + q_2 (x_k^2)^2 + r \cdot (u_k)^2 \right]$$

Donde el estado es $x=[x^1, x^2]$. Escribir las ecuaciones para un controlador digital óptimo.

7.4 Repetir el problema anterior para

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = a^2 \cdot x_1 + b \cdot u$$

7.5 Modificar el controlador del problema 7.3 añadiendo los términos $2 \cdot v_1 \cdot x_k^1 \cdot u_k + 2 \cdot v_2 \cdot x_k^2 \cdot u_k$ en la función de coste, donde v_1 y v_2 son valores escalares de peso.

7.6 Considérese la siguiente planta:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u_k$$

con la función de coste

$$J_\infty = \frac{1}{2} \cdot x_\infty^T \cdot S \cdot x_\infty + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(x_k^T \cdot Q \cdot x_k + u_k^T \cdot R \cdot u_k \right)$$

donde

$$S = I, \; R = r, \; Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_1 \end{bmatrix}$$

a) Determinar el valor de la solución algebraica de Riccati y el valor óptimo de la ganancia en estado estacionario.
b) Determinar los polos del sistema en lazo cerrado y demostrar la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

7.7 Para el sistema discreto con

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; S = I, Q = I$$

a) Utilizar el procedimiento de Chang-Letov y la fórmula de Ackermann para hallar el valor óptimo de la ganancia en estado estacionario y el sistema en lazo cerrado resultante cuando r=0.1
b) Dibujar el lugar de las raíces cuando r varía de infinito a cero.

7.8 Sea $\phi(z) = z^2 + 2 \cdot \alpha \cdot z + \omega^2$. Determinar las raíces de este polinomio. Definir el polinomio reciproco como $z^2 \phi(z) = \omega^2 z^2 + 2 \cdot \alpha \cdot z + 1$. Mostrar que las raíces de este último polinomio son las raíces del primer polinomio reflejadas en el circulo unidad. Esto es, transformadas por la relación $1/z$.

ENUNCIADOS PROBLEMAS
TEMA 8: Control óptimo de sistemas continuos

8.1 Se desea minimizar

$$J = \int_0^{\pi} \dot{x}^2 dt$$

Formular el problema como uno de control óptimo. Determinar $x(t)$ y J^*.

8.2 Considérese la planta no-lineal

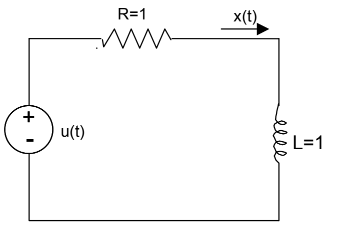
$$\dot{x} = -x^3 + u, \; x(0) = 1/2$$

con la función de coste:

$$J = \frac{1}{2} \cdot x^2(2) + \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 (x^2 + u^2) dt$$

Escribir las ecuaciones de estado, co-estado, condición de estacionaridad y condiciones frontera. Eliminar $u(t)$ de las ecuaciones de estado y co-estado.

8.3 Para el sistema de la figura



a) Encontrar la ecuación de estado.

Se desea cargar la inductancia a $x(T)$=2 Amperios en T=1 si $x(0)$=0 y minimizando

$$J = \int_0^1 u^2 dt$$

b) Encontrar el control óptimo.
c) Encontrar la trayectoria óptima del estado.

8.4 Regulador lineal cuadrático con peso conjunto al estado y al control. Sea la planta

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \tag{1}$$

con la función de coste

$$J(t_0) = \frac{1}{2} x^T(T) \cdot S(T) \cdot x(T) + \frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^{T} \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q & V \\ V^T & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt \tag{2}$$

donde la matriz del bloque es semidefinida positiva y R>0.

a) Definir una ganancia de Kalman modificada como

$$K = R^{-1} \cdot \left(V^T + B^T \cdot S \right) \tag{3}$$

donde $S(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati

$$-\dot{S} = A^T \cdot S + S \cdot A - \cdot K^T \cdot R \cdot K + Q \tag{4}$$

Mostrar que el control óptimo es:

$$u(t) = -K(t) \cdot x(t) \tag{5}$$

b) Mostrar que el coste del control óptimo en cualquier subintervalo $[t,T]$ es

$$J(t) = \frac{1}{2} x^T(t) \cdot S(t) \cdot X(t) \tag{6}$$

En resumen, si la función de coste tiene un término V que pesa el producto escalar del estado y el control, la única modificación al control óptimo es que se debe modificar la ganancia de Kalman y se debe usar la ecuación de Riccati (4).

8.5 La planta escalar

$$\dot{x} = u$$

tiene la función de coste

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \cdot s \cdot x^2(T) + \frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^{T} r \cdot u^2 dt$$

a) Resolver la ecuación de Riccati utilizando separación de variables.
b) Encontrar el control óptimo.

8.6 Para el sistema del problema 8.3 considerando como función de coste

$$J = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot x^2(T) + \frac{1}{2} \cdot \int_0^T (x^2 + u^2) dt$$

a) Resolver la ecuación de Riccati utilizando separación de variables.
b) Encontrar la ley de control óptima.

8.7 Sea el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u$$

con la función de coste

$$J = \frac{1}{2} \cdot x^T(T) \cdot x(T) + \frac{1}{2} \cdot \int_0^T (x^T \cdot x + r \cdot u^2) dt$$

donde $x=[x_1,x_2]^T$.
a) Encontrar la ecuación de Riccati. Escribirla como tres ecuaciones diferenciales escalares. Encontrar la ganancia de realimentación en términos de las componentes escalares de $S(t)$.
b) Obtener los valores anteriores en el caso de que se llegue a una situación estacionaria.

8.8 Sea la planta

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\cdot\delta\cdot\omega_n \end{bmatrix}\cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}\cdot u$$

con función de coste

$$J(t_0) = \frac{1}{2} x^T(T)\cdot\begin{bmatrix} S_1(T) & 0 \\ 0 & S_2(T) \end{bmatrix}\cdot x(T) + \frac{1}{2}\cdot\int_{t_0}^{T} x^T\cdot\begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}\cdot x + r\cdot u^2\, dt$$

Encontrar el control óptimo en estado estacionario (t_0=0, T=∞).

8.9 Sea la planta

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u$$

con función de coste

$$J = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\infty}(x_1^2 + 2\cdot v\cdot x_1\cdot x_2 + q\cdot x_2^2 + u^2)dt$$

donde $(q\text{-}v^2)>0$.

a) Encontrar la solución a la ecuación algebraica de Riccati.
b) Encontrar el control óptimo.
c) Encontrar el sistema en lazo cerrado óptimo. ¿Es estable?
d) Dibujar el lugar de las raíces cuando q varía de 0 a ∞. ¿Para que valores de q es estable el sistema?.

8.10 Sea el sistema

$$\dot{x} = x + u$$

con función de coste

$$J = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\infty}(x^2 + u^2)dt$$

a) Encontrar la solución a la EAR.
b) Determinar la ganancia y encontrar el polo en lazo cerrado.

8.11 Sea el sistema

$$\dot{x}_1 = x_1 + u$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2$$

con función de coste

$$J = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\infty}(x_1^2 + x_2^2 + r\cdot u^2)dt \qquad r = \frac{1}{10}$$

a) Encontrar la solución a la EAR.
b) Determinar la ganancia y encontrar el polo en lazo cerrado.

8.12 Contestar a los siguientes apartados:

a) Encontrar todas las soluciones simétricas a la EAR si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = 1 \quad Q = C^T \cdot C$$

b) ¿Como sabemos a priori que existe una única solución definida positiva?. Comprobar el tipo de definitud de las soluciones.

c) Algunas soluciones son complejas. Para cada solución real S, comprobar la estabilidad del sistema en lazo cerrado (A-$B \cdot K$), donde $K=R^{-1} \cdot B^{T} \cdot S$. Ver así que soluciones a la ecuación de Riccati estabilizan y cuales desestabilizan al sistema en lazo cerrado viendo cuales son definidas positivas y cuales definidas negativas, respectivamente.

8.13 Contestar a los siguientes apartados:

a) Para el sistema del problema 8.11 utilizar la ecuación de Chang-Letov para determinar los polos del sistema en lazo cerrado si r=1/10. Determinar la ganancia óptima que consigue esos polos. Determinar el sistema en lazo cerrado.

b) Dibujar el lugar de las raíces para el sistema en lazo cerrado cuando r varía de ∞ a 0.

ENUNCIADOS PROBLEMAS
TEMA 9: Control estocástico de sistemas discretos

9.1 Considérese el proceso

$$y(k) = 2\frac{q^2 - 1.4\cdot q + 0.5}{q^2 - 1.2\cdot q + 0.4}\cdot e(k)$$

donde $e(k)$ es un ruido blanco con media cero y varianza unidad. Determinar el predictor óptimo y la varianza del error de predicción cuando: a) $m = 1$, b) $m= 2$ y c) $m= 3$.

9.2 Para el proceso

$$y(k) + a\cdot y(k-1) = e(k) + c\cdot e(k-1)$$

a) Determinar el predictor sobre m pasos.
b) Determinar la varianza del error de predicción como una función de m.

9.3 Un proceso estocástico está descrito por

$$y(k) - 0.9\cdot y(k-1) = e(k) + 5\cdot e(k-1)$$

a) Determinar una descripción equivalente tal que el cero del polinomio C correspondiente se encuentre dentro del círculo unidad.
b) Determinar el predictor sobre dos pasos para el proceso y la varianza del error de predicción.

9.4 Considérese el proceso

$$y_k - y_{k-1} + 0.5\cdot y_{k-2} = u_{k-2} + 0.5\cdot u_{k-3} + 0.5\cdot[e_k + 0.8\cdot e_{k-1} + 0.25\cdot e_{k-2}]$$

Determinar el controlador de varianza mínima.

9.5 Determinar el controlador de varianza mínima para el sistema

$$y_k - 0.5\cdot y_{k-1} = u_{k-2} + e_k - 0.7\cdot e_{k-1}$$

donde $e(k)$ es ruido blanco de media 2 y varianza unidad.

9.6 Considérese el proceso

$$y_k + a\cdot y_{k-1} = u_{k-2} + e_k + c\cdot e_{k-1}$$

a) Determinar el controlador de varianza mínima.
b) Analizar el caso especial a=0.

9.7 Dado el sistema

$$y_k - 1.7\cdot y_{k-1} + 0.7\cdot y_{k-2} = u_{k-\alpha} + 0.5\cdot u_{k-\alpha-1} + e_k + 1.5\cdot e_{k-1} + 0.9\cdot e_{k-2}$$

Determinar el predictor óptimo de la salida sobre α pasos, el controlador de varianza mínima y la varianza de la salida para: *a*) α=1. *b*) α=2.

9.8 Dado el sistema

$$y_k - 0.25 \cdot y_{k-1} + 0.5 \cdot y_{k-2} = u_{k-1} + e_k + 0.5 \cdot e_{k-1}$$

donde $e(k)$ es ruido blanco con varianza unidad. Suponer que el proceso está controlado con el controlador proporcional

$$u(k) = -K \cdot y(k)$$

a) Demostrar que la varianza de la salida es

$$\frac{2.125 - K}{0.5 \cdot (1.75 - K) \cdot (1.25 + K)}$$

b) Suponiendo que el sistema ahora no está controlado con el controlador proporcional, obtener el controlador de varianza mínima y la varianza de la salida.
c) La expresión de la varianza de la salida dada en el apartado *a* es cero para K=2.125. Explicar la paradoja que se da al compararla con la varianza de la salida obtenida en el apartado *b*.

9.9 Dado el sistema

$$y(k) = q^{-2} \cdot \frac{1}{1 - 0.3 \cdot q^{-1}} \cdot u(k) + \frac{1 - 0.5 \cdot q^{-1}}{1 - 0.3 \cdot q^{-1}} \cdot e(k)$$

donde e(k) es un ruido blanco de media nula y varianza unidad.
a) Calcular el predictor de varianza mínima sobre dos pasos.
b) Calcular el controlador de varianza mínima.
c) Calcular la función de transferencia en lazo cerrado con el controlador anterior.
d) Calcular la varianza de la señal de salida en lazo cerrado.

9.10 Considérese el sistema dinámico

$$y(k) = \frac{b \cdot q^{-1}}{1 + aq^{-1}} \cdot u(k) + (1 + c \cdot q^{-1}) \cdot e(k)$$

donde e(k) es ruido blanco. Calcular el controlador de varianza mínima para este sistema

9.11 Dado el proceso

$$y_k - 0.2 \cdot y_{k-1} + 0.6 \cdot y_{k-2} = 2 \cdot u_{k-1} - 0.8 \cdot u_{k-2} + e_k + 0.2 \cdot e_{k-1}$$

a) Determinar el predictor óptimo para la salida sobre un paso.
b) Determinar el controlador de varianza mínima.
c) Calcular la función de transferencia en lazo cerrado. Indicar sus polos y sus ceros.
d) Calcular la varianza de la señal de salida en lazo abierto y en lazo cerrado.

9.12 Para el sistema

$$y_k - 0.9 \cdot y_{k-1} = u_k + e_k - 0.5 \cdot e_{k-1}$$

Se pide:
a) Determinar el controlador LQG.
b) Particularizar el controlador LQG obtenido en el apartado anterior para el caso ρ=1.

ENUNCIADOS PROBLEMAS
TEMA 10: Control robusto QFT

10.1 Considérese la siguiente especificación de estabilidad robusta:

$$\left|\frac{L(j\cdot\omega)}{1+L(j\cdot\omega)}\right| \leq W_{er}$$

donde $L(j\cdot\omega)$ es la función de transferencia en lazo abierto y W_{er} es un parámetro constante. Demostrar que

$$MG = 1+\frac{1}{\mathrm{W_{er}}} \qquad MF = 180º - \frac{180º}{\pi}\mathrm{acos}\left(\frac{0.5}{W_{er}^2}-1\right)$$

son las expresiones que permiten determinar el margen de fase MF y el margen de ganancia MG en función del parámetro W_{er}.

10.2 Determinar el valor de $\mathrm{W_{er}}$ en la especificación de estabilidad robusta para un diseño QFT en los siguientes casos: a) $MF \geq 30º$. b) $MF \geq 75º$. c) $MG \geq 1.9$. d) $MG \geq 10$ dB.

10.3 Determinar el margen de fase (MF) y el margen de ganancia (MG) que garantiza la especificación de estabilidad robusta para un diseño QFT en los siguientes casos: a) $\mathrm{W_{er}}=1.1$. b) $\mathrm{W_{er}}=1.5$. c) $\mathrm{W_{er}}=2.0$.

10.4 Determinar las matrices MN y MD, y los vectores n_0 y d_0 para las siguientes familias de plantas:

a)

$$P(s) = \frac{(-1.5\cdot q_1 + 2.3\cdot q_3)\cdot s^2 + (3.6 - 1.5\cdot q_2 + 2.3\cdot q_4)\cdot s + 9.6}{(r_2 - \cdot 0.2 r_1)\cdot s^3 + s^2 + (r_3 + 6.2\cdot r_2 - 10\cdot r_1)\cdot s - (5.3 + 2.9\cdot r_3)}$$

con $q_1 \in [1.2, 1.6]$, $q_2 \in [0.1, 0.7]$, $q_3 \in [-1, 5]$, $q_4 \in [2.5, 5]$, $r_1 \in [-5, -2.5]$, $r_2 \in [-3, 3]$, $r_3 \in [-3, 3]$.

b)

$$P(s) = \frac{b_2\cdot s^2 + b_0}{s^3 + a_1\cdot s + a_0}$$

con $b_2 \in [-5,5]$, $b_0 \in [1,5]$, $a_1 \in [2.6, 2.9]$, $a_0 \in [-3,3]$.

10.5 Dada la familia de plantas

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2\cdot\delta\cdot\omega_n s + \omega_n^2}$$

con $\delta \in [0.5\ 0.8]$ y $\omega_n \in [1,4]$.

a) Obtener los puntos de la aproximación de la plantilla $\mathcal{T}(1)$ usando la técnica del barrido en el espacio de parámetros considerando $\delta=\{0.5, 0.6, 0.7, 0.8\}$ y $\omega_n=\{1,2,3,4\}$.
b) Calcular el punto de la plantilla asociado a la planta nominal ($\delta=0.5$, $\omega_n=1.5$).
c) Dibujar la aproximación de la plantilla $\mathcal{T}(1)$, su contorno $\delta\mathcal{T}(1)$ y el punto nominal. ¿Queda el punto nominal encerrado dentro del contorno? ¿Porqué?

10.6 Dada la familia de plantas

$$P(s) = \frac{e^{-\tau\cdot s}}{s+a}$$

con $\tau \in [1\ 10]$ y $a \in [1,5]$.

a) Obtener los puntos de la aproximación de la plantilla $\mathcal{T}(2.5)$ usando la técnica del barrido en el espacio de parámetros considerando $\tau=\{1, 2.5, 5, 10\}$ y $a=\{1, 2.25, 3.75, 5\}$.

b) Dibujar la aproximación de la plantilla $\mathcal{T}(2.5)$ y su contorno $\delta\mathcal{T}(2.5)$.

SOLUCIONES PROBLEMAS
TEMA 6: Introducción a la optimización

♦ Solución problema 6.1

a) En primer lugar se debe calcular el gradiente de la función *J*

$$J_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial J}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + 3 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

Los *puntos críticos* de *J* deben satisfacer la ecuación

$$J_x = 0$$

Particularizando para este problema se obtiene:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene que (x_1,x_2)=(-2,-1) es el único punto crítico de *J*.

b) La matriz de curvatura (o Hessiano) de *J* es:

$$J_{xx} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 J}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 J}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para determinar la naturaleza del punto crítico hay que calcular los autovalores de la matriz de curvatura evaluada en dicho punto crítico:

$$\left\| \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right\| = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1,\, \lambda = 3$$

Puesto que ambos autovalores son positivos la matriz de curvatura es definida positiva, y en consecuencia el punto crítico (x_1,x_2)=(-2,-1) es un *mínimo*.

♦

♦ Solución problema 6.2

a) En primer lugar se debe calcular el gradiente de la función *f*

$$f_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot x \\ 4 \cdot y^3 \end{bmatrix}$$

Los *puntos críticos* de *f* deben satisfacer la ecuación

$$f_x = 0$$

Particularizando para este problema se obtiene:

$$\begin{cases} 2 \cdot x = 0 \\ 4 \cdot y^3 = 0 \end{cases}$$

Luego (x_1,x_2)=(0,0) es el único punto crítico de *f*.

b) La matriz de curvatura (o Hessiano) de *f* es:

$$f_{xx} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \cdot y^2 \end{bmatrix}$$

Para determinar la naturaleza del punto crítico (0,0) hay que calcular los autovalores de la matriz de curvatura evaluada en (0,0):

$$\left\| \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0-\lambda \end{bmatrix} \right\| = 0 \Rightarrow (2-\lambda) \cdot \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2,\ \lambda = 0$$

Al tener un autovalor positivo y otro igual a 0, la matriz de curvatura en (0,0) es semidefinida positiva. Luego no es posible determinar la naturaleza o carácter del punto crítico a partir de la matriz de curvatura.

Sin embargo, puesto que *f* es positiva en todo su dominio, es fácil comprobar que el punto crítico (0,0) es un mínimo.

♦

♦ Solución problema 6.3

a) En la Figura 1 se muestra la situación descrita en el enunciado

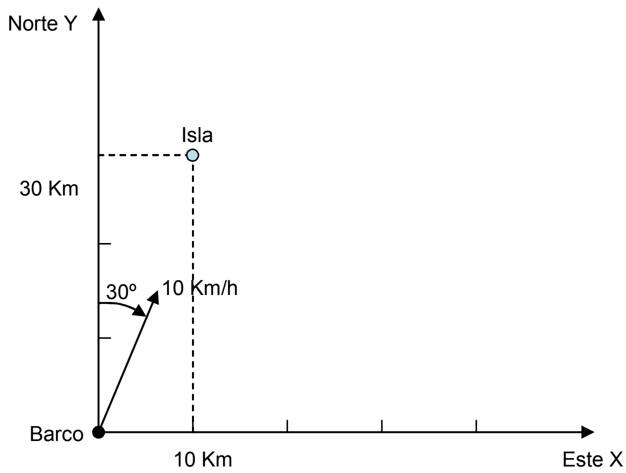


Figura 1

La posición del barco en un cierto instante de tiempo *t* es (*x*(*t*), *y*(*t*)). Su trayectoria es una línea recta definida por la ecuación:

$$y(t) = m \cdot x(t) = \tan(60^{\circ}) \cdot x(t) = \sqrt{3} \cdot x(t)$$

La distancia *d* del barco a la isla situada en (x_1, y_1)=(10 Km, 30 Km) en un cierto instante de tiempo *t* es:

$$d(t) = \sqrt{(x(t) - x_1)^2 + (y(t) - y_1)^2} = \sqrt{(x(t) - 10)^2 + (y(t) - 30)^2}$$

Para obtener el punto de máxima aproximación del barco a la isla hay que minimizar la distancia tomando como ligadura la trayectoria del barco.

En vez de considerar como función de coste directamente la distancia se va a considerar, equivalentemente por simplificar, el cuadrado de la distancia, es decir:

$$J(x, y) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

La función de ligadura es:

$$f(x, y) = y - m \cdot x = 0$$

Luego el Hamiltoniano es:

$$H(x,y,\lambda) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + \lambda \cdot (y - m \cdot x)$$

Las condiciones para un punto estacionario son:

$$\begin{aligned} H_x &= 2 \cdot (x - x_1) - \lambda \cdot m = 0 \\ H_y &= 2 \cdot (y - y_1) + \lambda = 0 \\ H_\lambda &= y - m \cdot x = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene:

$$x = \frac{x_1 + m \cdot y_1}{1 + m^2} = 15.49\,Km \qquad y = m \cdot \frac{x_1 + m \cdot y_1}{1 + m^2} = 26.83\,Km$$

Queda por determinar si el punto estacionario (15.49 Km, 26.83 Km) es realmente un mínimo, para ello hay que calcular la matriz de curvatura. Sustituyendo la función de ligadura en la función de coste se obtiene una función de coste de una única variable:

$$J(x) = (x - x_1)^2 + (m \cdot x - y_1)^2$$

Derivando una vez se obtiene

$$J_x = 2 \cdot (x - x_1) + 2 \cdot m \cdot (m \cdot x - y_1)$$

Y derivando otra vez se obtiene finalmente la matriz de curvatura:

$$J_{xx} = 2 + 2 \cdot m^2$$

Al tratarse de una constante, dicha matriz tiene un único autovalor $\lambda = (2 + 2 \cdot m^2)$ que es positivo. En consecuencia la matriz es definida positiva, y el punto crítico es efectivamente un mínimo.

Luego el punto de máxima aproximación del barco a la isla es P= (15.49 Km Norte, 26.83 Km Este).

b) La distancia de la isla a dicho punto se obtiene evaluando la distancia *d* en *P*:

$$d = \sqrt{(15.49 - 10)^2 + (26.83 - 30)^2} = 6.34\,Km$$

c) Puesto que la trayectoria del barco es una línea recta, el espacio recorrido por el barco desde el origen hasta el punto P es:

$$e = \sqrt{(15.49 - 0)^2 + (26.83 - 0)^2} = 30.98\,Km$$

Puesto que la velocidad del barco *v* constante, se cumple la relación física:

$$e = v \cdot t$$

Despejando *t* y sustituyendo los valores de *v* y *t* se obtiene:

$$t = \frac{e}{v} = \frac{30.98}{10} = 3.098 \text{ horas}$$

♦

♦ Solución problema 6.4

En la Figura 2 se ilustra la situación descrita en el enunciado.

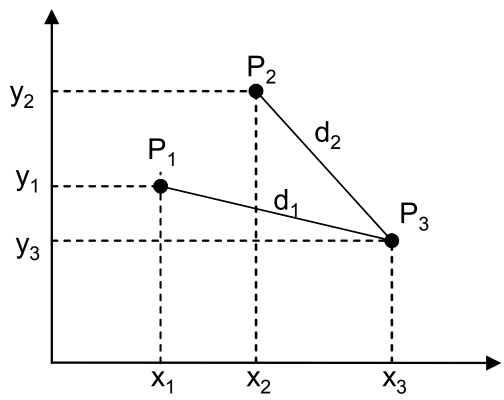


Figura 2

Las expresiones de la distancia d_1 y d_2 son

$$d_1 = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

Se va a considerar como función de coste, equivalentemente por simplificar, el cuadrado de la distancia d_1, es decir:

$$J(x_3, y_3) = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$$

Nótese que en la expresión anterior x_1, y_1, x_2 e y_2 se suponen constantes, mientras que x_3 e y_3 son variables. También se podría tomar como función de coste el cuadrado de la distancia d_2.

Puesto que d_1=d_2 como función de ligadura puede tomarse equivalentemente, por simplificar, la resta de los cuadrados de las distancias:

$$f(x_3, y_3) = d_1^2 - d_2^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - (x_3 - x_2)^2 - (y_3 - y_2)^2 = 0$$

Luego el Hamiltoniano es:

$$H(x_3, y_3, \lambda) = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + \lambda \cdot [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - (x_3 - x_2)^2 - (y_3 - y_2)^2]$$

Las condiciones para un punto estacionario son:

$$\begin{aligned}
H_{x_3} &= 2\cdot(x_3 - x_1) - \lambda\cdot[2\cdot(x_3 - x_1) - 2\cdot(x_3 - x_2)] = (x_3 - x_1) - \lambda\cdot(x_1 - x_2) = 0 \\
H_{y_3} &= 2\cdot(y_3 - y_1) - \lambda\cdot[2\cdot(y_3 - y_1) - 2\cdot(y_3 - y_2)] = (y_3 - y_1) - \lambda\cdot(y_1 - y_2) = 0 \\
H_{\lambda} &= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - (x_3 - x_2)^2 - (y_3 - y_2)^2 = 0
\end{aligned}$$

De la primera y segunda ecuaciones se pueden despejar x_3 e y_3 como una función de λ, respectivamente:

$$\begin{aligned}
x_3 &= x_1 + \lambda\cdot(x_1 - x_2) \\
y_3 &= y_1 + \lambda\cdot(y_1 - y_2)
\end{aligned}$$

Sustituyen estas dos ecuaciones en la expresión de H_λ:

$$(x_1 + \lambda\cdot(x_1 - x_2) - x_1)^2 + (y_1 + \lambda\cdot(y_1 - y_2) - y_1)^2 - (x_1 + \lambda\cdot(x_1 - x_2) - x_2)^2 - (y_1 + \lambda\cdot(y_1 - y_2) - y_2)^2 = 0$$

Reordenando los términos se llega a la siguiente ecuación para λ:

$$\begin{aligned}
&\lambda^2\cdot(x_1 - x_2)^2 + \lambda^2\cdot(y_1 - y_2)^2 - (x_1 - x_2)^2(1+\lambda)^2 - (y_1 - y_2)^2(1+\lambda)^2 = 0 \\
&\lambda^2\cdot[(x_1 - x_2)^2 + \cdot(y_1 - y_2)^2] - (1+\lambda)^2\cdot[(x_1 - x_2)^2 + \cdot(y_1 - y_2)^2] \\
&\lambda^2 - (1+\lambda)^2 = 0
\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene

$$\lambda = -\frac{1}{2}$$

Sustituyendo el valor de la λ en las expresiones anteriormente obtenidas para x_3 e y_3 se obtiene:

$$\begin{aligned}
x_3 &= x_1 + \frac{1}{2}\cdot(x_1 - x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2} \\
y_3 &= y_1 + \frac{1}{2}\cdot(y_1 - y_2) = \frac{y_1 + y_2}{2}
\end{aligned}$$

En conclusión, si se desea que d_1=d_2 y ambas distancias sean lo más pequeña posibles entonces P_3

debe ser el punto medio del segmento que une P_1 y P_2.

♦

♦ Solución problema 6.5

Se va a considerar como función de coste el cuadrado de la distancia entre el meteoro y el satélite:

$$J(x,y) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

La función de ligadura es la órbita del meteoro:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

El Hamiltoniano es:

$$H(x,y,\lambda) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + \lambda \cdot \left[\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \right]$$

Las condiciones para un punto estacionario son:

$$H_x = 2 \cdot (x - x_1) + \lambda \cdot \left(2 \cdot \frac{x}{a^2} \right) = 0$$

$$H_y = 2 \cdot (y - y_1) - \lambda \cdot \left(2 \cdot \frac{y}{b^2} \right) = 0$$

$$H_\lambda = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

De la primera y segunda ecuaciones se pueden despejar x e y como una función de λ, respectivamente:

$$x = \frac{x_1}{1 + \frac{\lambda}{a^2}} = \frac{a^2 \cdot x_1}{a^2 + \lambda}$$

$$y = \frac{y_1}{1 - \frac{\lambda}{b^2}} = \frac{b^2 \cdot y_1}{b^2 - \lambda}$$

Sustituyen estas dos ecuaciones en la expresión de H_λ

$$\left(\frac{a\cdot x_1}{a^2+\lambda}\right)^2-\left(\frac{b\cdot y_1}{b^2-\lambda}\right)^2=1$$

y reordenando los términos se llega a la siguiente ecuación de cuarto orden para λ:

$$\lambda^4+c_1\cdot\lambda^3+c_2\cdot\lambda^2+c_3\cdot\lambda+c_4=0$$

Donde

$$\begin{aligned}
c_1&=-2\cdot(b^2-a^2)\\
c_2&=(b^2-a^2)^2-2\cdot a^2\cdot b^2+b^2\cdot y_1^2-a^2\cdot x_1^2\\
c_3&=2\cdot a^2\cdot b^2\cdot(b^2-a^2+x_1^2+y_1^2)\\
c_4&=a^4\cdot b^4-a^2\cdot b^4\cdot x_1^2+a^4\cdot b^2\cdot y_1^2
\end{aligned}$$

Obsérvese que los coeficientes c_1, c_2, c_3 y c_4 son conocidos ya que son función de a, b, x_1 y y_1 que son datos conocidos. Si se tuviesen sus valores numéricos se podría resolver la ecuación de cuarto orden para λ, que obviamente tendrá cuatro raíces, es decir, existen 4 posibles valores de λ. Si se sustituyen estos valores en la expresiones de x e y en función de λ se obtendrán 4 puntos estacionarios (x^*, y^*).

Sustituyendo estos puntos en la expresión de $J(x,y)$, se obtendrían cuatro valores. El punto (x^*,y^*) que produzca el valor de J más pequeño será el punto crítico asociado a la distancia mínima entre el meteoro y el satélite.

Existe otro método, aparte del de sustitución directa, para verificar que la distancia es la mínima, se trata de calcular la matriz de curvatura de $J(x,y)$, J_{xy}.

Despejando x de la función de ligadura se obtiene la siguiente relación entre x e y:

$$x=a\cdot\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}$$

Sustituyendo esta expresión en J(x,y), se obtiene:

$$J(y)=\left(a\cdot\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}-x_1\right)^2+(y-y_1)^2$$

Luego

$$J_y = \frac{2 \cdot a}{b^2} \cdot \left[a \cdot y - x_1 \cdot y \cdot \left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2} \right] + 2 \cdot (y - y_1)$$
$$J_{yy} = 2 \cdot \left[1 + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a \cdot x_1}{b^2} \cdot \left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right)^{-3/2} \right]$$

En el punto de máxima aproximación la distancia es mínima y J_{yy} debe ser positiva. Los valores de y para los que J_{yy} es positiva son:

$$|y| > b \cdot \sqrt{\left(\frac{a \cdot x_1}{a^2 + b^2}\right)^{2/3} - 1}$$

Llevando está condición a la expresión de y en función de λ se obtiene:

$$\lambda > b^2 \left[1 - \frac{y_1}{b} \cdot \left[\left(\frac{a \cdot x_1}{a^2 + b^2}\right)^{2/3} - 1 \right]^{-1/2} \right]$$

Esta desigualdad indica que para que la distancia sea mínima λ debe ser mayor que la parte derecha de la desigualdad. En este caso, cuando hay un sólo mínimo y J_{yy} es definida positiva, sólo puede haber una λ que cumpla dicha condición, y es la que corresponde a la mayor de las raíces de la ecuación de cuarto orden para λ.

♦

♦ Solución problema 6.6

El Hamiltoniano es

$$H(x, y, \lambda) = x \cdot y + \lambda \cdot [2 \cdot x + 2 \cdot y - p]$$

Las condiciones para un punto estacionario son:

$$H_x = y + 2 \cdot \lambda = 0$$
$$H_y = x + 2 \cdot \lambda = 0$$
$$H_\lambda = 2 \cdot x + 2 \cdot y - p = 0$$

De la primera y segunda ecuaciones se pueden despejar x e y como una función de λ, respectivamente:

$$x = -2 \cdot \lambda$$
$$y = -2 \cdot \lambda$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la función de ligadura, es posible obtener el valor de λ:

$$2 \cdot (-2 \cdot \lambda) + 2 \cdot (-2 \cdot \lambda) - p = 0 \rightarrow -8 \cdot \lambda = p \rightarrow \lambda = -\frac{p}{8}$$

Sustituyendo el valor de λ en las expresiones anteriormente obtenidas para *x* e *y* se obtiene:

$$x = \frac{p}{4} \quad y = \frac{p}{4}$$

En conclusión, el rectángulo de máxima área que posee un perímetro *p* es un cuadrado de lado *p*/4.

♦

♦ Solución problema 6.7

El Hamiltoniano es

$$H(x, y, \lambda) = 2 \cdot x + 2 \cdot y + \lambda \cdot [x \cdot y - a^2]$$

Las condiciones para un punto estacionario son:

$$H_x = 2 + \lambda \cdot y = 0$$
$$H_y = 2 + \lambda \cdot x = 0$$
$$H_\lambda = x \cdot y - a^2 = 0$$

De la primera y segunda ecuaciones se pueden despejar *x* e *y* como una función de λ, respectivamente:

$$y = -2/\lambda$$
$$x = -2/\lambda$$

Sustituyen estas dos ecuaciones en la función de ligadura, es posible obtener el valor de λ:

$$\frac{-2}{\lambda} \cdot \frac{-2}{\lambda} - a^2 = \frac{4}{\lambda^2} = a^2 \rightarrow \lambda^2 = \frac{4}{a^2} \rightarrow \lambda = \pm \frac{2}{a}$$

Sustituyendo el valor negativo de λ (el positivo nos daría longitudes negativas para los lados lo cual no tiene sentido) en las expresiones anteriormente obtenidas para *x* e *y* se obtiene:

$$x = a \quad y = a$$

En conclusión, el rectángulo de mínimo perímetro que posee un área a^2 es un cuadrado de lado *a*.

♦

♦ Solución problema 6.8

La función de coste es

$$J = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Se puede expresar equivalentemente en la forma:

$$J(x_1, x_2, u_1, u_2) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 + u_1^2 + u_1 \cdot u_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Las ecuaciones de ligadura son:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Se pueden expresar equivalentemente en la forma:

$$\begin{aligned} & x_1 - 1 - 2 \cdot u_1 - 2 \cdot u_2 = 0 \\ & x_2 - 3 - u_1 = 0 \end{aligned}$$

El Hamiltoniano es

$$J(x_1, x_2, u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 + u_1^2 + u_1 \cdot u_2 + \frac{u_2^2}{2} + \lambda_1 \cdot (x_1 - 1 - 2 \cdot u_1 - 2 \cdot u_2) + \lambda_2 \cdot (x_2 - 3 - u_1)$$

Las condiciones para un punto estacionario son:

$$
\begin{aligned}
H_{x_1} &= x_1 + \lambda_1 = 0 \\
H_{x_2} &= 2 \cdot x_2 + \lambda_2 = 0 \\
H_{u_1} &= 2 \cdot u_1 + u_2 - 2 \cdot \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\
H_{u_2} &= u_1 + u_2 - 2 \cdot \lambda_1 = 0 \\
H_{\lambda_1} &= x_1 - 1 - 2 \cdot u_1 - 2 \cdot u_2 = 0 \\
H_{\lambda_2} &= x_2 - 3 - u_1 = 0
\end{aligned}
$$

Hay que resolver un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas. Una posible forma de hacerlo es siguiendo los siguientes pasos:

<u>Paso 1</u>*:* De la primera y segunda ecuaciones se pueden despejar *x* e *y* como una función de λ_1 y λ_2, respectivamente:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\lambda_1 \\
x_2 &= -\frac{\lambda_2}{2}
\end{aligned}
$$

<u>Paso 2</u>*:* Por otra parte, restando H_{u1} - H_{u2} se obtiene la ecuación

$$u_1 - \lambda_2 = 0$$

Luego

$$u_1 = \lambda_2$$

<u>Paso 3</u>*:* Despejando u_2 de la ecuación H_{u2}

$$u_1 + u_2 - 2 \cdot \lambda_1 = 0 \rightarrow u_2 = -u_1 + 2 \cdot \lambda_1$$

y sustituyendo las expresiones obtenidas para u_1 se obtiene:

$$u_2 = 2 \cdot \lambda_1 - \lambda_2$$

<u>Paso 4</u>*:* Sustituyendo las expresiones obtenidas para x_2 y u_1 en la segunda ecuación de ligadura:

$$x_2 - 3 - u_1 = 0 \rightarrow -\frac{\lambda_2}{2} - 3 - \lambda_2 = 0$$

y despejando λ_{-2} se obtiene:

$$\lambda_2 = -2$$

<u>Paso 5</u>*:* Sustituyendo las expresiones obtenidas para x_1, u_1 y u_2 en la primera ecuación de ligadura

$$x_1 - 1 - 2\cdot u_1 - 2\cdot u_2 = 0 \rightarrow -\lambda_1 - 1 - 2\cdot\lambda_2 - 2\cdot(2\cdot\lambda_1 - \lambda_2) = 0$$

y despejando λ_1 se obtiene:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{5}$$

Paso 6: Sustituyendo las valores de λ_1 y λ_2 en las expresiones obtenidas para x_1, x_2, u_1 y u_2 se obtiene

$$x_1 = \frac{1}{5},\ x_2 = 1,\ u_1 = -2,\ \ u_2 = \frac{8}{5}$$

Por lo tanto:

$$(x^*)^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$$
$$(u^*)^T = \begin{pmatrix} -2 & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$
$$(\lambda^*)^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -2 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo estos valores asociados al estacionario en la expresión de la función de coste se obtiene

$$J^* = 3.1$$

♦

♦ Solución problema 6.7

El Hamiltoniano es

$$H(x,y,\lambda) = x^2\cdot y^2\cdot z^2 + \lambda\cdot[x^2 + y^2 + z^2 - r^2]$$

Las condiciones para un punto estacionario son:

$$H_x = 2\cdot x\cdot y^2\cdot z^2 + 2\cdot\lambda\cdot x = 0$$
$$H_y = 2\cdot y\cdot x^2\cdot z^2 + 2\cdot\lambda\cdot y = 0$$
$$H_z = 2\cdot z\cdot x^2\cdot y^2 + 2\cdot\lambda\cdot z = 0$$
$$H_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

Multiplicando la primera ecuación por *x*, la segunda ecuación por *y*, la tercera ecuación por *z* y sumando estas tres ecuaciones se obtiene la ecuación

$$6 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 + 2 \cdot \lambda \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \rightarrow 6 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 + 2 \cdot \lambda \cdot (r^2) = 0$$

Despejando λ

$$\lambda = -\frac{3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}{r^2}$$

y sustituyendo λ en las expresión de H_x

$$2 \cdot x \cdot y^2 \cdot z^2 + 2 \cdot \left(-\frac{3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}{r^2} \right) \cdot x = 0$$

es posible despejar *x*

$$x = \frac{r^2}{3}$$

De forma análoga, sustituyendo la expresión de λ dentro de H_y y H_x se podrían obtener *y* y *z*

$$y = \frac{r^2}{3} \quad z = \frac{r^2}{3}$$

Finalmente sustituyendo *x* , *y* y *z* en la función de coste se obtiene el valor máximo

$$J^* = \left(\frac{r^2}{3} \right)^3$$

Tal y como se deseaba demostrar.

♦

SOLUCIONES PROBLEMAS
TEMA 7: Control óptimo de sistemas discretos

♦ Solución problema 7.1

a) El modelo del sistema es

$$x_{k+1} = x_k \cdot u_k + 1$$

La función de coste es

$$J = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2$$

Comparando (2) con la expresión general

$$J = \phi(N, x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L^K(x_k, u_k)$$

se obtiene

$$\phi(N, x_N) = 0 \qquad L^K(x_k, u_k) = \frac{1}{2} \cdot u_k^2$$

Luego el Hamiltoniano es

$$H^k(u_k, x_k) = \frac{1}{2} \cdot u_k^2 + \lambda_{k+1} \cdot (x_k \cdot u_k + 1)$$

Conocido el Hamiltoniano es posible obtener la ecuación de estado

$$x_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}} = x_k \cdot u_k + 1 \qquad (1)$$

la ecuación del co-estado

$$\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial x_k} = \lambda_{k+1} \cdot u_k \qquad (2)$$

y la condición estacionaria

$$\frac{\partial H^k}{\partial u_k} = u_k + \lambda_{k+1} \cdot x_k = 0 \qquad (3)$$

Despejando u_k de (5) se obtiene

$$u_k = -\lambda_{k+1} \cdot x_k \tag{4}$$

Sustituyendo (4) en (1) y (2), se tienen las ecuaciones de estado y del co-estado con u_k eliminado:

$$x_{k+1} = -\lambda_{k+1} \cdot x_k^2 + 1 \tag{5}$$

$$\lambda_k = -\lambda_{k+1}^2 \cdot x_k \tag{6}$$

b1) Evaluando (5) y (6) para k=0 y k=1 se obtienen las siguientes cuatro ecuaciones

$$x_1 = -\lambda_1 \cdot x_0^2 + 1 \tag{7}$$

$$x_2 = -\lambda_2 \cdot x_1^2 + 1 \tag{8}$$

$$\lambda_0 = -\lambda_1^2 \cdot x_0 \tag{9}$$

$$\lambda_1 = -\lambda_2^2 \cdot x_1 \tag{10}$$

Sustituyendo (7) en (10) y despejando λ_1 se obtiene:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2 \cdot x_0^2 - 1} \tag{11}$$

El valor de λ_0 se obtiene sustituyendo (11) en (9):

$$\lambda_0 = \frac{-\lambda_2^4 \cdot x_0}{(\lambda_2^2 \cdot x_0^2 - 1)^2} \tag{12}$$

b2) Sustituyendo (11) en (7) se obtiene

$$x_1 = -\frac{\lambda_2^2 \cdot x_0^2}{\lambda_2^2 \cdot x_0^2 - 1} + 1 \tag{13}$$

Sustituyendo (13) en (8) y operando se obtiene

$$x_2 = 1 - \frac{\lambda_2}{(\lambda_2^2 \cdot x_0^2 - 1)^2} \tag{14}$$

b3) Del enunciado se sabe que se desea conseguir que x_2=0, sustituyendo este valor en (14), operando y reordenando los términos se obtiene la siguiente ecuación de cuarto orden para λ_2

$$x_0^4 \cdot \lambda_2^4 - 2 \cdot x_0^2 \cdot \lambda_2^2 - \lambda_2 + 1 = 0 \tag{15}$$

c) Sustituyendo $x_0=1$ en (15) y resolviendo la ecuación de cuarto orden se obtienen los siguientes raíces: $\lambda_2=0.52489$, $\lambda_2=1.4902$ y $\lambda_2=-1.0076 \pm 0.51312i$. Sólo interesan las raíces reales y en consecuencia son las únicas que hay que analizar.

Caso 1 ($\lambda_2=0.52489$): De (11) y (12) se obtiene que $\lambda_1=-0.3808$ y que $\lambda_0=0.1446$. Asimismo, de (13) y (14) se obtiene que $x_1=1.3803$ y que $x_2=0$. Por otra parte de (4) se obtiene que $u_0=-0.3808$, $u_1=-0.7245$ y $u_2=0$. Finalmente, de (2) se obtiene que J*=0.3349.

Caso 2 ($\lambda_2=1.4902$): De (11) y (12) se obtiene que $\lambda_1=1.8192$ y que $\lambda_0=-3.9095$. Asimismo, de (13) y (14) se obtiene que $x_1=-0.8092$ y que $x_2=0$. Por otra parte de (4) se obtiene que $u_0=-1.8092$, $u_1=1.2207$ y $u_2=0$. Finalmente, de (2) se obtiene que J*=2.3999.

Puesto que el valor de J* obtenido en el caso 2 es mayor que el obtenido en el caso 1, se concluye que las secuencias óptimas para el estado (x_0, x_1, x_2), para el co-estado (λ_0, λ_1, λ_2) y del control (u_0, u_1, u_2) se obtienen en el caso 2.

♦

♦ Solución problema 7.2

a) El modelo del sistema es

$$x_{k+1} = 2 \cdot x_k + u_k \tag{1}$$

y la función de coste es

$$J = 5 \cdot x_5^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4} \left(x_k^2 + u_k^2 \right) \tag{2}$$

Se observa que se trata de un sistema escalar lineal discreto. Comparando con las ecuaciones generales de este tipo de sistemas

$$x_{k+1} = F \cdot x_k + G \cdot u_k \tag{3}$$

$$J = \frac{1}{2} \cdot x_N^T \cdot S \cdot x_N + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k^T \cdot Q \cdot x_k + u_k^T \cdot R \cdot u_k \right) \tag{4}$$

Se obtienen los valores de las matrices: F=2, G=1, S_5=10, Q=1 y R=1.

La ley de realimentación vendría dada por las siguientes ecuaciones

$$M_k = S_k - \frac{S_k^2}{1+S_k} = \frac{S_k}{1+S_k} \tag{5}$$

$$S_{k-1} = 4 \cdot M_k + 1 \tag{6}$$

$$K_{k-1} = \frac{2 \cdot S_k}{1+S_k} = 2 \cdot M_k \tag{7}$$

Para k=5 se toma como condiciones iniciales K_5=0 y S_5=10, y se obtiene:

$$M_5 = \frac{S_5}{1+S_5} = 0.9091$$

$$S_4 = 4 \cdot M_5 + 1 = 4.6364$$

$$K_4 = 2 \cdot M_5 = 1.8182$$

Para k=4

$$M_4 = \frac{S_4}{1+S_4} = 0.8226$$

$$S_3 = 4 \cdot M_4 + 1 = 4.2904$$

$$K_3 = 2 \cdot M_4 = 1.6452$$

Para k=3

$$M_3 = \frac{S_3}{1+S_3} = 0.8110$$

$$S_2 = 4 \cdot M_3 + 1 = 4.2440$$

$$K_2 = 2 \cdot M_3 = 1.6220$$

Para k=2

$$M_2 = \frac{S_2}{1+S_2} = 0.8093$$

$$S_1 = 4 \cdot M_2 + 1 = 4.2372$$

$$K_1 = 2 \cdot M_2 = 1.6186$$

Para *k*=1

$$M_1 = \frac{S_1}{1+S_1} = 0.8091$$

$$S_0 = 4 \cdot M_1 + 1 = 4.2364$$

$$K_0 = 2 \cdot M_1 = 1.6182$$

La señal de control es

$$u_k = -K_k \cdot x_k \quad \text{si } k < N \tag{8}$$

Sustituyendo esta expresión en (1) se obtiene:

$$x_{k+1} = (2 - K_k) \cdot x_k \tag{9}$$

Puesto que no se conoce el estado inicial x_0, se va determinar la secuencia x_k/x_0 del estado y u_k/u_0 de la señal de control.

$$\frac{u_k}{x_0} = -K_k \cdot \frac{x_k}{x_0} \quad \text{si } k < N \tag{10}$$

$$\frac{x_{k+1}}{x_0} = (2 - K_k) \cdot \frac{x_k}{x_0} \tag{11}$$

Utilizando las expresiones (10) y (11) y las ganancias K_k *k*=0,1,..,5 calculadas anteriormente, se obtiene:

Para *k*=0

$$\frac{x_0}{x_0} = 1$$

$$\frac{u_0}{x_0} = -K_0 = -1.6182$$

Para *k*=1

$$\frac{x_1}{x_0} = (2 - K_0)\cdot\frac{x_0}{x_0} = 0.3818$$

$$\frac{u_1}{x_0} = -K_1\cdot\frac{x_1}{x_0} = -1.6180$$

Para *k*=2

$$\frac{x_2}{x_0} = (2 - K_1)\cdot\frac{x_1}{x_0} = 0.1456$$

$$\frac{u_2}{x_0} = -K_2\cdot\frac{x_1}{x_0} = -0.2362$$

Para *k*=3

$$\frac{x_3}{x_0} = (2 - K_2)\cdot\frac{x_2}{x_0} = 0.0551$$

$$\frac{u_3}{x_0} = -K_3\cdot\frac{x_3}{x_0} = -0.0906$$

Para *k*=4

$$\frac{x_4}{x_0} = (2 - K_3)\cdot\frac{x_3}{x_0} = 0.0195$$

$$\frac{u_4}{x_0} = -K_4\cdot\frac{x_4}{x_0} = -0.0352$$

Para *k*=5

$$\frac{x_5}{x_0} = (2 - K_4)\cdot\frac{x_4}{x_0} = 0.0036$$

$$\frac{u_5}{x_0} = -K_5 \cdot \frac{x_5}{x_0} = 0$$

♦

♦ Solución problema 7.3

a) Comparando el sistema dado con la ecuación general de un sistema lineal continuo

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

se obtiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por otra parte la ecuación general del sistema discretizado es:

$$x_{k+1} = \Phi \cdot x_k + \Gamma \cdot u_k$$

con

$$\Phi = e^{A \cdot T}$$

$$\Gamma = \int_o^T e^{A \cdot t} \cdot B \cdot dt$$

siendo *T* el periodo de muestreo.

Para determinar la matriz Φ es necesario calcular la exponencial de una matriz, que se puede obtener mediante una desarrollo en serie de potencias:

$$\Phi = e^{A \cdot T} = I + A \cdot T + \frac{A^2}{2!} \cdot T^2 + \frac{A^3}{3!} \cdot T^3 + ... = \begin{bmatrix} 1 - \frac{T^2 \cdot \omega^2}{2!} + ... & T - \frac{T^3 \cdot \omega^2}{3!} + ... \\ -T \cdot \omega^2 \cdot - \frac{T^3 \cdot \omega^4}{3!} + ... & 1 - \frac{T^2 \cdot \omega^2}{2} + ... \end{bmatrix}$$

Recordando las expresiones de los desarrollos en serie de Taylor de la función seno y de la función coseno:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2 \cdot n + 1)!} \cdot x^{2 \cdot n + 1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2 \cdot n)!} \cdot x^{2 \cdot n}$$

la expresión de Φ se puede expresar de forma equivalente como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \cos(\omega \cdot T) & \dfrac{sen(\omega \cdot T)}{\omega} \\ \omega \cdot sen(\omega \cdot T) & \cos(\omega \cdot T) \end{bmatrix}$$

Asimismo

$$\Gamma = \int_o^T \begin{bmatrix} \cos(\omega \cdot t) & \dfrac{sen(\omega \cdot t)}{\omega} \\ \omega \cdot sen(\omega \cdot t) & \cos(\omega \cdot t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot dt \cdot = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\cos(\omega \cdot t)}{\omega^2} \\ \dfrac{sen(\omega \cdot t)}{\omega} \end{bmatrix}$$

b) De la expresión de la función de coste dada en el enunciado comparándola con la expresión general

$$J = \phi(N,\, x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L^k(x_k, u_k) = \frac{1}{2} \cdot x_N^T \cdot S \cdot x_N + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k^T \cdot Q \cdot x_k + u_k^T \cdot R \cdot u_k \right)$$

se obtiene que

$$\phi(N,\, x_N) = \frac{1}{2} \cdot \left[s_1 (x_k^1)^2 + s_2 (x_k^2)^2 \right]$$

$$L^k(x_k, u_k) = \frac{1}{2} \cdot \left[q_1 (x_k^1)^2 + q_2 (x_k^2)^2 + r \cdot (u_k)^2 \right]$$

y que

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix},\quad R = r$$

El modelo del sistema es:

$$x_{k+1} = f^k(x_k, u_k) = \Phi \cdot x_k + \Gamma \cdot u_k$$

El Hamiltoniano es:

$$H^k(x_k,u_k) = L^k(x_k,u_k) + \lambda_{k+1}^T f^k(x_k,u_k) = \frac{1}{2}\cdot\left[q_1(x_k^1)^2 + q_2(x_k^2)^2 + r\cdot(u_k)^2\right] + \left[\lambda_{k+1}^1, \lambda_{k+1}^2\right]^T \cdot x_{k+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[q_1(x_k^1)^2 + q_2(x_k^2)^2 + r\cdot(u_k)^2\right] + \lambda_{k+1}^1\cdot\left[x_k^1\cdot\cos(\omega\cdot T) + x_k^2\cdot\frac{sen(\omega\cdot T)}{\omega} + u_k\cdot\frac{1-\cos(\omega\cdot T)}{\omega^2}\right] +$$

$$+ \lambda_{k+1}^2\cdot\left[-x_k^1\cdot\omega\cdot sen(\omega\cdot T) + x_k^2\cdot\cos(\omega\cdot T) + u_k\cdot\frac{sen(\omega\cdot T)}{\omega}\right]$$

La ecuación de estado es:

$$x_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}} = \Phi\cdot x_k + \Gamma\cdot u_k$$

La ecuación del co-estado es:

$$\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial x_k} = Q\cdot x_k + \Phi^T\cdot\lambda_{k+1}$$

$$\lambda_k^1 = q_1(x_k^1) + \lambda_{k+1}^1\cdot\cos(\omega\cdot T) - \lambda_{k+1}^2\cdot\omega\cdot sen(\omega\cdot T)$$

$$\lambda_k^2 = q_2(x_k^2) + \lambda_{k+1}^1\cdot\frac{sen(\omega\cdot T)}{\omega} + \lambda_{k+1}^2\cdot\cos(\omega\cdot T)$$

La condición estacionaria es:

$$0 = \frac{\partial H^k}{\partial u_k} = \frac{1}{2}\cdot R\cdot + \Gamma^T\cdot\lambda_{k+1}$$

$$\frac{1}{2}\cdot r + \lambda_{k+1}^1\cdot\left(\frac{1-\cos(\omega\cdot T)}{\omega^2}\right) + \lambda_{k+1}^2\cdot\frac{sen(\omega\cdot T)}{\omega} = 0$$

Las condiciones frontera son:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_N} - \lambda_N\right)^T\cdot dx_N = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot s_1 - \lambda_N^1\right)\cdot dx_N^1 + \left(\frac{1}{2}\cdot s_2 - \lambda_N^2\right)\cdot dx_N^2 = 0$$

$$\left(\frac{\partial H^0}{\partial x_0}\right)^T \cdot dx_0 = 0$$

$$\left[q_1(x_0^1) + \lambda_{k+1}^1 \cdot \cos(\omega \cdot T) - \lambda_{k+1}^2 \cdot \omega \cdot sen(\omega \cdot T)\right] dx_0^1 + [q_2(x_0^2) + \lambda_1^1 \cdot \frac{sen(\omega \cdot T)}{\omega} + \lambda_1^2 \cdot \cos(\omega \cdot T)] \cdot dx_0^2 = 0$$

♦

♦ Solución problema 7.4

a) Comparando el sistema dado con la ecuación general de un sistema lineal continuo

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

se obtiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

Por otra parte la ecuación general del sistema discretizado es:

$$x_{k+1} = \Phi \cdot x_k + \Gamma \cdot u_k$$

con

$$\Phi = e^{A \cdot T}$$

$$\Gamma = \int_o^T e^{A \cdot t} \cdot B \cdot dt$$

siendo T el periodo de muestreo.

Para determinar la matriz Φ es necesario calcular la exponencial de una matriz, que se puede obtener mediante una desarrollo en serie de potencias:

$$\Phi = e^{A \cdot T} = I + A \cdot T + \frac{A^2}{2!} \cdot T^2 + \frac{A^3}{3!} \cdot T^3 + \ldots\ldots = \begin{bmatrix} 1 + \frac{T^2 \cdot a^2}{2!} + \ldots & T + \frac{T^3 \cdot a^2}{3!} + \ldots \\ T \cdot a^2 \cdot + \frac{T^3 \cdot a^4}{3!} + \ldots & 1 + \frac{T^2 \cdot a^2}{2} + \ldots \end{bmatrix}$$

Recordando las expresiones de los desarrollos en serie de Taylor de la función seno hiperbólico y de la función coseno hiperbólico:

$$senhx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\cdot n+1)!} \cdot x^{2\cdot n+1}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\cdot n)!} \cdot x^{2\cdot n}$$

la expresión de Φ se puede expresar de forma equivalente como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \cosh(a\cdot T) & \dfrac{senh(a\cdot T)}{a} \\ a\cdot senh(a\cdot T) & \cosh(a\cdot T) \end{bmatrix}$$

Asimismo:

$$\Gamma = \int_o^T \begin{bmatrix} \cosh(a\cdot t) & \dfrac{senh(a\cdot t)}{a} \\ a\cdot senh(a\cdot t) & \cosh(a\cdot t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \cdot dt \cdot = \begin{bmatrix} \dfrac{b\cdot(1+\cosh(a\cdot t))}{a^2} \\ \dfrac{b\cdot senh(a\cdot T)}{a} \end{bmatrix}$$

b) De la expresión de la función de coste dada en el enunciado comparándola con la expresión general

$$J = \phi(N,\, x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L^k(x_k, u_k) = \frac{1}{2}\cdot x_N^T \cdot S \cdot x_N + \frac{1}{2}\cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k^T \cdot Q \cdot x_k + u_k^T \cdot R \cdot u_k \right)$$

se obtiene que

$$\phi(N,\, x_N) = \frac{1}{2}\cdot \left[s_1 (x_k^1)^2 + s_2 (x_k^2)^2 \right]$$

$$L^k(x_k, u_k) = \frac{1}{2}\cdot \left[q_1 (x_k^1)^2 + q_2 (x_k^2)^2 + r\cdot (u_k)^2 \right]$$

y que

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix},\; Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix},\;\; R = r$$

El modelo del sistema es:

$$x_{k+1} = f^k(x_k, u_k) = \Phi \cdot x_k + \Gamma \cdot u_k$$

El Hamiltoniano es:

$$H^k(x_k,u_k)=L^k(x_k,u_k)+\lambda_{k+1}^T f^k(x_k,u_k)=\frac{1}{2}\cdot\left[q_1(x_k^1)^2+q_2(x_k^2)^2+r\cdot(u_k)^2\right]+\left[\lambda_{k+1}^1,\lambda_{k+1}^2\right]^T\cdot x_{k+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[q_1(x_k^1)^2+q_2(x_k^2)^2+r\cdot(u_k)^2\right]+\lambda_{k+1}^1\cdot\left[x_k^1\cdot\cosh(a\cdot T)+x_k^2\cdot\frac{senh(a\cdot T)}{a}+u_k\cdot\frac{b\cdot(\cosh(a\cdot T)-1)}{a^2}\right]+$$

$$+\lambda_{k+1}^2\cdot\left[x_k^1\cdot a\cdot senh(a\cdot T)+x_k^2\cdot\cosh(a\cdot T)+u_k\cdot\frac{b\cdot senh(a\cdot T)}{a}\right]$$

La ecuación de estado es:

$$x_{k+1}=\frac{\partial H^k}{\partial\lambda_{k+1}}=\Phi\cdot x_k+\Gamma\cdot u_k$$

La ecuación del co-estado es:

$$\lambda_k=\frac{\partial H^k}{\partial x_k}=Q\cdot x_k+\Phi^T\cdot\lambda_{k+1}^T$$

$$\lambda_k^1=q_1(x_k^1)+\lambda_{k+1}^1\cdot\cosh(a\cdot T)+\lambda_{k+1}^2\cdot a\cdot senh(a\cdot T)$$

$$\lambda_k^2=q_2(x_k^2)+\lambda_{k+1}^1\cdot\frac{senh(a\cdot T)}{a}+\lambda_{k+1}^2\cdot\cosh(a\cdot T)$$

La condición estacionaria es:

$$0=\frac{\partial H^k}{\partial u_k}=\frac{1}{2}\cdot R\cdot+\Gamma^T\cdot\lambda_{k+1}$$

$$\frac{1}{2}\cdot r+\lambda_{k+1}^1\cdot\frac{b\cdot(\cosh(a\cdot T)-1)}{a^2}+\lambda_{k+1}^2\cdot\frac{b\cdot senh(a\cdot T)}{a}=0$$

Las condiciones frontera son:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_N}-\lambda_N\right)^T\cdot dx_N=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot s_1-\lambda_N^1\right)\cdot dx_N^1+\left(\frac{1}{2}\cdot s_2-\lambda_N^2\right)\cdot dx_N^2=0$$

$$\left(\frac{\partial H^0}{\partial x_0}\right)^T\cdot dx_0=0$$

$$\left[q_1(x_0^1)+\lambda_{k+1}^{1}\cdot\cosh(a\cdot T)+\lambda_{k+1}^{2}\cdot a\cdot senh(a\cdot T)\right]dx_0^1+[q_2(x_0^2)+\lambda_1^1\cdot\frac{senh(a\cdot T)}{a}+\lambda_1^2\cdot\cosh(a\cdot T)]\cdot dx_0^2=0$$

♦

♦ Solución problema 7.5

a) La discretización de la planta es la misma que la del Problema 7.3, luego

$$\Phi=\begin{bmatrix}\cos(\omega\cdot T) & \frac{sen(\omega\cdot T)}{\omega}\\ \omega\cdot sen(\omega\cdot T) & \cos(\omega\cdot T)\end{bmatrix}$$

$$\Gamma=\begin{bmatrix}\frac{1-\cos(\omega\cdot t)}{\omega^2}\\ \frac{sen(\omega\cdot t)}{\omega}\end{bmatrix}$$

b) De acuerdo con el enunciado la expresión de la función de coste ahora es:

$$J=\frac{1}{2}\cdot\left[s_1(x_k^1)^2+s_2(x_k^2)^2\right]+\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\left[q_1(x_k^1)^2+q_2(x_k^2)^2+2\cdot v_1\cdot x_k^1\cdot u_k+2\cdot v_2\cdot x_k^2\cdot u_k+r\cdot(u_k)^2\right]$$

Que se puede expresar equivalentemente en la forma:

$$J=\frac{1}{2}\cdot x_N^T\cdot S\cdot x_N+\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_k^T\cdot Q\cdot x_k+2\cdot x_k^T\cdot V\cdot u_k+u_k^T\cdot R\cdot u_k\right)$$

donde

$$S=\begin{bmatrix}s_1 & 0\\ 0 & s_2\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}q_1 & 0\\ 0 & q_2\end{bmatrix},\ V=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}\quad R=r$$

Asimismo comparando con:

$$J=\phi(N,\,x_N)+\sum_{k=0}^{N-1}L^k(x_k,u_k)$$

se obtiene que

$$\phi(N,\,x_N)=\frac{1}{2}\cdot\left[s_1(x_k^1)^2+s_2(x_k^2)^2\right]$$

$$L^k(x_k,u_k)=\frac{1}{2}\cdot\left[q_1(x_k^1)^2+q_2(x_k^2)^2+2\cdot v_1\cdot x_k^1\cdot u_k+2\cdot v_2\cdot x_k^2\cdot u_k+r\cdot(u_k)^2\right]$$

El modelo del sistema es:

$$x_{k+1}=f^k(x_k,u_k)=\Phi\cdot x_k+\Gamma\cdot u_k$$

El Hamiltoniano es:

$$\begin{aligned}H^k(x_k,u_k)&=L^k(x_k,u_k)+\lambda_{k+1}^T f^k(x_k,u_k)=\frac{1}{2}\cdot\left[q_1(x_k^1)^2+q_2(x_k^2)^2+2\cdot v_1\cdot x_k^1\cdot u_k+2\cdot v_2\cdot x_k^2\cdot u_k+r\cdot(u_k)^2\right]+\\&+\left[\lambda_{k+1}^1,\lambda_{k+1}^2\right]^T\cdot x_{k+1}=\\&=\frac{1}{2}\cdot\left[q_1(x_k^1)^2+q_2(x_k^2)^2+2\cdot v_1\cdot x_k^1\cdot u_k+2\cdot v_2\cdot x_k^2\cdot u_k+r\cdot(u_k)^2\right]+\\&+\lambda_{k+1}^1\cdot\left[x_k^1\cdot\cos(\omega\cdot T)+x_k^2\cdot\frac{sen(\omega\cdot T)}{\omega}+u_k\cdot\frac{1-\cos(\omega\cdot T)}{\omega^2}\right]+\\&+\lambda_{k+1}^2\cdot\left[-x_k^1\cdot\omega\cdot sen(\omega\cdot T)+x_k^2\cdot\cos(\omega\cdot T)+u_k\cdot\frac{sen(\omega\cdot T)}{\omega}\right]\end{aligned}$$

La ecuación de estado es:

$$x_{k+1}=\frac{\partial H^k}{\partial\lambda_{k+1}}=\Phi\cdot x_k+\Gamma\cdot u_k$$

La ecuación del co-estado es:

$$\lambda_k=\frac{\partial H^k}{\partial x_k}=Q\cdot x_k+V\cdot u_k+\Phi^T\cdot\lambda_{k+1}$$

$$\lambda_k^1=q_1(x_k^1)+v_1\cdot u_k+\lambda_{k+1}^1\cdot\cos(\omega\cdot T)-\lambda_{k+1}^2\cdot\omega\cdot sen(\omega\cdot T)$$

$$\lambda_k^2=q_2(x_k^2)++v_2\cdot u_k+\lambda_{k+1}^1\cdot\frac{sen(\omega\cdot T)}{\omega}+\lambda_{k+1}^2\cdot\cos(\omega\cdot T)$$

La condición estacionaria es:

$$0=\frac{\partial H^k}{\partial u_k}=x_k^T\cdot V\cdot+\frac{1}{2}\cdot R+\Gamma^T\cdot\lambda_{k+1}$$

$$(x_k^1)\cdot v_1 + (x_k^2)\cdot v_2 + \frac{1}{2}\cdot r + \lambda_{k+1}^1 \cdot \left(\frac{1-\cos(\omega \cdot T)}{\omega^2} \right) + \lambda_{k+1}^2 \cdot \frac{sen(\omega \cdot T)}{\omega} = 0$$

Las condiciones frontera son:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_N} - \lambda_N \right)^T \cdot dx_N = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot s_1 - \lambda_N^1 \right)\cdot dx_N^1 + \left(\frac{1}{2}\cdot s_2 - \lambda_N^2 \right)\cdot dx_N^2 = 0$$

$$\left(\frac{\partial H^0}{\partial x_0} \right)^T \cdot dx_0 = 0$$

$$\left[q_1(x_0^1) + v_1\cdot u_0 + \lambda_{k+1}^1 \cdot \cos(\omega \cdot T) - \lambda_{k+1}^2 \cdot \omega \cdot sen(\omega \cdot T) \right] dx_0^1 +$$
$$+ [q_2(x_0^2) + v_2\cdot u_0 + \lambda_1^1 \cdot \frac{sen(\omega \cdot T)}{\omega} + \lambda_1^2 \cdot \cos(\omega \cdot T)] \cdot dx_0^2 = 0$$

♦

♦ Solución problema 7.6

a) Comparando el sistema del enunciado con la expresión general de un sistema discreto

$$x_{k+1} = F\cdot x_k + G\cdot u_k$$

se obtiene

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación de Ricatti en el estado estacionario toma la siguiente forma:

$$S = F^T \left[S - S\cdot G \left(R + G^T \cdot S \cdot G \right)^{-1} \cdot G^T \cdot S \right] F + Q$$

La matriz S es simétrica y definida positiva, luego su estructura es:

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las expresiones de *F*, *G*, *S*, *Q* y R en la ecuación de Ricatti y operando se obtiene la siguiente igualdad:

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_1 + s_1 - \dfrac{s_2^2}{s_3 + r} \end{bmatrix}$$

Luego se obtienen las siguientes ecuaciones escalares:

$$s_1 = q_1 \qquad (1)$$

$$s_2 = q_2 \qquad (2)$$

$$s_3 = q_1 + s_1 - \frac{s_2^2}{s_3 + r}$$

Sustituyendo en la última ecuación los valores de s_1 y s_2 y reordenando términos se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado para s_3:

$$s_3^2 + (r - 2\cdot q_1)\cdot s_3 + (q_2^2 - 2\cdot q_1 \cdot r) = 0$$

Cuya soluciones son

$$s_3 = -\frac{1}{2}\cdot(r - 2\cdot q_1) \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(r - 2\cdot q_1)^2 - 4\cdot(q_2^2 - 2\cdot q_1 \cdot r)} = -\frac{1}{2}\cdot(r - 2\cdot q_1) \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(r + 2\cdot q_1)^2 - 4\cdot q_2^2} \qquad (3)$$

De las dos soluciones para s_3 se debe escoger aquella que haga que la matriz S sea definida positiva. La ecuación de los autovalores de S es:

$$\begin{vmatrix} s_1 - \lambda & s_2 \\ s_2 & s_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda\cdot(s_1 + s_3) + (s_1 \cdot s_3 - s_2^2) = 0$$

Cuya autovalores son:

$$\lambda = \frac{(s_1 + s_3) \pm \sqrt{(s_1 + s_3)^2 - 4\cdot(s_1 \cdot s_3 - s_2^2)}}{2}$$

Para que una matriz sea definida positiva sus autovalores deben ser positivos. En este caso esto se cumple si dan las siguientes condiciones (las cuales se obtienen fácilmente analizando la solución con el signo de la raíz negativo):

$$(s_1 + s_3) > 0 \qquad (4)$$

$$(s_1 \cdot s_3 - s_2^2) > 0 \tag{5}$$

Por otra parte, para poder aplicar la metodología de obtención del controlador óptimo, una suposición que se realiza es que la matriz Q es simétrica y al menos semidefinida positiva. En este problema, según el enunciado:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_1 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de esta matriz se obtendrían de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} q_1 - \lambda & q_2 \\ q_2 & q_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (q_1 - \lambda)^2 - q_2^2 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 2 \cdot q_1 \cdot \lambda + q_1^2 - q_2^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo orden, se obtienen los siguientes autovalores:

$$\lambda = \frac{2 \cdot q_1 \pm \sqrt{4 \cdot q_1^2 - 4 \cdot (q_1^2 - q_2^2)}}{2} = q_1 \pm q_2$$

Si Q tiene que ser al menos semidefinida positiva sus autovalores λ_1=q_1+ q_2 y λ_2=q_1- q_2 tienen que ser mayores o iguales a 0. Luego:

$$q_1 + q_2 \geq 0 \Rightarrow q_1 \geq 0 \text{ (supuesto que } q_2 \geq 0)$$

$$q_1 - q_2 \geq 0 \Rightarrow q_1 \geq q_2 \tag{6}$$

Asimismo, para poder aplicar la metodología de obtención del controlador óptimo, otra suposición que se realiza es que el par (F,C) es observable, en consecuencia C debe ser no nula. Supongamos que el sistema tiene una única salida en dicho caso la matriz C tendría la forma C=[c_1 c_2].

Se sabe que Q=C^T·C luego

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 \cdot c_2 \\ c_1 \cdot c_2 & c_2^2 \end{bmatrix}$$

igualando se obtiene:

$$c_1 = \sqrt{q_1}$$
$$c_2 = \sqrt{q_1}$$

Luego si q_1=0 la matriz C sería nula y el sistema sería no observable. En consecuencia

$$q_1 > 0 \tag{7}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta las desigualdades (6) y (7), y las ecuaciones (1) y (2), se obtiene que

$$s_1 > 0 \tag{8}$$

$$s_1 \geq s_2 \tag{9}$$

La condición (5) implica que

$$(s_1 \cdot s_3) > s_2^2$$

Luego o bien s_1 o s_3 son simultáneamente positivos o simultáneamente negativos, pero por la condición (8) o la condición (6), se deduce que ambos deben ser positivos.

Faltaría por ver cuando s_3 es positivo, para ello hay que analizar las dos posibles soluciones dadas en la expresión (3), que equivalentemente pueden expresarse en la forma:

$$s_3 = X \pm Y$$

donde

$$X = -\frac{1}{2} \cdot (r - 2 \cdot q_1)$$
$$Y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(r - 2 \cdot q_1)^2 - 4 \cdot (q_2^2 - 2 \cdot q_1 \cdot r)}$$

Por definición la raíz cuadrada de un número siempre es positiva, luego $Y>0$. Tomando como referencia los posibles valores de X, existen tres casos que hacen que s_3 sea positivo:

Caso 1: $s_3=X+Y$ es positivo si $X>0$

Caso 2: $s_3=X+Y$ es positivo si $X<0$ y $Y>X$

Caso 3: $s_3=X-Y$ es positivo si $X>0$ y $X>Y$

Se observa que existen más casos asociados a la solución de $s_3=X+Y$ que hacen que s_3 sea positivo, lo que significa que existe mayor libertad para configurar los posibles valores de los parámetros r o q_1. Por lo tanto está será la solución que se escogerá.

$$s_3 = -\frac{1}{2} \cdot (r - 2 \cdot q_1) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(r + 2 \cdot q_1)^2 - 4 \cdot q_2^2} \tag{10}$$

El valor óptimo de la ganancia en estado estacionario es:

$$\overline{K} = \left(R + G^T \cdot S \cdot G\right)^{-1} \cdot G^T \cdot S \cdot F$$

Sustituyendo las matrices R, G, S y F se obtiene

$$\overline{K} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{s_2}{s_3 + r} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo (2) y (10) en la expresión anterior se obtiene:

$$\overline{K} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{q_2}{\dfrac{1}{2} \cdot r + q_1 + \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{(r + 2 \cdot q_1)^2 - 4 \cdot q_2^2}} \end{bmatrix} \tag{11}$$

b) La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es:

$$\left| z \cdot I - (F - G \cdot \overline{K}) \right| = 0$$

Sustituyendo las matrices y operando se obtiene

$$\begin{vmatrix} z & -1 \\ 0 & z + \dfrac{s_2}{s_3 + r} \end{vmatrix} = z \cdot \left(z + \dfrac{s_2}{s_3 + r} \right) = 0$$

Luego los polos en lazo cerrado son:

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = -\frac{s_2}{s_3 + r} = -\frac{q_2}{\dfrac{1}{2} \cdot r + q_1 + \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{(r + 2 \cdot q_1)^2 - 4 \cdot q_2^2}}$$

El sistema en lazo cerrado será estable si los dos polos se encuentran dentro del círculo unidad, es decir, $|z_1|<1$ y $|z_2|<1$. Obviamente $z_1=0$ se encuentra dentro del circulo unidad. Faltaría por comprobar si esto también sucede con z_2.

Para que $|z_2|<1$ se tiene que cumplir la siguiente condición:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot r + q_1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(r + 2 \cdot q_1)^2 - 4 \cdot q_2^2} \right) > q_2$$

Se observa que

$$\left(\frac{1}{2}\cdot r + q_1 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(r+2\cdot q_1)^2 - 4\cdot q_2^2}\right) > \left(\frac{1}{2}\cdot r + q_1\right) > q_1$$

Por otra parte de la relación (6) se sabe

$$q_1 \geq q_2$$

Luego efectivamente $|z_2|<1$.

En consecuencia el sistema en lazo cerrado es estable.

♦

♦ Solución problema 7.7

La ecuación de Chang-Letov es:

$$\Delta^c(z^{-1})\cdot\Delta^c(z) = \left|H^T(z^{-1})\cdot H(z) + R\right|\cdot\Delta\,(z^{-1})\cdot\Delta\,(z)\cdot\left|G^T\cdot\overline{S}\cdot G + R\right|^{-1} \quad (1)$$

En la expresión anterior $\Delta\,(z)$ y $H(z)$ son la ecuación característica y la función de transferencia del sistema en lazo abierto, mientras que $\Delta^c(z)$ es la ecuación característica en lazo cerrado.

Con los datos del enunciado, y supuesto que $C = \sqrt{Q} = \sqrt{q}\cdot I = I$ es posible calcular $\Delta\,(z)$ y $H(z)$:

$$\Delta(z) = \left|z\cdot I - F\right| = (z-1)^2 \quad (2)$$

$$H(z) = C\cdot(z\cdot I - F)^{-1}\cdot G = \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ z-1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Equivalentemente, $H(z)$ puede expresarse como:

$$H(z) = \frac{N(z)}{\Delta(z)} \quad (4)$$

donde

$$N(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ z-1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Luego, sustituyendo (5) en (1) y reordenando, la ecuación de Chang-Letov puede expresarse de la siguiente forma:

$$\delta \cdot \Delta^c(z^{-1}) \cdot \Delta^c(z) = (1/r) \cdot N^T(z^{-1}) \cdot N(z) + \Delta(z^{-1}) \cdot \Delta(z) \tag{6}$$

donde

$$\delta = 1 + G^T \cdot S \cdot G / r \tag{7}$$

Las raíces de $\Delta^c(z^{-1}) \cdot \Delta^c(z) = 0$, son los ceros de

$$(1/r) \cdot N^T(z^{-1}) \cdot N(z) + \Delta(z^{-1}) \cdot \Delta(z)$$

que puede expresarse en la forma:

$$1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{N^T(z^{-1}) \cdot N(z)}{\Delta(z^{-1}) \cdot \Delta(z)} \tag{8}$$

Sustituyendo (4) y (5) en (8) se obtiene

$$1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{\begin{bmatrix} 1 & z^{-1} - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ z - 1 \end{bmatrix}}{(z^{-1} - 1)^2 \cdot (z - 1)^2} = 1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{1 + (z^{-1} - 1) \cdot (z - 1)}{(z^{-1} - 1)^2 \cdot (z - 1)^2} \tag{9}$$

Para r=0.1, los ceros de (9) son:

$$1 + \frac{1}{0.1} \cdot \frac{1 + (z^{-1} - 1) \cdot (z - 1)}{(z^{-1} - 1)^2 \cdot (z - 1)^2} \Rightarrow z^4 - 14 \cdot z^3 + 36 \cdot z^2 - 14 \cdot z + 1 = 0$$

y sus raíces

$$z_1 = 0.093 \quad z_2 = 0.362 \quad z_3 = 2.765 \quad z_4 = 10.78$$

Obsérvese que

$$z_1 \cdot z_4 = 1 \quad z_2 \cdot z_3 = 1$$

Los ceros estables ($|z_i|<1$) son: $z_1 = 0.093$ $z_2 = 0.362$, por lo que la ecuación característica en lazo cerrada deseada es:

$$\Delta^c(z) = (z - 0.093) \cdot (z - 0.362) = z^2 - 0.455 \cdot z + 0.034 = 0 \tag{10}$$

La ganancia constante que sitúa los polos del sistema en lazo cerrado en las raíces de $\Delta^c(z)$ se obtiene de la *fórmula de Ackerman*.

$$\overline{K} = [0 \quad 1] \cdot M_{cd}^{-1} \cdot \Delta^c(F) \qquad (11)$$

Donde M_{cd} es la matriz de controlabilidad y $\Delta^c(F)$ representa el polinomio matricial obtenido al sustituir la matriz *F* por la variable *z* en la ecuación característica

$$\Delta^c(F) = F^2 - 0.455 \cdot F + 0.034 \cdot I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 - 0.455 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0.034 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0.579 & 1.545 \\ 0 & 0.579 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

$\Delta^c(F)$ que es una matriz real de dimensión 2 x 2. Por otra parte la matriz de controlabilidad es

$$M_{cd} = \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

y su inversa

$$M_{cd}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Finalmente, sustituyendo (14) y (12) en (11) y operando se obtiene la ganancia en el estado estacionario

$$\overline{K} = [0.579 \quad 1.545] \qquad (12)$$

b) Desarrollando (9) se obtiene:

$$1 + \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{-z^3 + 3 \cdot z^2 - z}{z^4 - 4 \cdot z^3 + 6 \cdot z^2 - 4 \cdot z + 1} \right] \qquad (13)$$

Analizando esta expresión se observa lo siguiente:

- Para *r*=0, se obtiene los ceros $z_1 = 0$ $z_2 = 0.382$ $z_3 = 2.618$
- Para 0<*r*<0.25, los ceros se encuentran sobre el eje real, y están situados en los siguientes intervalos (0, 2.68), (0.268, 0.382), (2.618, 3.732) y (3.732, ∞). Además tienden hacía 0.268 o 3.732 a medida que *r* aumenta.
- Para *r*=0.25, tenemos dos ceros dobles, uno situado en 0.268, y el otro en 3.732
- Para r>0.25, los ceros son complejos conjugados. Cuando r→∞, estos ceros tienden hacia

el eje real, que tiene un punto cuádruple en z=1.

Teniendo en cuenta esta información en la Figura 3 se representa el lugar de las raíces de (13) cuando r varía de 0 a ∞.

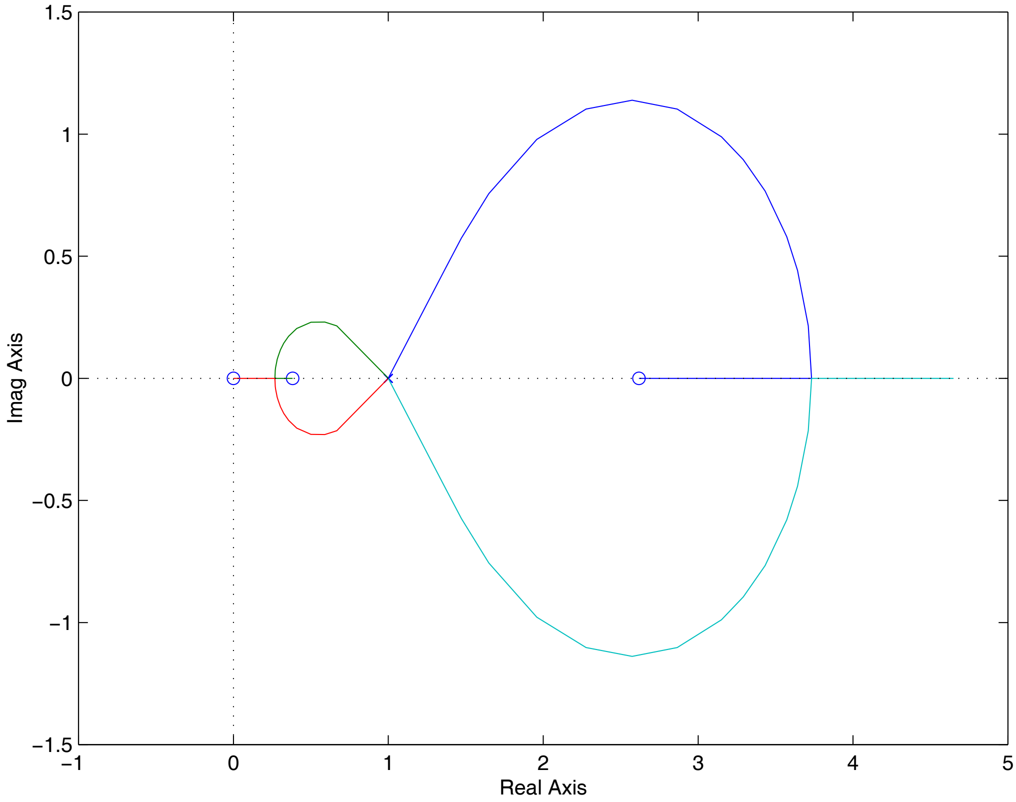


Figura 3: Lugar de las raíces de la ecuación (13) cuando r varía de 0 a ∞

♦

♦ Solución problema 7.8

Las raíces de

$$z^2 + 2\cdot\alpha\cdot z + \omega^2 = 0$$

son

$$z_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$
$$z_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

Mientras que las raíces de

$$\omega^2 z^2 + 2\cdot\alpha\cdot z + 1 = 0$$

son

$$z_3 = \frac{1}{\omega^2}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\right)$$
$$z_4 = \frac{1}{\omega^2}\left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\right)$$

Se dice que z_j es la raíz reflejada de z_i si $z_i \cdot z_j = 1$. En este caso

$$z_1 \cdot z_4 = \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\right)\frac{1}{\omega^2}\left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\right) = \frac{1}{\omega^2}\cdot\left(\alpha^2 - (\alpha^2 - \omega^2)\right) = 1$$

De forma análoga se puede comprobar que

$$z_2 \cdot z_3 = 1$$

Luego z_4 es la raíz reflejada de z_1 y z_3 es la raíz reflejada de z_2.

♦

SOLUCIONES PROBLEMAS
TEMA 8: Control óptimo de sistemas continuos

♦ Solución problema 8.1

Para este sistema se va definir la entrada como

$$\dot{x} = u \tag{1}$$

Comparando con la ecuación general

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t)$$

se obtiene

$$f(x,u,t) = u$$

De acuerdo con el enunciado del problema la función de coste es:

$$J = \int_0^{\pi} \dot{x}^2 dt = \int_0^{\pi} u^2 dt \tag{2}$$

Comparando con la ecuación general de la función de coste

$$J(t_0) = \phi(x(T),T)\cdot dT + \int_{t_0}^{T} L(x(t),u(t),t)\cdot dt$$

se obtienen

$$\phi(x(T),T) = 0$$

$$L(x(t),u(t),t) = u^2$$

Además t_0=0 y T=π.

La ligadura en el estado final es:

$$\Psi(x(T),T) = 0$$

El Hamiltoniano es:

$$H(x,u,t) = L(x,u,t) + \lambda^T \cdot f(x,u,t) = u^2 + \lambda\cdot u$$

La ecuación de estado es:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u$$

La ecuación del co-estado es:

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

Luego si la derivada de λ es 0 entonces λ debe ser constante.

La condición de estacionaridad es

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = 2 \cdot u + \lambda$$

Despejando *u* de esta ecuación se obtiene

$$u = -\frac{\lambda}{2} \tag{3}$$

Puesto que λ es constante *u* también es constante.

La condición frontera es:

$$(\phi_x + \Psi_x^T \nu - \lambda^T)\Big|_T dx(T) + (\phi_t + \Psi_t^T \nu + H)\Big|_T dt = 0$$

Como el tiempo final es fijo (T=π) entonces $dt\big|_T = 0$, por lo que la condición frontera queda

$$(\phi_x + \Psi_x^T \nu - \lambda^T)\Big|_T dx(T) = 0$$

Como ϕ=0, Ψ=0 entonces

$$\lambda(T) \cdot dx(T) = 0$$

En general *dx*(*T*) es distinto de 0 ya que no se ha puesto ninguna restricción al estado final luego se debe cumplir que

$$\lambda(T) = \lambda(\pi) = 0$$

De acuerdo con la ecuación (3) entonces *u*=0. Asimismo, de acuerdo con (1)

$$\dot{x} = 0$$

Por lo tanto que el estado es constante y será igual al estado inicial

$$x(t) = x(0)$$

Asimismo de acuerdo con (2), puesto que *u*=0 entonces

$$J^* = 0$$

♦

♦ Solución problema 8.2

El modelo del sistema es

$$\dot{x} = -x^3 + u \qquad (1)$$

comparando con la ecuación general

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t)$$

se obtiene

$$f(x,u,t) = -x^3 + u$$

La función de coste es:

$$J = \frac{1}{2} \cdot x^2(2) + \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 (x^2 + u^2) dt$$

comparando con la ecuación general de la función de coste

$$J(t_0) = \phi(x(T),T) \cdot dT + \int_{t_0}^{T} L(x(t),u(t),t) \cdot dt$$

se obtienen

$$\phi(x(T),T) = \frac{1}{2} \cdot x^2(2)$$

$$L(x(t),u(t),t) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + u^2)$$

Además t_0=0 y T=2.

La ligadura en el estado final es:

$$\Psi\,(x(T),T)=0$$

El Hamiltoniano es:

$$H(x,u,t)=L(x,u,t)+\cdot\lambda^{T}\cdot f(x,u,t)=\frac{1}{2}\cdot(x^{2}+u^{2})+\lambda\cdot(-x^{3}+u)$$

La ecuación de estado es:

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=-x^{3}+u$$

La ecuación del co-estado es:

$$-\dot{\lambda}=\frac{\partial H}{\partial x}=x-3\cdot\lambda\cdot x^{2}$$

La condición de estacionaridad es:

$$0=\frac{\partial H}{\partial u}=u+\lambda\Rightarrow \mathrm{u}=\text{-}\lambda$$

La condición frontera en t=0 es

$$x(0)=\frac{1}{2}$$

La condición frontera en t=T=2 es

$$(\phi_{x}+\Psi_{x}^{T}\nu-\lambda^{\mathrm{T}})\Big|_{T}dx(T)+(\phi_{t}+\Psi_{t}^{T}\nu+\mathrm{H})\Big|_{T}dt=0$$

Como el tiempo final es fijo entonces $dt\big|_{T}=0$, por lo que la condición frontera queda

$$(\phi_{x}+\Psi_{x}^{T}\nu-\lambda^{\mathrm{T}})\Big|_{T}dx(T)=0$$

Como Ψ=0 y $dx(T)$ es distinto de 0 entonces

$$(\phi_{x}-\lambda)\Big|_{T}=0\Rightarrow x(2)=\lambda(2)$$

Para eliminar $u(t)$ de las ecuaciones de estado y del co-estado habría que sustituir la ecuación de estacionaridad en ellas. Se obtiene

$$\dot{x} = -x^3 + \lambda$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = x - 3 \cdot \lambda \cdot x^2$$

♦

♦ Solución problema 8.3

a) La diferencia de potencial que genera la fuente será igual a la suma de las diferencias de tensión en la resistencia *R* y en la inductancia *L*

$$u(t) = R \cdot x(t) + L \cdot \frac{dx}{dt}$$

Como *R*=1 y *L*=1, entonces la ecuación de estado es:

$$\dot{x} = -x + \cdot u$$

b) Si se compara la ecuación del modelo del sistema estado obtenida con la ecuación general

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t)$$

se obtiene

$$f(x,u,t) = -x + u$$

La función de coste es:

$$J = \int_0^1 u^2 dt$$

Comparando con la ecuación general de la función de coste

$$J(t_0) = \phi(x(T),T) \cdot dT + \int_{t_0}^{T} L(x(t),u(t),t) \cdot dt$$

se obtienen

$$\phi(x(T),T) = 0$$

$$L(x(t),u(t),t) = u^2$$

Además t_0=0 y T=1.

De acuerdo con el enunciado $x(T)= x(1)=2$, luego la ecuación de ligadura en el estado final es:

$$\Psi(x(T),T) = x(1) - 2 = 0$$

El Hamiltoniano es:

$$H(x,u,t) = L(x,u,t) + \lambda^T \cdot f(x,u,t) = u^2 + \lambda \cdot (-x+u)$$

La ecuación de estado es:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -x + u$$

La ecuación del co-estado es:

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda \Rightarrow \dot{\lambda} = \lambda \quad (1)$$

La condición de estacionaridad es:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = 2 \cdot u + \lambda \Rightarrow \mathrm{u} = -\frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

La condición frontera en t=0 es:

$$x(0) = 0$$

La condición frontera en t=T=1 es:

$$x(1) = 2$$

Una solución genérica para la ecuación diferencial (1) es:

$$\lambda = A \cdot e^t \quad (3)$$

Sustituyendo este valor en (2) se obtiene

$$u = -\frac{A}{2} \cdot e^t \quad (4)$$

Hay que calcular el valor de la constante A. Para ello sustituyendo (4) en la ecuación de estado se obtiene:

$$\dot{x} = -x - \frac{A}{2}\cdot e^{t} \qquad (5)$$

La solución general de esta ecuación diferencial es

$$x = B\cdot e^{-t} + C\cdot e^{t}$$

Sustituyendo esta solución en (5) y operando se obtiene el valor de la constante *C*:

$$C = -\frac{A}{4}$$

Luego

$$x = B\cdot e^{-t} - \frac{A}{4}\cdot e^{t} \qquad (6)$$

Si se evalúa (6) en t=0, como $x(0)$=0, se obtiene

$$x(0) = B\cdot - \frac{A}{4}\cdot = 0 \Rightarrow B = \frac{A}{4}$$

Luego

$$x = \frac{A}{4}\cdot(e^{-t} -\cdot e^{t}) \qquad (7)$$

Asimismo si se evalúa (7) en t=T=1, como $x(1)$=2, se obtiene:

$$2 = \frac{A}{4}\cdot(e^{-1} -\cdot e) \Rightarrow A = \frac{8\cdot e}{1-e^{2}} = -3.4037$$

Finalmente sustituyendo *A* en (4) se obtiene el control óptimo

$$u = -1.7018\cdot e^{t}$$

c) La trayectoria óptima del estado se obtendría sustituyendo el valor calculado para *A* en (7):

$$x = 0.8509\cdot(e^{t} - e^{-t})$$

♦

♦ Solución problema 8.4

La ecuación de estado es:

$$\dot{x} = f(x,u,t) = A \cdot x + B \cdot u \tag{1}$$

La función de coste es:

$$J(t_0) = \frac{1}{2} x^T(T) \cdot S(T) \cdot x(T) + \frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^{T} \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q & V \\ V^T & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt \tag{2}$$

Comparando con la ecuación general de la función de coste

$$J(t_0) = \phi(x(T),T) \cdot dT + \int_{t_0}^{T} L(x(t),u(t),t) \cdot dt$$

se obtienen

$$\phi(x(T),T) = \frac{1}{2} x^T(T) \cdot S(T) \cdot x(T)$$

$$L(x(t),u(t),t) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q & V \\ V^T & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left[x^T \cdot Q \cdot x + x^T \cdot V \cdot u + u^T \cdot V^T \cdot x + x^T \cdot R \cdot u \right]$$

El Hamiltoniano es:

$$H(x,u,t) = L(x,u,t) + \lambda^T \cdot f(x,u,t) = \frac{1}{2} \cdot \left[x^T \cdot Q \cdot x + x^T \cdot V \cdot u + u^T \cdot V^T \cdot x + x^T \cdot R \cdot u \right] + \lambda \cdot (A \cdot x + B \cdot u)$$

La ecuación del co-estado es:

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = Q \cdot x + V \cdot u + A^T \cdot \lambda \tag{3}$$

La condición de estacionaridad es:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = V^T \cdot x + R \cdot u + B^T \cdot \lambda \tag{4}$$

La condición frontera es:

- Tiempo inicial $x(t_0)$ conocido.

- Tiempo final, el estado libre y *T* fijo:

$$\lambda(T) = S(T)\cdot x(T) \tag{5}$$

a) Para resolver el problema de optimización se va a suponer que x(t) y λ(t) satisfacen una ecuación como (5) para todo $t \in [t_0, T]$:

$$\lambda(t) = S(t)\cdot x(t) \tag{6}$$

con una matriz *S*(*t*) todavía desconocida que debe cumplir una serie de condiciones a determinar.

Sustituyendo (6) en (4) y despejando *u* se obtiene

$$R\cdot u = -V^T\cdot x - B^T\cdot S\cdot x \Rightarrow u = -R^{-1}\left(V^T + B^T\cdot S\right)x$$

De acuerdo con el enunciado se define la *ganancia de Kalman modificada* como:

$$K = R^{-1}\left(V^T + B^T\cdot S\right)$$

Luego el control óptimo es:

$$u = -K\cdot x \tag{7}$$

y la ecuación de estado

$$\dot{x} = (A - B\cdot K)\cdot x \tag{8}$$

Se van a obtener a continuación las condiciones que debe satisfacer S(t). Para ello se debe en primer lugar derivar (6)

$$\dot{\lambda} = \dot{S}\cdot x + S\cdot\dot{x}$$

En segundo lugar se sustituye (8) en la expresión anterior:

$$\dot{\lambda} = \dot{S}\cdot x + S\cdot(A - B\cdot K)\cdot x$$

Igualando la expresión anterior con (3)

$$-(Q\cdot x + V\cdot u + A^T\cdot\lambda) = \dot{S}\cdot x + S\cdot(A - B\cdot K)\cdot x$$

Despejando $-\dot{S}\cdot x$ se obtiene

$$-\dot{S}\cdot x = (Q\cdot x + V\cdot u + A^T\cdot\lambda) + S\cdot(A - B\cdot K)\cdot x$$

Sustituyendo (6) y (7) en la expresión anterior y reordenando términos se obtiene la siguiente expresión:

$$-\dot{S}\cdot x = (Q\cdot x - V\cdot K\cdot x + A^T\cdot S\cdot x) + S\cdot(A - B\cdot K)\cdot x = \left(S\cdot A + A^T\cdot S - S\cdot B\cdot K - V\cdot K + Q\right)x$$

Luego

$$-\dot{S}\cdot = S\cdot A + A^T\cdot S - (S\cdot B + V)\cdot K + Q \qquad (9)$$

Por otra parte, de la definición de ganancia de Kalman modificada se obtiene que

$$R\cdot K = V^T + B^T\cdot S \Rightarrow (R\cdot K)^T = \left(V^T + B^T\cdot S\right)^T \Rightarrow K^T\cdot R^T = V + S^T\cdot B$$

Puesto que S y R son simétricas, entonces S^T=S y R^T=R, luego

$$K^T\cdot R = V + S\cdot B$$

Sustituyendo esta expresión en (9) se obtiene la ecuación de Ricatti:

$$-\dot{S}\cdot = S\cdot A + A^T\cdot S - K^T\cdot R\cdot K + Q \qquad (9)$$

b) En la demostración se van a comparar la expresión:

$$\frac{d}{dt}\left(x^T\cdot S\cdot x\right) \qquad (10)$$

con

$$x^T\cdot Q\cdot x + x^T\cdot V\cdot u + u^T\cdot V^T\cdot x + u^T\cdot R\cdot u \qquad (11)$$

Asimismo se hará uso entre otras de la siguiente igualdad:

$$K^T\cdot R\cdot K = K^T\cdot(V^T + B^T\cdot S) = K^T\cdot V^T + K^T\cdot B^T\cdot S \qquad (12)$$

En primer lugar se va desarrollar la expresión (10). De (6) se sabe que S·x=λ, luego

$$\frac{d}{dt}\left(x^T\cdot S\cdot x\right) = \frac{d}{dt}\left(x^T\cdot\lambda\right)$$

Derivando se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left(x^T\cdot\lambda\right) = \frac{dx^T}{dt}\cdot\lambda + x^T\cdot\frac{d\lambda}{dt}$$

Sustituyendo en el miembro de la derecha la ecuación de estado y la ecuación del co-estado:

$$\frac{d}{dt}\left(x^T \cdot \lambda\right) = \left[(A - B \cdot K) \cdot x\right]^T \cdot \lambda - x^T \cdot (Q \cdot x + V \cdot u + A^T \cdot \lambda)$$

Sustituyendo (6) y (7) en la ecuación anterior

$$\frac{d}{dt}\left(x^T \cdot \lambda\right) = \left[(A - B \cdot K) \cdot x\right]^T \cdot S \cdot x - x^T \cdot (Q \cdot x - V \cdot K \cdot x + A^T \cdot S \cdot x)$$

Operando y reordenando términos finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(x^T \cdot \lambda\right) &= x^T \cdot (A^T - K^T \cdot B^T) \cdot S \cdot x - x^T \cdot (Q - V \cdot K + A^T \cdot S) \cdot x = \\ &= x^T \cdot A^T \cdot S \cdot x - x^T \cdot K^T \cdot B^T \cdot S \cdot x - x^T \cdot Q \cdot x + x^T \cdot V \cdot K \cdot x - x^T \cdot A^T \cdot S \cdot x = \\ &= x^T \cdot (A^T \cdot S - K^T \cdot B^T \cdot S - Q + V \cdot K - A^T \cdot S) \cdot x = \\ &= x^T \cdot (-K^T \cdot B^T \cdot S - Q + V \cdot K) \cdot x\end{aligned}$$

En segundo lugar se va desarrollar la expresión (11). Sustituyendo en ella la expresión (7) se obtiene:

$$\begin{aligned}x^T \cdot Q \cdot x + x^T \cdot V \cdot u + u^T \cdot V^T \cdot x + u^T \cdot R \cdot u &= x^T \cdot Q \cdot x - x^T \cdot V \cdot K \cdot x - x^T \cdot K^T V^T \cdot x + x^T \cdot K^{T \cdot} \cdot R \cdot K \cdot x = \\ &= x^T \cdot (Q \cdot - V \cdot K - K^T V^T + K^{T \cdot} \cdot R \cdot K) \cdot x\end{aligned}$$

Sustituyendo (12) en la expresión anterior y reordenando términos se obtiene:

$$\begin{aligned}x^T \cdot Q \cdot x + x^T \cdot V \cdot u + u^T \cdot V^T \cdot x + u^T \cdot R \cdot u &= x^T \cdot (Q \cdot - V \cdot K - K^{T \cdot} V^T + K^T \cdot V^T + K^T \cdot B^T \cdot S) \cdot x = \\ &= x^T \cdot (Q \cdot - V \cdot K + K^T \cdot B^T \cdot S) \cdot x\end{aligned}$$

Luego se ha demostrado que

$$\frac{d}{dt}\left(x^T \cdot S \cdot x\right) = -(x^T \cdot Q \cdot x + x^T \cdot V \cdot u + u^T \cdot V^T \cdot x + u^T \cdot R \cdot u)$$

La expresión general de la función de coste en cualquier subintervalo [t,T] es:

$$J(t) = \phi(x(T), T) \cdot dT + \int_t^T L(x(t), u(t), t) \cdot dt$$

con

$$\phi(x(T), T) = \frac{1}{2} x^T(T) \cdot S(T) \cdot x(T)$$

$$L(x(t),u(t),t)=\frac{1}{2}\cdot\left[x^T\cdot Q\cdot x+x^T\cdot V\cdot u+u^T\cdot V^T\cdot x+x^T\cdot R\cdot u\right]=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(x^T\cdot S\cdot x\right)$$

Luego

$$\int_t^T L(x(t),u(t),t)\cdot dt=-\frac{1}{2}\int_t^T\frac{d}{dt}\left(x^T\cdot S\cdot x\right)dt=\frac{1}{2}\cdot\left[x^T(t)\cdot S(t)\cdot x(t)-x^T(T)\cdot S(T)\cdot x(T)\right]$$

Con lo que la función de coste queda de la siguiente forma:

$$J(t)=\frac{1}{2}x^T(T)\cdot S(T)\cdot x(T)+\frac{1}{2}x^T(t)\cdot S(t)\cdot x(t)-\frac{1}{2}x^T(T)\cdot S(T)\cdot x(T)=\frac{1}{2}x^T(t)\cdot S(t)\cdot x(t)$$

Tal y como se quería demostrar.

En resumen en cualquier instante *t*, el coste restante de aplicar la ley de control óptima es función únicamente del estado actual *x*(*t*) y de *S*(*t*).

♦

♦ Solución problema 8.5

a) La expresión general de la ecuación de Ricatti es:

$$-\dot{S}=A^T\cdot S+S\cdot A-S\cdot B\cdot R^{-1}\cdot B^T\cdot S+Q$$

Del enunciado se obtiene la siguiente información: *A*=0, *B*=1, *S*(*T*)=*s*, *Q*=0 y *R*=*r*. Luego la ecuación de Ricatti toma la siguiente forma:

$$\dot{S}=\frac{S^2}{r}\Rightarrow\frac{dS}{dt}=\frac{S^2}{r}$$

La solución de esta ecuación diferencial se obtiene usando el método de separación de variables:

$$\int_{S(t)}^{S(T)}\frac{1}{S^2}\cdot dS=\frac{1}{r}\cdot\int_t^T dt$$

Nótese que los límites de integración corresponden a los tiempos *t* y *T*, ya que el dato conocido es *S*(*T*), y la función *S*(*t*) se evalúa hacia atrás en el tiempo.

El resultado de estas integrales es:

$$\frac{1}{S(t)}-\frac{1}{S(T)}=\frac{1}{r}\cdot(t-T)$$

Despejando $S(t)$ se obtiene la siguiente solución para la ecuación diferencial

$$S(t)=\frac{r\cdot S(T)}{r+S(T)\cdot(T-t)}$$

b) El control óptimo es:

$$u(t)=-K(t)\cdot x(t)$$

con

$$K(t)=R^{-1}\cdot B^{T}\cdot S(t)=\frac{1}{r}\cdot S(t)=\frac{r\cdot S(T)}{r+S(T)\cdot(T-t)}=\frac{S(T)}{r+S(T)\cdot(T-t)}$$

Luego:

$$u(t)=-\frac{S(T)}{r+S(T)\cdot(T-t)}\cdot x(t)$$

La forma de x(t) se obtiene a partir de la ecuación de estado

$$\frac{dx}{dt}=u=-\frac{1}{r}\cdot S(t)\cdot x(t)$$

La solución de esta ecuación diferencial se obtiene usando separación de variables:

$$\frac{dx}{x}=-\frac{1}{r}\cdot S(t)\cdot dt\Rightarrow\int_{x(t_0)}^{x(t)}\frac{dx}{x}=-\frac{1}{r}\cdot\int_{t_0}^{t}S(t)\cdot dt=-\frac{1}{r}\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{r\cdot S(T)}{r+S(T)\cdot(T-t)}\cdot dt$$

Nótese que a diferencia del cálculo de S(t), en este caso los límites de integración corresponden a los tiempos t_0 y t. Ya que $x(t)$ se evalúa “hacia delante”, y el dato conocido es $x(t_0)$.

El resultado de estas integrales es:

$$\ln\left(\frac{x(t)}{x(t_0)}\right)=\ln\left(\frac{r+S(T)\cdot(T-t)}{r+S(T)\cdot(T-t_0)}\right)\Rightarrow x(t)=x(t_0)\cdot\frac{r+S(T)\cdot(T-t)}{r+S(T)\cdot(T-t_0)}$$

Finalmente, sustituyendo la expresión obtenida para x(t) en la expresión del control óptimo se obtiene

$$u(t) = -\frac{r \cdot S(T)}{r + S(T)\cdot(T-t)} \cdot x(t_0) \cdot \frac{r + S(T)\cdot(T-t)}{r + S(T)\cdot(T-t_0)} = -\frac{r \cdot x(t_0) \cdot S(T)}{r + S(T)\cdot(T-t_0)}$$

Analizando esta expresión se observa que para este problema el control óptimo es un valor constante durante todo el intervalo de tiempo [t_0, T].

A modo de resumen se muestran las expresiones de S(t), x(t) y u(t) en el instante inicial t_0, en el instante *t* y en el instante final *T*:

	t_0	t	T
S(t)	$\frac{r \cdot S(T)}{r + S(T)\cdot(T-t_0)}$	$\frac{r \cdot S(T)}{r + S(T)\cdot(T-t)}$	$S(T)$
x(t)	$x(t_0)$	$x(t_0)\cdot\frac{r + S(T)\cdot(T-t)}{r + S(T)\cdot(T-t_0)}$	$x(t_0)\cdot\frac{r}{r + S(T)\cdot(T-t_0)}$
u(t)	$-\frac{r \cdot x(t_0) \cdot S(T)}{r + S(T)\cdot(T-t_0)}$	$-\frac{r \cdot x(t_0) \cdot S(T)}{r + S(T)\cdot(T-t_0)}$	$-\frac{r \cdot x(t_0) \cdot S(T)}{r + S(T)\cdot(T-t_0)}$

Recuérdese que *S*(*t*) se evalúa hacia atrás desde *t*=*T*, (con *S*(*T*) conocido) hasta $t=t_0$. Mientras que *x*(*t*) se evalúa hacia adelante desde $t=t_0$ hasta *t*=*T*.

♦

♦ Solución problema 8.6

a) La expresión general de la ecuación de Ricatti es:

$$-\dot{S} = A^T \cdot S + S \cdot A - S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S + Q$$

La ecuación de estado para el sistema del Problema 8.3 es:

$$\dot{x} = -x + u$$

Luego A=-1 y B=1. Asimismo de la función de coste se obtiene que S(T)=10, Q=1, R=1 y t_0=0. Sustituyendo estos valores en la ecuación de Ricatti se obtiene:

$$\dot{S} = S^2 + 2 \cdot S - 1$$

La solución de esta ecuación diferencial se obtiene usando el método de separación de variables:

$$\frac{\mathrm{dS}}{S^2+2\cdot S-1}=dt \Rightarrow \int_{S(t)}^{S(T)} \frac{1}{S^2+2\cdot S-1}\cdot dS=\int_t^T dt \qquad (1)$$

Para resolver la integral de la izquierda conviene tener en cuenta que:

$$S^2+2\cdot S-1=(S-S_1)\cdot(S-S_2)$$

donde

$$S_1 = -1+\sqrt{2} = 0.4142 \qquad S_2 = -1-\sqrt{2} = -2.4142$$

Descomponiendo en fracciones simples se obtiene:

$$\frac{1}{(S-S_1)\cdot(S-S_2)}=\frac{1}{(S_1-S_2)}\left[\frac{1}{(S-S_1)}-\frac{1}{(S-S_2)}\right]$$

Con lo que el resultado de dicha integral es

$$\int_{S(t)}^{S(T)} \frac{1}{S^2+2\cdot S-1}\cdot dS=\frac{1}{(S_1-S_2)}\cdot\int_{S(t)}^{S(T)}\left[\frac{1}{(S-S_1)}-\frac{1}{(S-S_2)}\right]\cdot dS=\frac{1}{(S_1-S_2)}\cdot\ln\left[\frac{(S(T)-S_1)\cdot(S(t)-S_2)}{(S(T)-S_2)\cdot(S(t)-S_1)}\right]$$

Igualando el resultado de las dos integrales de la expresión (1) se obtiene:

$$\frac{1}{(S_1-S_2)}\cdot\ln\left[\frac{(S(T)-S_1)\cdot(S(t)-S_2)}{(S(T)-S_2)\cdot(S(t)-S_1)}\right]=(T-t)$$

Hay que despejar S(t) de esta expresión. Para ello en primer lugar hay que reordenar términos y tomar la exponencial:

$$\ln\left[\frac{(S(T)-S_1)\cdot(S(t)-S_2)}{(S(T)-S_2)\cdot(S(t)-S_1)}\right]=(S_1-S_2)(T-t)\Rightarrow \frac{S(t)-S_2}{S(t)-S_1}=\frac{S(T)-S_2}{S(T)-S_1}e^{(S_1-S_2)(T-t)}$$

Si se define

$$D(t)=\frac{S(T)-S_2}{S(T)-S_1}e^{(S_1-S_2)(T-t)}$$

Entonces

$$\frac{S(t)-S_2}{S(t)-S_1}=D(t)$$

Luego

$$S(t)=\frac{S_2-D(t)\cdot S_1}{1-D(t)}$$

En la expresión anterior el elemento que introduce la dependencia del tiempo en $S(t)$ es $D(t)$. Para facilitar la evaluación de $S(t)$ convendría, si es posible, que $D(t)$ apareciese o bien en el numerador o bien en el denominador. Sumando y restando el término $D(t)\cdot S_2$ al numerador de la expresión anterior y reordenando términos es posible obtener:

$$S(t)=\frac{S_2-D(t)\cdot S_1+D(t)\cdot S_2-D(t)\cdot S_2}{1-D(t)}=S_2-\frac{D(t)\cdot[S_1-S_2]}{1-D(t)}=S_2-\frac{S_1-S_2}{\dfrac{1}{D(t)}-1}$$

Sustituyendo D(t) en la expresión anterior se obtiene:

$$S(t)=S_2-\frac{S_1-S_2}{\dfrac{S(T)-S_1}{S(T)-S_2}\cdot e^{-(S_1-S_2)(T-t)}-1}$$

Sustituyendo los valores de S_1, S_2 y $S(T)$ se obtiene finalmente:

$$S(t)=-2.4142-\frac{2.8284}{0.7722\cdot e^{-2.8284(T-t)}-1}$$

Obsérvese que si t=T entonces

$$S(T)=-2.4142-\frac{2.8284}{0.7722-1}=10$$

Tal y como se indicaba en el enunciado.

b) El control óptimo es:

$$u(t)=-K(t)\cdot x(t)$$

con

$$K(t)=R^{-1}\cdot B^T\cdot S(t)=S(t)$$

Luego:

$$u(t) = -S(t) \cdot x(t)$$

La forma de x(t) se obtiene a partir de la ecuación de estado

$$\dot{x} = -x + \cdot u$$

$$\frac{dx}{dt} = -x + u = -x - \cdot S \cdot x = -(1+S) \cdot x$$

La solución de esta ecuación diferencial se obtiene usando separación de variables:

$$\frac{dx}{x} = -(1+S) \cdot dt \Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = -\int_0^t (1+S) \cdot dt \tag{2}$$

En primer lugar se va a resolver la integral del miembro de la derecha, prescindiendo por simplificar de los límites de integración:

$$\int (1+S) \cdot dt = \int (1 - 2.4142 - \frac{2.8284}{0.7722 \cdot e^{-2.8284 \cdot (T-t)} - 1}) \cdot dt =$$
$$= (1 - 2.4142) \cdot t - \int \frac{2.8284}{0.7722 \cdot e^{-2.8284 \cdot (T-t)} - 1} dt = (1 - 2.4142) \cdot t + I$$

donde

$$I = \int \frac{2.8284}{0.7722 \cdot e^{-2.8284 \cdot (T-t)} - 1} dt$$

También por simplificar se va a considerar la siguiente notación: *a*=2.8284 y *b*=0.7722. Luego:

$$I = \int \frac{a}{b \cdot e^{-a \cdot (T-t)} - 1} dt$$

Haciendo el cambio de variable $z = e^{-a \cdot (T-t)}$ se obtiene

$$I = \int \frac{1}{(b \cdot z - 1) \cdot z} dz = \int \frac{1/b}{(z - 1/b) \cdot z} dz$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$I = \int \frac{1}{(z - 1/b)} dz + \int \frac{1}{z} dz = \int \frac{b}{(bz - 1)} dz + \int \frac{1}{z} dz = \ln(b \cdot z - 1) + \ln(z) = \ln\left(\frac{b \cdot z - 1}{z}\right) = \ln\left(b - z^{-1}\right)$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$I = \ln\left(b - e^{a\cdot(T-t)}\right) = \ln\left(0.7722 - e^{2.8284\cdot(T-t)}\right)$$

Con lo que finalmente:

$$\int (1+S)\cdot dt = (1-2.4142)\cdot t - \ln[0.7722 - e^{2.8284\cdot(T-t)}]$$

Por lo tanto resultado de las integrales que aparecen en (2) es:

$$\ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right) = -1.4142\cdot t + \ln\left[\frac{0.7722 - e^{2.8284\cdot(T-t)}}{0.7722 - e^{2.8284\cdot T}}\right]$$

Despejando x(t) se obtiene:

$$x(t) = x(0)\cdot e^{-1.4142\cdot t}\,\frac{0.7722 - e^{2.8284\cdot(T-t)}}{0.7722 - e^{2.8284\cdot T}}$$

Obsérvese que si t=0, entonces la expresión anterior es igual a $x(0)$, tal y como debía ocurrir. Por otra parte, si $t=T$ se obtiene:

$$x(T) = \frac{-0.2278\cdot x(0)\cdot e^{-1.4142\cdot T}}{0.7722 - e^{2.8284\cdot T}}$$

Si T→∞ entonces x(T)→0.

Finalmente, sustituyendo las expresiones obtenidas para $S(t)$ y $x(t)$ en la expresión del control óptimo se obtiene

$$u(t) = -\left[-2.4142 - \frac{2.8284}{0.7722\cdot e^{-2.8284(T-t)} - 1}\right]\cdot\left[x(0)\cdot e^{-1.4142\cdot t}\,\frac{0.7722 - e^{2.8284\cdot(T-t)}}{0.7722 - e^{2.8284\cdot T}}\right]$$

Obsérvese que en $t=T$ $u(T)=-S(T)\cdot x(T)=-10\cdot x(T)$. Si $T\to\infty$ entonces $u(T)\to 0$. Asimismo si t=0 $u(0)=-S(0)\cdot x(0)$.

♦

♦ Solución problema 8.7

a) Del enunciado se obtiene la siguiente información:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\; B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\; S(T)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\; Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\; R=r$$

La expresión general de la ecuación de Ricatti es:

$$-\dot{S}=A^T\cdot S+S\cdot A-S\cdot B\cdot R^{-1}\cdot B^T\cdot S+Q$$

La matriz S es simétrica y definida positiva, luego su estructura es:

$$S=\begin{bmatrix}s_1 & s_2\\ s_2 & s_3\end{bmatrix}$$

Se van a realizar por separado cada uno de los productos de matrices que aparecen en la ecuación de Ricatti:

$$A^T\cdot S=\begin{bmatrix}0 & 0\\ s_1 & s_2\end{bmatrix}$$

$$S\cdot A=\begin{bmatrix}0 & s_1\\ 0 & s_2\end{bmatrix}$$

$$S\cdot B=\begin{bmatrix}s_2\\ s_3\end{bmatrix}$$

$$R^{-1}\cdot B^T\cdot S=\begin{bmatrix}s_2/r & s_3/r\end{bmatrix}$$

$$S\cdot B\cdot R^{-1}\cdot B^T\cdot S=\begin{bmatrix}s_2^2/r & s_2\cdot s_3/r\\ s_2\cdot s_3/r & s_3^2/r\end{bmatrix}$$

Sumando los términos de la derecha se obtiene

$$\begin{bmatrix}-\dot{s}_1 & -\dot{s}_2\\ -\dot{s}_2 & -\dot{s}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-s_2^2/r & s_1-s_2\cdot s_3/r\\ s_1-s_2\cdot s_3/r & 1+2\cdot s_2-s_3^2/r\end{bmatrix}$$

Equivalentemente la ecuación de Ricatti se puede expresar mediante las siguientes ecuaciones escalares:

$$\dot{s}_1 = s_2^2 / r - 1$$
$$\dot{s}_2 = s_2 \cdot s_3 / r - s_1$$
$$\dot{s}_3 = s_3^2 / r - 2 \cdot s_2 - 1$$

Por otra parte, la ganancia de realimentación es:

$$K = R^{-1} \cdot B^T \cdot S = \begin{bmatrix} s_2 / r & s_3 / r \end{bmatrix}$$

b) En el estado estacionario las derivadas de las componentes de la matriz S son cero, luego se tienen las siguientes ecuaciones:

$$s_2^2 / r - 1 = 0$$
$$s_2 \cdot s_3 / r - s_1 = 0$$
$$s_3^2 / r - 2 \cdot s_2 - 1 = 0$$

Despejando s_2 de la primera ecuación se obtiene:

$$s_2 = \pm\sqrt{r}$$

En la tercera ecuación despejando s_3 y sustituyendo el valor de s_2 se obtiene:

$$s_3 = \pm\sqrt{r \cdot (1 + 2 \cdot s_2)} = \pm\sqrt{r} \cdot \sqrt{1 \pm 2 \cdot \sqrt{r}}$$

Por último en la segunda ecuación despejando s_1 y sustituyendo los valores de s_2 y s_3 se obtiene:

$$s_1 = \frac{s_2 \cdot s_3}{r} = \pm\sqrt{1 \pm 2 \cdot \sqrt{r}}$$

De las posibles soluciones para las componentes de la matriz S se deben escoger aquellas que hagan que S sea definida positiva. La ecuación de los autovalores de S es:

$$\begin{vmatrix} s_1 - \lambda & s_2 \\ s_2 & s_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda \cdot (s_1 + s_3) + (s_1 \cdot s_3 - s_2^2) = 0$$

Cuya autovalores son:

$$\lambda = \frac{(s_1 + s_3) \pm \sqrt{(s_1 + s_3)^2 - 4 \cdot (s_1 \cdot s_3 - s_2^2)}}{2}$$

Para que una matriz sea definida positiva sus autovalores deben ser positivos. En este caso esto se cumple si dan las siguientes condiciones (las cuales se obtienen fácilmente analizando la solución con el signo de la raíz negativo):

$$(s_1 + s_3) > 0$$

$$(s_1 \cdot s_3 - s_2^2) > 0$$

En la siguiente tabla se muestran en función de los posibles valores de s_2, s_3 y s_1, el resultado de evaluar los miembros de la izquierda de estas dos desigualdades:

s_2	s_3	s_1	$s_1 + s_3$	$s_1 \cdot s_3 - s_2^2$
$\sqrt{r}$	$\sqrt{r}\cdot\sqrt{1+2\cdot\sqrt{r}}$	$\sqrt{1+2\cdot\sqrt{r}}$	$(1+\sqrt{r})\sqrt{1+2\cdot\sqrt{r}}$	$r+\sqrt{r}$
$\sqrt{r}$	$-\sqrt{r}\cdot\sqrt{1+2\cdot\sqrt{r}}$	$-\sqrt{1+2\cdot\sqrt{r}}$	$-(1+\sqrt{r})\sqrt{1+2\cdot\sqrt{r}}$	$r+\sqrt{r}$
$-\sqrt{r}$	$\sqrt{r}\cdot\sqrt{1-2\cdot\sqrt{r}}$	$-\sqrt{1-2\cdot\sqrt{r}}$	$(\sqrt{r}-1)\sqrt{1-2\cdot\sqrt{r}}$	$r-\sqrt{r}$
$-\sqrt{r}$	$-\sqrt{r}\cdot\sqrt{1-2\cdot\sqrt{r}}$	$-\sqrt{1+2\cdot\sqrt{r}}$	$(1-\sqrt{r})\sqrt{1+2\cdot\sqrt{r}}$	$r-\sqrt{r}$

A la hora de analizar las soluciones válidas se debe tener en cuenta que *r* es fijado por el diseñador y podría tomar cualquier valor mayor o igual a 0. Así las soluciones de la primera fila, independientemente del valor de *r,* cumplen las dos desigualdades simultáneamente. Las soluciones de la segunda fila no cumple la primera desigualdad al dar s_1+s_3 un valor negativo. Las soluciones de la tercera fila si r<1 cumplen la primera desigualdad pero no cumplen la segunda, por el contrario si r>1 no cumplen la primera desigualdad pero cumplen la segunda. Un análisis similar descarta también a las soluciones de la cuarta fila. En conclusión la soluciones validas para la matriz S en el estacionario son:

$$s_1 = \sqrt{1+2\cdot\sqrt{r}}\ , s_2 = \sqrt{r}\ , s_3 = \sqrt{r}\cdot\sqrt{1+2\cdot\sqrt{r}}$$

Luego, la ganancia estacionaria es:

$$K = [s_2 / r \quad s_3 / r] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{r}} & \dfrac{\sqrt{1+2\cdot\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} \end{bmatrix}$$

♦

♦ Solución problema 8.8

a) Del enunciado se obtiene la siguiente información:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\cdot\delta\cdot\omega_n \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} S(T) = \begin{bmatrix} s_1(T) & 0 \\ 0 & s_2(T) \end{bmatrix} Q = \cdot\begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} R = r$$

La expresión general de la ecuación de Ricatti en el estacionario (EAR) es:

$$0 = A^T \cdot S + S \cdot A - S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S + Q$$

La matriz S es simétrica y definida positiva, luego su estructura es:

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix}$$

Se van a realizar por separado cada uno de los productos de matrices que aparecen en la ecuación de Ricatti:

$$A^T \cdot S = \begin{bmatrix} -\omega_n^2 \cdot s_2 & -\omega_n^2 \cdot s_3 \\ s_1 - 2\cdot\delta\cdot\omega_n \cdot s_2 & s_2 - 2\cdot\delta\cdot\omega_n \cdot s_3 \end{bmatrix}$$

$$S \cdot A = \begin{bmatrix} -\omega_n^2 \cdot s_2 & s_1 - 2\cdot\delta\cdot\omega_n \cdot s_2 \\ -\omega_n^2 \cdot s_3 & s_2 - 2\cdot\delta\cdot\omega_n \cdot s_3 \end{bmatrix}$$

$$S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S = \frac{b^2}{r} \begin{bmatrix} s_2^2 & s_2 \cdot s_3 \\ s_2 \cdot s_3 & s_3^2 \end{bmatrix}$$

Sumando los términos de la derecha de EAR se pueden obtener las siguientes ecuaciones escalares:

$$0 = -2\cdot\omega_n^2 \cdot s_2 - \frac{b^2}{r} \cdot s_2^2 + q_1 \qquad (1)$$

$$0 = s_1 - 2\cdot\delta\cdot\omega_n \cdot s_2 - \cdot\omega_n^2 \cdot s_3 - \frac{b^2}{r} \cdot s_2 \cdot s_3 \qquad (2)$$

$$0 = 2\cdot s_2 - 4\cdot\delta\cdot\omega_n \cdot s_3 - \frac{b^2}{r} \cdot s_3^2 + q_2 \qquad (3)$$

De (1) se puede despejar s_2:

$$s_2 = -\frac{\omega_n^2 \cdot r}{b^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_n^2 \cdot r}{b^2}\right)^2 + \frac{q_1 \cdot r}{b^2}} \qquad (4)$$

De (3) se puede despejar s_3:

$$s_3 = -\frac{2\cdot\delta\cdot\omega_n\cdot r}{b^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2\cdot\delta\cdot\omega_n\cdot r}{b^2}\right)^2 + \frac{(q_2 + 2\cdot s_2)\cdot r}{b^2}} \qquad (5)$$

Y de (2) se puede despejar s_1:

$$s_1 = 2\cdot\delta\cdot\omega_n\cdot s_2 + \omega_n^2\cdot s_3 + \frac{b^2}{r}\cdot s_2\cdot s_3 \qquad (6)$$

De las posibles soluciones para las componentes de la matriz S se deben escoger aquellas que hagan que S sea definida positiva. Tal y como se demostró en el Problema 8.7 las soluciones válidas deben cumplir las siguientes condiciones

$$(s_1 + s_3) > 0 \qquad (7)$$

$$(s_1\cdot s_3 - s_2^2) > 0 \qquad (8)$$

Para facilitar el análisis de las soluciones válidas se van a considerar unas nuevas variables:

$$\begin{aligned} s_1 &= h_1\cdot a_1 \\ s_2 &= h_2\cdot a_2 \\ s_3 &= h_3\cdot a_3 \end{aligned}$$

Es decir, la variable s_i que se desea cambiar es igual a la nueva variable a_i multiplicada por una cierta constante h_i. Con este nuevas variables se pretende conseguir que en las ecuaciones (4) y (5), el primer termino fuera y dentro de la raíz sea un 1 para posteriormente facilitar el análisis del signo de las raíces. Por lo tanto la asignación de las constantes h_i se hace de la siguiente forma: h_2 es el primer término de la ecuación (4) (no se considera el signo menos), es decir,

$$h_2 = \frac{\omega_n^2\cdot r}{b^2}$$

h_3 es el primer término de la ecuación (5) (no se considera el signo menos), es decir,

$$h_3 = \frac{2\cdot\delta\cdot\omega_n\cdot r}{b^2}$$

Finalmente, la constante h_1 se puede obtener sustituyendo en la ecuación (6) los valores ya asignados para s_2 y s_3:

$$h_1 = \frac{2\cdot\delta\cdot\omega_n^3\cdot r}{b^2}$$

Con las nuevas variables las ecuaciones (1), (2) y (3) toman la siguiente forma:

$$a_2^2 + 2 \cdot a_2 - \frac{q_1 \cdot b^2}{\omega_n^4 \cdot r} = 0 \tag{9}$$

$$a_1 = a_2 + a_3 + a_2 \cdot a_3 \tag{10}$$

$$a_3^2 + 2 \cdot a_3 - \frac{1}{2 \cdot \delta^2} \cdot a_2 - \frac{q_2 \cdot b^2}{4 \cdot \delta^2 \cdot \omega_n^4 \cdot r} = 0 \tag{11}$$

y las ecuaciones (4) y (5),

$$a_2 = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{q_1 \cdot b^2}{\omega_n^4 \cdot r}} \tag{12}$$

$$a_3 = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2 \cdot \delta^2} \cdot a_2 + \frac{q_2 \cdot b^2}{4 \cdot \delta^2 \cdot \omega_n^4 \cdot r}} \tag{13}$$

Se va a utilizar la siguiente nomenclatura:

$$a_{2+} = -1 + \sqrt{1 + \frac{q_1 \cdot b^2}{\omega_n^4 \cdot r}}$$

$$a_{2-} = -1 - \sqrt{1 + \frac{q_1 \cdot b^2}{\omega_n^4 \cdot r}}$$

Sumando las dos expresiones anteriores se obtiene la siguiente relación:

$$a_{2+} + a_{2-} = -2$$

Despejando a_{2-} se obtiene:

$$a_{2-} = -2 - a_{2+}$$

Puesto que a_{2+} es siempre positivo, de la relación anterior se deduce que a_{2-} es siempre negativo. Las mismas consideraciones se pueden hacer para a_3.

Para evaluar las desigualdades (7) y (8) en vez de trabajar con s_1, s_2 y s_3 se va trabajar con a_1, a_2 y a_3, ya que a efectos de estudio del signo ambos conjuntos de variables tendrán el mismo signo ya que únicamente se diferencian en una constante. Se va a construir una tabla en la que aparezcan los posibles valores de a_1 en función de los posibles valores que pueden tomar las variables a_2 y a_3

a_2	a_3	a_1
a_{2+}	a_{3+}	$a_{2+}+a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+}$
a_{2+}	a_{3-}	$a_{2+}+a_{3-}+a_{2+}\cdot a_{3-}$
a_{2-}	a_{3+}	$a_{2-}+a_{3+}+a_{2-}\cdot a_{3+}$
a_{2-}	a_{3-}	$a_{2-}+a_{3-}+a_{2-}\cdot a_{3-}$

Si en la tabla anterior se sustituye $a_{2-}=-2-a_{2+}$ y $a_{3-}=-2-a_{3+}$ y se opera se obtiene la siguiente tabla:

a_2	a_3	a_1
a_{2+}	a_{3+}	$a_{2+}+a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+}$
a_{2+}	$-2-a_{3+}$	$-\left(a_{2+}+a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+}+2\right)$
$-2-a_{2+}$	a_{3+}	$-\left(a_{2+}+a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+}+2\right)$
$-2-a_{2+}$	$-2-a_{3+}$	$a_{2+}+a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+}$

Para que se cumpla la desigualdad (8) una condición necesaria es que s_1 (o a_1) y s_3 (o a_3) deben ser simultáneamente positivos o negativos, esta condición invalida como soluciones validas las de la tercera y cuarta fila. Mientras que la desigualdad (7) no la cumplen las soluciones de la segunda fila. Las soluciones de la primera fila cumplen con la desigualdad (7). Falta por comprobar que cumplen la desigualdad (8).

Se desea demostrar que $(s_1\cdot s_3)>s_2^2$ considerando que $a_{2+}>0$, $a_{3+}>0$ y $a_{1*}=a_{2+}+a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+}$ Sustituyendo el valor de s_1, s_2 y s_3 establecido en la definición de las variables a_i en el cambio de variables:

$$\left(\frac{2\cdot\delta\cdot\omega_n^3\cdot r}{b^2}\cdot a_{1+}\cdot\frac{2\cdot\delta\cdot\omega_n\cdot r}{b^2}a_{3+}\right)>\left(\frac{\omega_n^2\cdot r}{b^2}\cdot a_{2+}\right)$$

y operando se obtiene:

$$4\cdot\delta^2\cdot a_{1+}\cdot a_{3+}>a_{2+}^2$$

Luego equivalentemente se debe demostrar que $4\cdot\delta^2\cdot a_{1+}\cdot a_{3+}$ es mayor que a_{2+}^2. Para ello se sustituye $a_{1+}=a_{2+}+a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+}$ en $4\cdot\delta^2\cdot a_{1+}\cdot a_{3+}$, se obtiene:

$$4\cdot\delta^2\cdot(a_{2+}+a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+})\cdot a_{3+}$$

Se descompone en la suma de dos términos el factor $a_{2+}\cdot a_{3+}$

$$4\cdot\delta^2\cdot(a_{2+}+a_{3+}+\frac{1}{2}a_{2+}\cdot a_{3+}+\frac{1}{2}a_{2+}\cdot a_{3+})\cdot a_{3+}$$

Se multiplica por 2 el término entre paréntesis:

$$2\cdot\delta^2\cdot(2\cdot a_{2+}+2\cdot a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+})\cdot a_{3+}$$

Puesto que $a_{2+}>0$, $a_{3+}>0$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$2\cdot\delta^2\cdot(2\cdot a_{2+}+2\cdot a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+})\cdot a_{3+}>2\cdot\delta^2\cdot(2\cdot a_{2+}+a_{2+}\cdot a_{3+})\cdot a_{3+}$$

En el miembro de la derecha de la desigualdad realizando el producto con a_{3+} y despejando a_{2+} se obtiene:

$$2\cdot\delta^2\cdot(2\cdot a_{2+}+2\cdot a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+})\cdot a_{3+}>2\cdot\delta^2\cdot(2\cdot a_{3+}+a_{3+}^2)\cdot a_{2+}$$

Despejando $2\cdot a_{3+}+a_{3\cdot+}^2$ de la ecuación (12) se obtiene $a_{3+}^2+2\cdot a_{3+}=\frac{1}{2\cdot\delta^2}\cdot a_{2+}+\frac{q_2\cdot b^2}{4\cdot\delta^2\cdot\omega_n^4\cdot r}$ sustituyendo este valor en la desigualdad anterior se obtiene:

$$2\cdot\delta^2\cdot(2\cdot a_{2+}+2\cdot a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+}+a_{2+}\cdot a_{3+})\cdot a_{3+}>2\cdot\delta^2\cdot(\frac{1}{2\cdot\delta^2}\cdot a_{2+}+\frac{q_2\cdot b^2}{4\cdot\delta^2\cdot\omega_n^4\cdot r})\cdot a_{2+}$$

Finalmente como $a_{2+}>0$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$2\cdot\delta^2\cdot(\frac{1}{2\cdot\delta^2}\cdot a_{2+}^2+\frac{q_2\cdot b^2}{4\cdot\delta^2\cdot\omega_n^4\cdot r}\cdot a_{2+})>2\cdot\delta^2\cdot(\frac{1}{2\cdot\delta^2}\cdot a_{2+}^2)=a_{2+}^2$$

Luego efectivamente se ha demostrado que $4\cdot\delta^2\cdot a_{1+}\cdot a_{3+}$ es mayor que a_{2+}^2.

En conclusión la soluciones validas para la matriz S en el estacionario son:

$$s_2=-\frac{\omega_n^2\cdot r}{b^2}+\sqrt{\left(\frac{\omega_n^2\cdot r}{b^2}\right)^2+\frac{q_1\cdot r}{b^2}}$$

$$s_3 = -\frac{2\cdot\delta\cdot\omega_n\cdot r}{b^2} + \sqrt{\left(\frac{2\cdot\delta\cdot\omega_n\cdot r}{b^2}\right)^2 + \frac{(q_2 + 2\cdot s_2)\cdot r}{b^2}}$$

La ganancia de Kalman es

$$K = R^{-1}\cdot B^T\cdot S = \begin{bmatrix} \frac{b\cdot s_2}{r} & \frac{b\cdot s_3}{r} \end{bmatrix}$$

y el control óptimo

$$u = -K\cdot x = -\frac{b\cdot s_2}{r}\cdot x_1 - \frac{b\cdot s_3}{r}\cdot x_2$$

♦

♦ Solución problema 8.9

a) Del enunciado se obtiene la siguiente información:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; Q = \cdot\begin{bmatrix} 1 & v \\ v & q \end{bmatrix} \; R = 1$$

La expresión general de la ecuación de Ricatti en el estacionario (EAR) es:

$$0 = A^T\cdot S + S\cdot A - S\cdot B\cdot R^{-1}\cdot B^T\cdot S + Q$$

La matriz S es simétrica y definida positiva, luego su estructura es:

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix}$$

Se van a realizar por separado cada uno de los productos de matrices que aparecen en la ecuación de Ricatti:

$$A^T\cdot S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix}$$

$$S\cdot A = \begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

$$S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S = \begin{bmatrix} s_2^2 & s_2 \cdot s_3 \\ s_2 \cdot s_3 & s_3^2 \end{bmatrix}$$

Sumando los términos de la derecha de EAR se pueden obtener las siguientes ecuaciones escalares:

$$0 = -s_2^2 + 1 \tag{1}$$

$$0 = s_1 - s_2 \cdot s_3 + v \tag{2}$$

$$0 = 2 \cdot s_2 - s_3^2 + q \tag{3}$$

De (1) se puede despejar s_2

$$s_2 = \pm 1 \tag{4}$$

De (3) se puede despejar s_3

$$s_3 = \pm\sqrt{q + 2 \cdot s_2} = \pm\sqrt{q \pm 2} \tag{5}$$

De (2) se puede despejar s_1

$$s_1 = s_2 \cdot s_3 - v = -v \pm \sqrt{q \pm 2} \tag{6}$$

De las posibles soluciones para las componentes de la matriz S se deben escoger aquellas que hagan que S sea definida positiva. Tal y como se demostró en el Problema 8.7 las soluciones válidas deben cumplir las siguientes condiciones

$$(s_1 + s_3) > 0 \tag{7}$$

$$(s_1 \cdot s_3 - s_2^2) > 0 \tag{8}$$

En la siguiente tabla se muestran en función de los posibles valores de s_2, s_3 y s_1, el resultado de evaluar los miembros de la izquierda de estas dos desigualdades:

s_2	s_3	s_1	$s_1 + s_3$	$s_1 \cdot s_3 - s_2^2$
1	$\sqrt{q+2}$	$-v+\sqrt{q+2}$	$-v+2\sqrt{q+2}$	$q+1-v\cdot\sqrt{q+2}$
1	$-\sqrt{q+2}$	$-v-\sqrt{q+2}$	$-v-2\sqrt{q+2}$	$q+1+v\cdot\sqrt{q+2}$
-1	$\sqrt{q-2}$	$-v-\sqrt{q-2}$	$-v$	$-q+1-v\cdot\sqrt{q-2}$
-1	$-\sqrt{q-2}$	$-v+\sqrt{q-2}$	$-v$	$-q+1+v\cdot\sqrt{q-2}$

Analizando esta tabla se observa que las soluciones de las filas dos, tres y cuatro no cumplen la desigualdad (7), luego quedan descartadas. Falta comprobar que las soluciones de la fila 1 cumple tanto esta desigualdad como la (8).

En primer lugar vamos a comprobar que las soluciones de la fila 1 cumplen la desigualdad (7):

$$-v+2\sqrt{q+2}>0$$

O equivalentemente, reordenando y elevando al cuadrado se tendría que comprobar que

$$4\cdot(q+2)>v^2$$

Del enunciado se sabe que

$$q-v^2>0\Rightarrow q>v^2$$

Luego como v^2 es más pequeño que *q*, bastaría comprobar que

$$4\cdot(q+2)>q$$

para asegurar que se cumple (7). Puesto que q>0, entonces la desigualdad anterior siempre se cumple. En consecuencia las soluciones de la fila 1 cumplen la desigualdad (7).

En segundo lugar se va a comprobar que las soluciones de la fila 1 cumplen la desigualdad (8):

$$q+1-v\cdot\sqrt{q+2}>0$$

O equivalentemente, reordenando y elevando al cuadrado se tendría que comprobar que

$$\frac{(q+1)^2}{q+2}>v^2$$

Del enunciado se sabe que

$$q-v^2>0\Rightarrow q>v^2$$

Luego como v^2 es más pequeño que *q*, bastaría comprobar que

$$f_1(q)>f_2(q)$$

para asegurar que se cumple (7). Siendo

$$f_1(q) = \frac{(q+1)^2}{q+2} \quad f_2(q) = q$$

En la Figura 4 se han representado a $f_1(q)$ (línea continua) y a $f_2(q)$ (línea discontinua) en el rango $q \in [0,10]$. Se observa que efectivamente f_1 es siempre mayor que f_2. Además para q muy grandes $f_1(q) \approx f_2(q)$. En consecuencia las soluciones de la fila 1 cumplen la desigualdad (8).

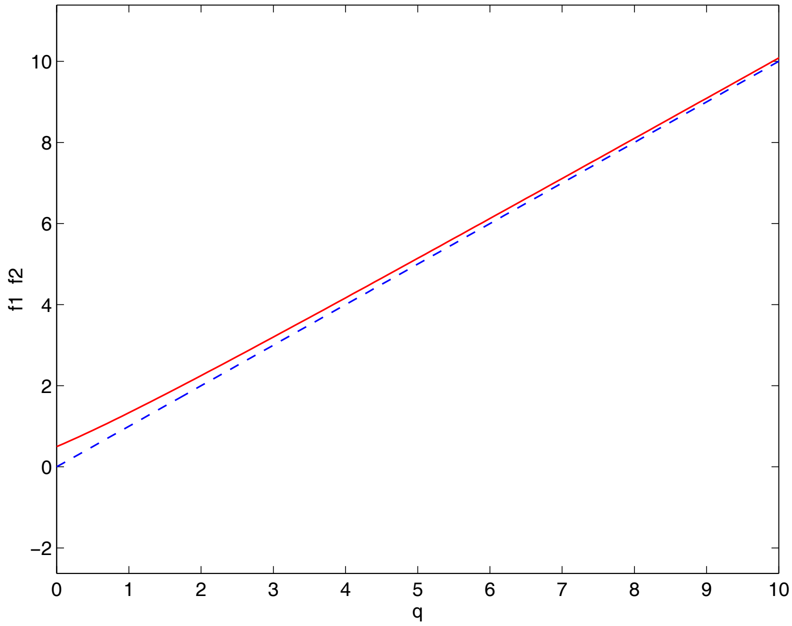


Figura 4

En conclusión la soluciones validas para la matriz *S* en el estacionario son:

$$s_1 = -v + \sqrt{q+2}\ , s_2 = 1\ , s_3 = \sqrt{q+2}$$

b) La ganancia de Kalman es

$$K = R^{-1} \cdot B^T \cdot S = \begin{bmatrix} s_2 & s_3 \end{bmatrix}$$

y el control óptimo es:

$$u = -K \cdot x = -x_1 - (\sqrt{q+2}) \cdot x_2$$

c) El sistema en lazo cerrado óptimo es:

$$A^c = A - B \cdot K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{q+2} \end{bmatrix}$$

La ecuación característica en lazo cerrado es:

$$\Delta^c(s) = \left| s \cdot I - (A - B \cdot K) \right| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s + \sqrt{q+2} \end{vmatrix} = s^2 + (\sqrt{q+2}) \cdot s + 1 = 0$$

Cuyas raíces son:

$$s = -\frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{q+2} \pm \sqrt{q-2} \right] \qquad (9)$$

Puesto que $\sqrt{q+2} > \sqrt{q-2}$ las dos raíces son siempre negativas por lo que se sitúan en el semiplano izquierdo de *s*, luego el sistema en lazo cerrado es estable.

d) Si $q \in [0,2)$ las dos raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas. En *q*=0 estás raíces son:

$$s = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot [1 \pm j] = -0.7071 \cdot [1 \pm j]$$

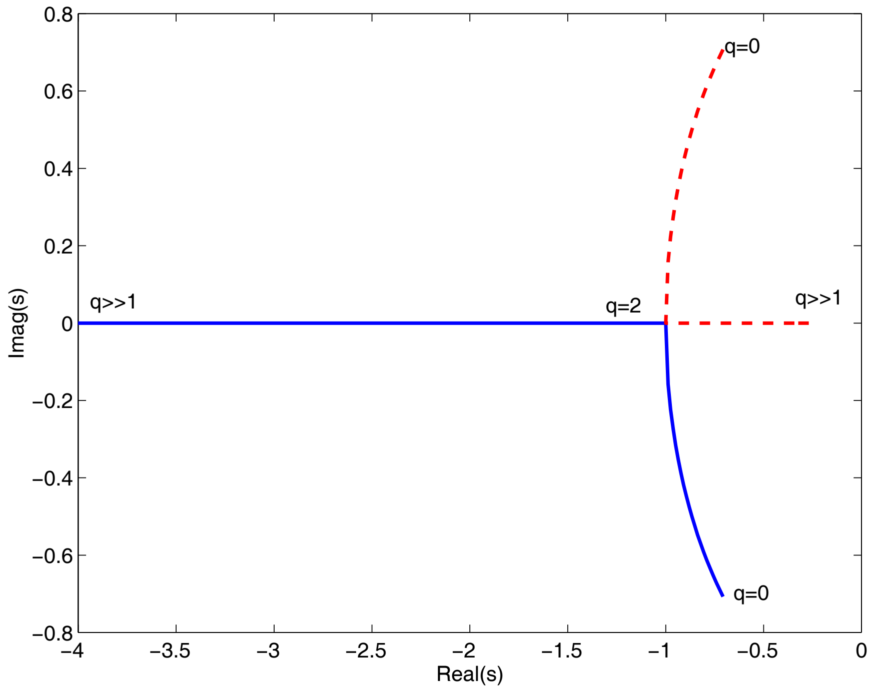


Figura 5. Lugar de las raíces de (9)

A medida que *q* aumenta las raíces complejas tienden hacía el eje real. Para q=2 las dos ráices confluyen en el eje real que tiene una raíz doble en *s*=-1. Para q>2 las dos raíces están sobre el eje real negativo. Una de ellas se sitúa en el intervalo (-1,0) y la otra en el intervalo (-∞,-1). A medida que *q* aumenta una tiende al origen y la otra hacía -∞. En Figura 5 se representa el lugar de las raíces cuando *q* varia de 0 a ∞.

El sistema es estable para todos los valores de *q*, aunque habría que tomar precauciones cuando *q* aumenta ya que la raíz próxima al origen puede provocar que la respuesta transitoria tenga excesivas oscilaciones, o que sea muy lenta.

♦

♦ Solución problema 8.10

a) Del enunciado se obtiene la siguiente información:

$$A = 1 \;\; B = 1 \; Q = 1 \; R = 1$$

La expresión general de la ecuación de Ricatti en el estacionario (EAR) es:

$$0 = A^T \cdot S + S \cdot A - S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S + Q$$

En este caso S es un escalar. Sustituyendo los valores de *A*, *B*, *Q*, *R* en la EAR se obtiene:

$$0 = 2 \cdot S - S^2 + 1$$

Cuyas soluciones son:

$$S = 1 \pm \sqrt{2}$$

La solución definida positiva corresponde a la solución con el signo positivo antes de la raíz. Luego

$$S = 1 + \sqrt{2}$$

b) La ganancia de Kalman es

$$K = R^{-1} \cdot B^T \cdot S = S = 1 + \sqrt{2}$$

y el control óptimo es:

$$u = -K \cdot x = -(1 + \sqrt{2}) \cdot x$$

El sistema en lazo cerrado óptimo es:

$$A^c = A - B \cdot K = 1 - (1 + \sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

La ecuación característica en lazo cerrado es:

$$\Delta^c(s) = |s \cdot I - (A - B \cdot K)| = s + \sqrt{2}$$

Cuya raíz es

$$s = -\sqrt{2}$$

Como el polo se encuentra en el semiplano izquierdo de *s* el sistema en lazo cerrado es estable.

♦ Solución problema 8.11

a) Del enunciado se obtiene la siguiente información:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; Q = \cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; R = r = 1/10$$

La expresión general de la ecuación de Ricatti en el estacionario (EAR) es:

$$0 = A^T \cdot S + S \cdot A - S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S + Q$$

La matriz S es simétrica y definida positiva, luego su estructura es:

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix}$$

Se van a realizar por separado cada uno de los productos de matrices que aparecen en la ecuación de Ricatti:

$$A^T \cdot S = \begin{bmatrix} s_1 - s_2 & s_2 - s_3 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix}$$

$$S \cdot A = \begin{bmatrix} s_1 - s_2 & s_2 \\ s_2 - s_3 & s_3 \end{bmatrix}$$

$$S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S = \frac{1}{r} \cdot \begin{bmatrix} s_1^2 & s_1 \cdot s_2 \\ s_1 \cdot s_2 & s_2^2 \end{bmatrix}$$

Sumando los términos de la derecha de EAR se pueden obtener las siguientes ecuaciones escalares:

$$0 = 2\cdot s_1 - 2\cdot s_2 - \frac{s_1^2}{r} + 1 \tag{1}$$

$$0 = 2\cdot s_2 - s_3 - \frac{s_1 \cdot s_2}{r} \tag{2}$$

$$0 = 2\cdot s_3 - \frac{s_2^2}{r} + 1 \tag{3}$$

De (3) se puede despejar s_3 en función de s_2

$$s_3 = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{s_2^2}{r} - 1\right] \tag{4}$$

De (1) se puede despejar s_2 en función de s_1

$$s_2 = \frac{1}{2}\cdot\left[1 + 2\cdot s_1 - \frac{s_1^2}{r}\right] \tag{5}$$

Sustituyendo (4) en (2) y multiplicando por 2 se obtiene:

$$0 = 4\cdot s_2 + 1 - \frac{s_2^2}{r} - \frac{2\cdot s_1 \cdot s_2}{r}$$

Sustituyendo (5) en la expresión anterior se obtiene:

$$0 = 2 + 4\cdot s_1 - \frac{2\cdot s_1^2}{r} + 1 - \frac{1}{4\cdot r}\cdot\left[1 + 2\cdot s_1 - \frac{s_1^2}{r}\right]^2 - \frac{s_1}{r}\cdot\left[1 + 2\cdot s_1 - \frac{s_1^2}{r}\right]$$

Operando, reordenando términos y sustituyendo el valor r=1/10 se obtiene la siguiente ecuación de cuarto orden para s_1:

$$-250\cdot s_1^4 + 200\cdot s_1^3 - 16\cdot s_1 + 0.5 = 0$$

Cuyas soluciones son: s_1=-0.2601 s_1=0.0316 s_1=0.3684 s_1=0.6600. Usando (5) y (4) se pueden obtener las soluciones correspondientes a s_2 y s_3. En la siguiente tabla se muestran en función de los posibles valores de s_1, los valores de s_2 y s_3 (obtenidos usando (4) y (5)), así como el resultado de evaluar los miembros de la izquierda de las desigualdades

$$(s_1 + s_3) > 0 \tag{7}$$

$$(s_1 \cdot s_3 - s_2^2) > 0 \tag{8}$$

lo que permitirá conocer que soluciones hacen que la matriz S sea definida positiva.

s_1	s_2	s_3	$s_1 + s_3$	$s_1 \cdot s_3 - s_2^2$
-0.2601	-0.0984	-0.4516	-0.7117	0.1078
0.0316	0.5266	0.8866	0.9182	-0.2493
0.3684	0.1898	-0.3199	0.0485	-0.1539
0.6600	-1.0180	4.6816	5.3416	2.0535

Analizando esta tabla se observa que las soluciones de la primera fila cumplen únicamente la desigualdad (8). Asimismo las soluciones de la filas 2 y 3 cumplen únicamente la desigualdad (7). Finalmente las soluciones de la fila 4 cumplen simultáneamente (7) y (8). Luego estas son las soluciones válidas: s_1=0.6600, s_2=-1.0180, s_3=4.6816.

b) La ganancia de Kalman es

$$K = R^{-1} \cdot B^T \cdot S = \begin{bmatrix} s_1 / r & s_2 / r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.6 & -10.18 \end{bmatrix}$$

y el control óptimo es:

$$u = -K \cdot x = -6.6 \cdot x_1 + 10.18 \cdot x_2$$

El sistema en lazo cerrado óptimo es:

$$A^c = A - B \cdot K = \begin{bmatrix} -5.6 & 10.18 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica en lazo cerrado es:

$$\Delta^c(s) = \left| s \cdot I - (A - B \cdot K) \right| = s^2 + 4.6 \cdot s + 4.58 = 0$$

Cuyas raíces son: s=-1.4574 y s=-3.1426. Las dos raíces son negativas por lo que se sitúan en el semiplano izquierdo de s, luego el sistema en lazo cerrado es estable.

♦

♦ Solución problema 8.12

a) Del enunciado se obtiene la siguiente información:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \; Q = C^T \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; R = 1$$

La expresión general de la ecuación de Ricatti en el estacionario (EAR) es:

$$0 = A^T \cdot S + S \cdot A - S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S + Q$$

La matriz S es simétrica y definida positiva, luego su estructura es:

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix}$$

Se van a realizar por separado cada uno de los productos de matrices que aparecen en la ecuación de Ricatti:

$$A^T \cdot S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix}$$

$$S \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

$$S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S = \begin{bmatrix} s_2^2 & s_2 \cdot s_3 \\ s_2 \cdot s_3 & s_3^2 \end{bmatrix}$$

Sumando los términos de la derecha de EAR se pueden obtener las siguientes ecuaciones escalares:

$$0 = -s_2^2 + 1 \qquad (1)$$

$$0 = s_1 - s_2 \cdot s_3 \qquad (2)$$

$$0 = 2 \cdot s_2 - s_3^2 \qquad (3)$$

De (1) se puede despejar s_2

$$s_2 = \pm 1 \tag{4}$$

De (3) se puede despejar s_3

$$s_3 = \pm\sqrt{2 \cdot s_2} = \pm\sqrt{\pm 2} \tag{5}$$

De (2) se puede despejar s_1

$$s_1 = s_2 \cdot s_3 = \pm\sqrt{\pm 2}$$

En la siguiente tabla se muestran todas las posibles soluciones de la EAR:

s_2	s_3	s_1
1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
-1	$j\cdot\sqrt{2}$	$-j\cdot\sqrt{2}$
-1	$-j\cdot\sqrt{2}$	$j\cdot\sqrt{2}$

Obsérvese que algunas soluciones son complejas.

b) Si el par (A, B) es controlable y el par (A,C) es observable entonces el valor estacionario de S es el mismo para todas las elecciones de S_∞ y además S es definida positiva.

Para conocer si estos pares son controlables y observables, se deben examinar la matriz de controlabilidad y la de observabilidad.

$$M_c = \begin{bmatrix} B & A\cdot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_o = \begin{bmatrix} C^T & A^T \cdot C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ambas son de rango n=2, luego el sistema es controlable y observable. Existe por tanto una única solución definida positiva.

La ecuación de los autovalores de S es:

$$\begin{vmatrix} s_1 - \lambda & s_2 \\ s_2 & s_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda\cdot(s_1 + s_3) + (s_1 \cdot s_3 - s_2^2) = 0$$

Cuya autovalores son:

$$\lambda = \frac{(s_1 + s_3) \pm \sqrt{(s_1 + s_3)^2 - 4 \cdot (s_1 \cdot s_3 - s_2^2)}}{2}$$

En la siguiente tabla se muestran en función de las posibles soluciones los autovalores que se obtienen y la definitud de la matriz S

s_2	s_3	s_1	λ_1	λ_2	Definitud de S
1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2.4142	0.4142	Definida Positiva
1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-0.4142	-2.4142	Definida Negativa
-1	$j \cdot \sqrt{2}$	$-j \cdot \sqrt{2}$	$-j$	$+j$	Indefinida
-1	$-j \cdot \sqrt{2}$	$j \cdot \sqrt{2}$	$-j$	$+j$	Indefinida

Se observa que únicamente existe una única solución definida positiva de S:

$$s_1 = \sqrt{2}\ , s_2 = 1\ , s_3 = \sqrt{2}$$

c) La ganancia de Kalman es

$$K = R^{-1} \cdot B^T \cdot S = \begin{bmatrix} s_2 & s_3 \end{bmatrix}$$

El sistema en lazo cerrado óptimo es:

$$A^c = A - B \cdot K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s_2 & -s_3 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica en lazo cerrado es:

$$\Delta^c(s) = |s \cdot I - (A - B \cdot K)| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s + \sqrt{q+2} \end{vmatrix} = s^2 + s_3 \cdot s + s_2 = 0$$

Cuyas raíces son:

$$s = -\frac{s_3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_3}{2}\right)^2 - s_2}$$

En la siguiente tabla se muestran los polos en lazo cerrado y la estabilidad del sistema en lazo cerrado en función del tipo de definitud de la matriz S

s_2	s_3	s_1	Definitud de S	Polos en lazo cerrado	¿Estable?
1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	Positiva	$0.7071\cdot(-1\pm j)$	Si
1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	Negativa	$0.7071\cdot(+1\pm j)$	No
-1	$j\cdot\sqrt{2}$	$-j\cdot\sqrt{2}$	Indefinida	$0.7071\cdot(\pm 1-j)$	No
-1	$-j\cdot\sqrt{2}$	$j\cdot\sqrt{2}$	Indefinida	$0.7071\cdot(\pm 1+j)$	No

Analizando la tabla anterior se observa que únicamente cuando la matriz *S* es definida positiva el sistema en lazo cerrado sea estable, sus dos polos se encuentran ubicados en el semiplano izquierdo de *s*. Por su parte, la matriz S definida negativa hace que el sistema en lazo cerrado sea inestable, sus dos polos se encuentran ubicados en el semiplano derecho de s. Finalmente la matriz S indefinida hace que el sistema en lazo cerrado sea inestable, con un polo ubicado en el semiplano izquierdo de s y otro polo en el semiplano derecho de s.

♦

♦ Solución problema 8.13

a) Del enunciado se obtiene la siguiente información:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\ B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\ Q=\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ R=r=1/10$$

La ecuación de Chang-Letov es:

$$\Delta^c(-s)\cdot\Delta^c(s)=\left|H^T(-s)\cdot H(s)+R\right|\cdot\Delta(-s)\cdot\Delta(s)\cdot\left|R\right|^{-1}$$

En la expresión anterior $\Delta\ (s)$ y *H*(*s*) son la ecuación característica y la función de transferencia del sistema en lazo abierto, mientras que $\Delta^c(s)$ es la ecuación característica en lazo cerrado.

Con los datos del enunciado, y supuesto que $C=\sqrt{Q}=\sqrt{q}\cdot I=I$ es posible calcular $\Delta\ (z)$ y *H*(*z*):

$$\Delta(s)=\left|s\cdot I-A\right|=(s-1)^2 \tag{1}$$

$$H(s)=C\cdot(s\cdot I-A)^{-1}\cdot B=\frac{1}{(s-1)^2}\cdot\begin{bmatrix}s-1\\ -1\end{bmatrix} \tag{2}$$

Asimismo,

$$\Delta(-s)\cdot\Delta(s) = (-s-1)^2\cdot(s-1)^2 = (s^2-1)$$

y

$$H^T(-s)\cdot H(s) = \left(\frac{1}{(-s-1)^2}\cdot\begin{bmatrix}-s-1 & -1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\frac{1}{(s-1)^2}\cdot\begin{bmatrix}s-1\\ -1\end{bmatrix}\right) = \frac{2-s^2}{(s^2-1)^2}$$

Teniendo en cuenta estos resultados la ecuación de Chang-Letov se puede expresar de la siguiente forma:

$$\Delta^c(-s)\cdot\Delta^c(s) = \left(\frac{2-s^2}{(s^2-1)^2}+r\right)\cdot\left(\frac{2-s^2}{(s^2-1)^2}\right)\cdot\frac{1}{r} = (s^2-1)^2+\frac{2-s^2}{r} = s^4-\left(2+\frac{1}{r}\right)\cdot s^2+\left(1+\frac{2}{r}\right)$$

Considerando r=1/10 se obtiene:

$$\Delta^c(-s)\cdot\Delta^c(s) = s^4-12\cdot s^2+21$$

Las cuatro raíces de la ecuación anterior son:

$$s = \pm 3.1421 \quad s = \pm 1.4584$$

Para que el lazo cerrado sea estable se deben escoger las raíces situadas en el semiplano izquierdo de s, es decir:

$$s = -3.1421 \quad s = -1.4584$$

Con estas raíces $\Delta^c(s)$ es:

$$\Delta^c(s) = (s+3.1421)\cdot(s+1.4584) = s^2+4.6006\cdot s+4.5826 = 0$$

La ganancia en lazo cerrado se puede obtener mediante la fórmula de Ackermann:

$$\overline{K} = [0 \quad 1]\cdot M_c^{-1}\cdot\Delta^c(A)$$

Donde M_c es la matriz de controlabilidad y $\Delta^c(A)$ representa el polinomio matricial obtenido al sustituir la matriz A por la variable s en la ecuación característica

$$\Delta^c(A) = A^2 + 4.6006 \cdot A + 4.5826 \cdot I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^2 + 4.6006 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 4.5826 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 10.1831 & 0 \\ -6.6006 & 10.1831 \end{bmatrix}$$

$\Delta^c(A)$ que es una matriz real de dimensión 2 x 2. Por otra parte la matriz de controlabilidad es

$$M_c = \begin{bmatrix} B & A \cdot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y su inversa

$$M_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación de Ackermann y operando se obtiene la ganancia en el estado estacionario

$$\overline{K} = [6.006 \quad -10.1831]$$

El sistema en lazo cerrado es:

$$A^c = A - B \cdot K = \begin{bmatrix} -6.6006 & 10.1831 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como era previsible su ecuación característica es:

$$\Delta^c(s) = (s + 3.1421) \cdot (s + 1.4584) = s^2 + 4.6006 \cdot s + 4.5826 = 0$$

b) Las raíces del sistema en lazo cerrado en función de *r* se pueden obtener igualando a 0 el miembro de la derecha de la ecuación de Chang-Letov:

$$s^4 - \left(2 + \frac{1}{r}\right) \cdot s^2 + \left(1 + \frac{2}{r}\right) = 0$$

Sus cuatro soluciones son:

$$s = \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2 \cdot r}\right) \pm \frac{1}{2 \cdot r} \cdot \sqrt{1 - 4 \cdot r}}$$

Estas raíces se encuentran situadas de forma simétrica con respecto al eje imaginario del plano *s*. Se van analizar las que se encuentran en el semiplano izquierdo del plano *s* que corresponden a $\Delta^c(s)$.

Si $r \to 0$, desarrollando en serie de Taylor, se obtiene que

$$\sqrt{1-4\cdot r} \approx 1-2\cdot r$$

Luego

$$s = -\sqrt{\left(1+\frac{1}{2\cdot r}\right) \pm \left(-1+\frac{1}{2\cdot r}\right)}$$

Con el signo positivo, la raíz tiende a -∞ y con el signo negativo tiende a $-\sqrt{2} = -1.4142$

En el rango $r \in (0,0.25)$, las dos raíces están situadas sobre el eje real negativo, una en el intervalo (-∞,-1.7321) y la otra sobre (-1.7321,-1.4142). A medida que *r* aumenta ambas raíces tienden a -1.7321.

Para *r*=0.25 existe una raíz doble en -1.7321.

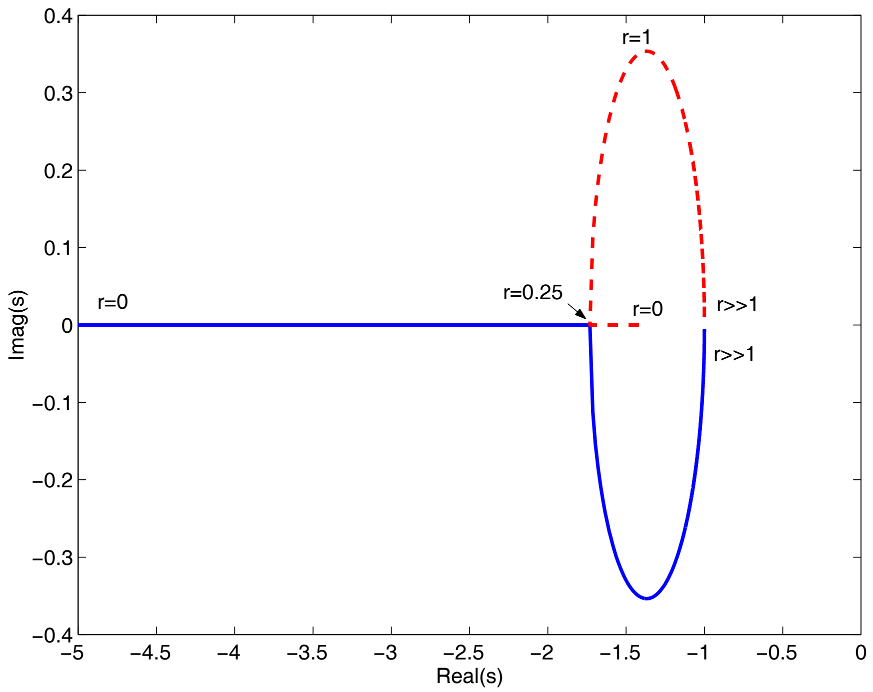


Figura 6: Lugar de las raíces cuando r varia de 0 a ∞

Si *r*>0.25, las raíces son complejas conjugadas, con el siguiente módulo y argumento:

$$|s| = \left(1+\frac{2}{r}\right)^{1/4} \qquad \arg(s) = \frac{\sqrt{4\cdot r-1}}{2\cdot(2\cdot r+1)}$$

Se observa que a medida que r aumenta el módulo de la raíz disminuye, desde 1.7321 con *r*=0.25 a 1 cuando $r \to \infty$. Por su parte el argumento es nulo para *r*=0.25, tiene un máximo de 16.1º en *r*=1, y luego disminuye y tiende a 0 cuando $r \to \infty$.

En la Figura 6 se representa el lugar de las raíces cuando *r* varia de 0 a ∞.

♦

SOLUCION DE LOS PROBLEMAS
TEMA 9: Control estocástico de sistemas discretos

♦ Solución problema 9.1

Comparando con un proceso cuya forma general es

$$A(q)\cdot y_k = C(q)\cdot e_k$$

se obtiene

$$A(q) = q^2 - 1.2\cdot q + 0.4$$
$$C(q) = 2\cdot q^2 - 2.8\cdot q + 1$$

De acuerdo con la sección 9.3 de los apuntes el *predictor de varianza mínima* sobre *m* pasos está dado por

$$\hat{y} = \hat{y}(k+m\,|\,k) = \frac{q\cdot G(q)}{C(q)}\cdot y_k \qquad (1)$$

Y la *varianza del error de predicción* está dada por:

$$E[\tilde{y}(k+m\,|\,k)^2] = [f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + ... + f_{m-1}^2]\cdot\sigma^2 \qquad (2)$$

donde los polinomios $F(q) = f_0\cdot q^{m-1} + f_1\cdot q^{m-2} + ... + f_{m-1}$ y $G(q)$ son el cociente y el resto cuando se divide $q^{m-1}\cdot C$ por A.

a) Si m=1

$$\begin{array}{r|l} 2\cdot q^2 - 2.8\cdot q + 1 & q^2 - 1.2\cdot q + 0.4 \\ \cline{2-2} \underline{-2q^2 + 2.4\cdot q - 0.8} & 2 \\ -0.4\cdot q + 0.2 & \end{array}$$

Luego

$$F(q) = 2$$
$$G(q) = -0.4\cdot q + 0.2$$

Con lo que

$$\hat{y}(k+1\,|\,k) = \frac{-0.4\cdot q^2 + 0.2\cdot q}{2\cdot q^2 - 2.8\cdot q + 1}\cdot y_k = \frac{-0.2\cdot q^2 + 0.1\cdot q}{q^2 - 1.4\cdot q + 0.5}\cdot y_k$$

$$E[\tilde{y}(k+1\,|\,k)^2]=[f_0^2]\cdot\sigma^2\;=2^2\cdot 1=4$$

b) Si *m*=2

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2\cdot q^3-2.8\cdot q^2+q & q^2-1.2\cdot q+0.4 \\ \cline{3-3}
 & -2q^3+2.4\cdot q^2-0.8\cdot q & 2\cdot q-0.4 \\ \cline{2-2}
 & -0.4\cdot q^2+0.2\cdot q & \\
 & +0.4\cdot q^2-0.48\cdot q+0.16 & \\ \cline{2-2}
 & -0.28\cdot q+0.16 &
\end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned}F(q)&=2\cdot q-0.4\\ G(q)&=-0.28\cdot q+0.16\end{aligned}$$

Con lo que

$$\hat{y}(k+2\,|\,k)=\frac{-0.28\cdot q^2+0.16\cdot q}{2\cdot q^2-2.8\cdot q+1}\cdot y_k\;=\frac{-0.14\cdot q^2+0.08\cdot q}{q^2-1.4\cdot q+0.5}\cdot y_k$$

$$E[\tilde{y}(k+2\,|\,k)^2]=[f_0^2+f_1^2]\cdot\sigma^2\;=[2^2+(-0.4)^2]\cdot 1=4.16$$

b) Si *m*=3

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2\cdot q^4-2.8\cdot q^3+q^2 & q^2-1.2\cdot q+0.4 \\ \cline{3-3}
 & -2q^4+2.4\cdot q^3-0.8\cdot q^2 & 2\cdot q^2-0.4\cdot q-0.28 \\ \cline{2-2}
 & -0.4\cdot q^3+0.2\cdot q^2 & \\
 & +0.4\cdot q^3-0.48\cdot q^2+0.16\cdot q & \\ \cline{2-2}
 & -0.28\cdot q^2+0.16\cdot q & \\
 & +0.28\cdot q^2-0.34\cdot q+0.11 & \\ \cline{2-2}
 & -0.18\cdot q+0.11 &
\end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned}F(q)&=2\cdot q^2-0.4\cdot q-0.28\\ G(q)&=-0.18\cdot q+0.11\end{aligned}$$

Con lo que

$$\hat{y}(k+3\,|\,k)=\frac{-0.18\cdot q^2+0.11\cdot q}{2\cdot q^2-2.8\cdot q+1}\cdot y_k\;=\frac{-0.09\cdot q^2+0.055\cdot q}{q^2-1.4\cdot q+0.5}\cdot y_k$$

y

$$E[\tilde{y}(k+3\,|\,k)^2] = [f_0^2 + f_1^2 + f_2^2]\cdot\sigma^2 = [2^2 + 0.4^2 + 0.28^2]\cdot 1 = 4.24$$

♦

♦ Solución problema 9.2

Equivalentemente este proceso puede expresarse en la forma:

$$[1 + a\cdot q^{-1}]\cdot y_k = [1 + c\cdot q^{-1}]\cdot e_k$$

O en la forma:

$$[q + a]\cdot y_k = [q + c]\cdot e_k$$

Comparando con un proceso cuya forma general es

$$A(q)\cdot y_k = C(q)\cdot e_k$$

se obtiene

$$A(q) = q + a$$
$$C(q) = q + c$$

El orden de los polinomios *A*(*q*) y *C*(*q*) es n=1.

a) De acuerdo con la sección 9.3 de los apuntes el *predictor de varianza mínima* sobre *m* pasos está dado por

$$\hat{y} = \hat{y}(k+m\,|\,k) = \frac{q\cdot G(q)}{C(q)}\cdot y_k \qquad (1)$$

donde los polinomios *F*(*q*) y *G*(*q*) son el cociente y el resto, respectivamente cuando se divide $q^{m-1}\cdot C$ por *A*, es decir,

$$q^{m-1}\cdot C(q) = F(q)\cdot A(q) + G(q) \qquad (2)$$

Se considera que el polinomio *F* es mónico de grado *m*-1 y *G* es de grado menor que *n*:

$$F(q) = q^{m-1} + f_1\cdot q^{m-2} + \ldots + f_{m-1}$$
$$G(q) = g_0\cdot q^{n-1} + g_1\cdot q^{n-2} + \ldots + g_{n-1}$$

Luego sustituyendo en (2) las expresiones de *C*, *A*, *F* y *G* y multiplicando, se obtiene la siguiente expresión:

$$q^m + c\cdot q^{m-1} = q^m + f_1 \cdot q^{m-1} + \ldots + f_{m-1}\cdot q + a\cdot q^{m-1} + a\cdot f_1 \cdot q^{m-2} + \ldots + a\cdot f_{m-1} + g_0$$

Igualando los coeficientes que poseen las mismas potencias se obtienen las siguientes *m* ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&q^{m-1} :\ c = f_1 + a \\
&q^{m-2} :\ 0 = f_2 + a\cdot f_1 \\
&q^{m-3} :\ 0 = f_3 + a\cdot f_2 \\
&: \\
&: \\
&q :\ 0 = f_{m-1} + a\cdot f_2 \\
&q^0 :\ 0 = a\cdot f_{m-1} + g_0
\end{aligned}$$

Cuya solución es:

$$\begin{aligned}
&f_j = (-a)^{j-1}\cdot(c-a) \quad j = 1,\ldots,m-1 \\
&g_0 = (-a)^{m-1}\cdot(c-a)
\end{aligned}$$

Luego, de acuerdo con (1) el predictor de la salida sobre *m* pasos es:

$$\hat{y}(k+m\,|\,k) = \frac{(-a)^{m-1}\cdot(c-a)q}{q+c}\cdot y_k$$

b) De acuerdo con la sección 9.3, la varianza del error de predicción viene dado por la expresión:

$$E[\tilde{y}(k+m\,|\,k)^2] = \sigma^2\cdot\sum_{j=0}^{m-1} f_j^2$$

Sustituyendo en ella los f_j obtenidos en el apartado anterior, se obtiene:

$$E[\tilde{y}(k+m\,|\,k)^2] = \sigma^2\cdot\left[1 + \sum_{j=1}^{m-1}\left((-a)^{j-1}\cdot(c-a)\right)^2\right]$$

que es equivalente a:

$$E[\tilde{y}(k+m\,|\,k)^2] = \sigma^2\cdot\left[1 + \frac{(c-a)^2}{a^2}\sum_{j=1}^{m-1} a^{2\cdot j}\right]$$

♦

♦ Solución problema 9.3

Equivalentemente este proceso puede expresarse en la forma:

$$[1-0.9\cdot q^{-1}]\cdot y_k = [1+5\cdot q^{-1}]\cdot e_k$$

O en la forma:

$$[q-0.9]\cdot y_k = [q+5]\cdot e_k$$

Comparando con un proceso cuya forma general es

$$A(q)\cdot y_k = C(q)\cdot e_k$$

se obtiene

$$A(q) = q - 0.9$$
$$C(q) = q + 5$$

El orden de los polinomios *A*(*q*) y *C*(*q*) es *n*=1.

a) De acuerdo con lo explicado en la sección 9.2.2 de los apuntes si *C*(*q*) tiene sus ceros fuera del círculo unidad, el polinomio debe ser factorizado de la siguiente forma:

$$C = C^{+}\cdot C^{-}$$

donde C^{-} posee todas sus raíces fuera del círculo unidad y C^{+} posee todas sus raíces dentro del círculo unidad. El polinomio *C* debe ser sustituido por

$$C = C^{+}\cdot\left[C^{-}\right]^{*}$$

En este caso

$$C^{+} = 1$$
$$C^{-} = q+5 \Rightarrow [C^{-}]^{*} = q\cdot[q^{-1}+5] = 1+5\cdot q$$

Luego el polinomio *C* debe ser sustituido por:

$$C = 1+5\cdot q$$

b) Como m=2 la división de polinomios que hay que realizar es:

$$
\begin{array}{rl}
5\cdot q^2 + \quad q & \big|\, q-0.9 \\
\underline{-5\cdot q^2 + 4.5\cdot q} & 5\cdot q + 5.5 \\
5.5\cdot q & \\
\underline{-5.5q + 4.95} & \\
4.95 &
\end{array}
$$

Luego

$$F(q) = 5\cdot q + 5.5$$
$$G(q) = 4.95$$

Con lo que

$$\hat{y}(k+2\,|\,k) = \frac{4.95\cdot q}{5\cdot q + 1}\cdot y_k$$

$$E[\tilde{y}(k+2\,|\,k)^2] = [f_0^2 + f_1^2]\cdot\sigma^2 = [5^2 + 5.5^2]\cdot\sigma^2 = 55.25\cdot\sigma^2$$

♦

♦ Solución problema 9.4

Equivalentemente este proceso puede expresarse en la forma:

$$y_k\cdot[1 - q^{-1} + 0.5\cdot q^{-2}] = u_k\cdot[q^{-2} + 0.5\cdot q^{-3}] + e_k\cdot[1 + 0.8\cdot q^{-1} + 0.25\cdot q^{-2}]$$

O en la forma:

$$y_k\cdot[q^3 - q^2 + 0.5\cdot q] = u_k\cdot[q + 0.5] + e_k\cdot[q^3 + 0.8\cdot q^2 + 0.25\cdot q]\cdot 0.5$$

Comparando con un proceso cuya forma general es

$$A(q)\cdot y_k = B(q)\cdot u_k + C(q)\cdot e_k$$

se obtiene

$$A(q) = q^3 - q^2 + 0.5\cdot q$$
$$B(q) = q + 0.5$$
$$C(q) = q^3 + 0.8\cdot q^2 + 0.25\cdot q$$

El orden del polinomio $A(q)$ es n=3 y el del polinomio $B(q)$ es m=1. Luego d=n-m=2. Se puede comprobar que tanto *B*(*q*) como *C*(*q*) son estables.

Hay que dividir $q^{d-1}\cdot C(q)$ entre A(q):

$$
\begin{array}{rrrl|l}
q^4 & +0.8\cdot q^3 & +0.25\cdot q^2 & & q^3-q^2+0.5\cdot q \\ \cline{5-5}
-q^4 & +\ q^3 & -\ 0.5\cdot q^2 & & q+1.8 \\ \cline{1-3}
 & 1.8\cdot q^3 & -0.25\cdot q^2 & & \\
 & -1.8\cdot q^3 & +1.8\cdot q^2 & -0.9\cdot q & \\ \cline{2-4}
 & & 1.55\cdot q^2 & -0.9\cdot q &
\end{array}
$$

En la división anterior se ha prescindido, por simplificar, del factor 0.5 que multiplica a C(q). Para obtener el resultado correcto de *F*(*q*) y *G*(*q*) al cociente y al resto de esta división hay que multiplicarlos por 0.5. Luego

$$F(q) = 0.5\cdot(q+1.8)$$
$$G(q) = 0.5\cdot(1.55\cdot q^2 - 0.9\cdot q)$$

Con lo que el controlador de varianza mínima es:

$$u_k = -\frac{G(q)}{B(q)\cdot F(q)}\cdot y_k = -\frac{1.55\cdot q^2 - 0.9\cdot q}{(q+0.5)\cdot(q+1.8)}\cdot y_k$$

♦

♦ Solución problema 9.5

Equivalentemente este proceso puede expresarse en la forma:

$$y_k\cdot[1-0.5q^{-1}] = u_k\cdot[q^{-2}] + e_k\cdot[1-0.7\cdot q^{-1}]$$

O en la forma:

$$y_k\cdot[q^2-0.5\cdot q] = u_k + e_k\cdot[q^2-0.7\cdot q]$$

Comparando con un proceso cuya forma general es

$$A(q)\cdot y_k = B(q)\cdot u_k + C(q)\cdot e_k$$

se obtiene

$$A(q) = q^2 - 0.5 \cdot q$$
$$B(q) = 1$$
$$C(q) = q^2 - 0.7 \cdot q$$

El orden del polinomio *A*(*q*) es *n*=2 y el del polinomio *B*(*q*) es *m*=0. Luego *d*=n-m=2. Se puede comprobar que tanto *B*(*q*) como *C*(*q*) son estables.

Hay que dividir $q^{d-1} \cdot C(q)$ entre A(q)

$$\begin{array}{rl} q^3 - 0.7 \cdot q^2 & \quad \big| \; q^2 - 0.5 \cdot q \\ -q^3 + 0.5 \cdot q^2 & \quad \; q - 0.2 \\ \hline -0.2 \cdot q^2 & \\ 0.2 \cdot q^2 - 0.1 \cdot q & \\ \hline -0.1 \cdot q & \end{array}$$

Luego

$$F(q) = q - 0.2$$
$$G(q) = -0.1 \cdot q$$

Con lo que el controlador de varianza mínima es:

$$u_k = -\frac{G(q)}{B(q) \cdot F(q)} \cdot y_k = \frac{0.1 \cdot q}{q - 1.2} \cdot y_k$$

♦

♦ Solución problema 9.6

Equivalentemente este proceso puede expresarse en la forma:

$$y_k \cdot [1 + aq^{-1}] = u_k \cdot [q^{-2}] + e_k \cdot [1 + c \cdot q^{-1}]$$

O en la forma:

$$y_k \cdot [q^2 + a \cdot q] = u_k + e_k \cdot [q^2 + c \cdot q]$$

Comparando con un proceso cuya forma general es

$$A(q) \cdot y_k = B(q) \cdot u_k + C(q) \cdot e_k$$

se obtiene

$$A(q) = q^2 + a \cdot q$$
$$B(q) = 1$$
$$C(q) = q^2 + c \cdot q$$

El orden del polinomio *A*(*q*) es *n*=2 y el del polinomio *B*(*q*) es *m*=0. Luego *d*=n-m=2. *B*(*q*) es estable, y se supone que *C*(*q*) es estable.

a) Hay que dividir $q^{d-1} \cdot C(q)$ entre *A*(*q*)

$$\begin{array}{rl|l} & q^3 + c \cdot q^2 & q^2 + a \cdot q \\ \cline{3-3} & -q^3 - a \cdot q^2 & q + (c-a) \\ \cline{2-2} & (c-a) \cdot q^2 & \\ & -(c-a) \cdot q^2 - a \cdot (c-a) \cdot q & \\ \cline{2-2} & -a \cdot (c-a) \cdot q & \end{array}$$

Luego

$$F(q) = q + (c-a)$$
$$G(q) = -a \cdot (c-a) \cdot q$$

Con lo que el controlador de varianza mínima es:

$$u_k = -\frac{G(q)}{B(q) \cdot F(q)} \cdot y_k = \frac{a \cdot (c-a) \cdot q}{q + (c-a)} \cdot y_k$$

b) Si *a* = 0, el controlador se hace 0, por lo que el sistema estaría en lazo abierto. Asimismo la planta, entendiendo como tal el cociente entre los polinomios B(q)/A(q)= $1/q^2 = q^{-2}$, simplemente sería un retardador de orden 2. En otras palabras, la salida y_k en el instante *k* sería la entrada u_k que se produjo en el instante k-2, más la dinámica *C*(*q*) del ruido e_k

$$y_k = u_{k-2} + e_k + c \cdot e_{k-1}$$

♦

♦ Solución problema 9.7

Equivalentemente este proceso puede expresarse en la forma:

$$y_k \cdot [1 - 1.7 \cdot q^{-1} + 0.7 \cdot q^{-2}] = u_k \cdot [q^{-\alpha} + 0.5 \cdot q^{-\alpha-1}] + e_k \cdot [1 + 1.5 \cdot q^{-1} + 0.9 \cdot q^{-2}]$$

O en la forma:

$$y_k \cdot [q^{\alpha+1} - 1.7 \cdot q^{\alpha} + 0.7 \cdot q^{\alpha-1}] = u_k \cdot [q + 0.5] + e_k \cdot [q^{\alpha+1} + 1.5 \cdot q^{\alpha} + 0.9 \cdot q^{\alpha-1}]$$

Comparando con un proceso cuya forma general es

$$A(q) \cdot y_k = B(q) \cdot u_k + C(q) \cdot e_k$$

se obtiene

$$\begin{aligned} A(q) &= q^{\alpha+1} - 1.7 \cdot q^{\alpha} + 0.7 \cdot q^{\alpha-1} \\ B(q) &= q + 0.5 \\ C(q) &= q^{\alpha+1} + 1.5 \cdot q^{\alpha} + 0.9 \cdot q^{\alpha-1} \end{aligned}$$

a) Si α=1

$$\begin{aligned} A(q) &= q^2 - 1.7 \cdot q + 0.7 \\ B(q) &= q + 0.5 \\ C(q) &= q^2 + 1.5 \cdot q + 0.9 \end{aligned}$$

El orden del polinomio *A*(*q*) es *n*=2 y el del polinomio *B*(*q*) es *m*=1. Luego *d*=2-1=1. *B*(*q*) y C(q) son estables. Dividiendo $q^{d-1} \cdot C(q)$ entre *A*(*q*) se obtiene:

$$\begin{array}{rl} q^2 + 1.5 \cdot q + 0.9 & \quad \underline{\left| \, q^2 - 1.7 \cdot q + 0.7 \right.} \\ \underline{- q^2 + 1.7 \cdot q - 0.7} & \quad 1 \\ 3.2 \cdot q + 0.2 & \end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned} F(q) &= 1 \\ G(q) &= 3.2 \cdot q + 0.2 \end{aligned}$$

El *predictor de varianza mínima* sobre *1* paso es:

$$\hat{y}(k+1 \mid k) = \frac{q \cdot G(q)}{C(q)} \cdot y_k = \frac{3.2 \cdot q^2 + 0.2 \cdot q}{q^2 + 1.5 \cdot q + 0.9} \cdot y_k$$

El *controlador de varianza mínima* es:

$$u_k = -\frac{G(q)}{B(q) \cdot F(q)} \cdot y_k = -\frac{3.2 \cdot q + 0.2}{q + 0.5} \cdot y_k$$

De acuerdo con la sección 9.4.1 de los apuntes, la salida del sistema controlado es:

$$y_k = F^*(q^{-1})\cdot e_k = 1\cdot e_k = e_k$$

Luego la varianza de la salida es:

$$E[y_k^2] = E[e_k^2] = \sigma^2$$

b) Si α=2

$$\begin{aligned}
A(q) &= q^3 - 1.7\cdot q^2 + 0.7\cdot q \\
B(q) &= q + 0.5 \\
C(q) &= q^3 + 1.5\cdot q^2 + 0.9\cdot q
\end{aligned}$$

El orden del polinomio $A(q)$ es n=3 y el del polinomio $B(q)$ es m=1. Luego d=3-1=2. $B(q)$ y C(q) son estables. Dividiendo $q^{d-1}\cdot C(q)$ entre $A(q)$ se obtiene:

$$\begin{array}{rl|l}
q^4 + 1.5\cdot q^3 + 0.9\cdot q^2 & & q^3 - 1.7\cdot q^2 + 0.7\cdot q \\ \cline{3-3}
-q^4 + 1.7\cdot q^3 - 0.7\cdot q^2 & & q + 3.2 \\ \cline{1-1}
3.2\cdot q^3 + 0.2\cdot q^2 & & \\
-3.2\cdot q^3\,`+5.44\cdot q^2 & - 2.24\cdot q & \\ \hline
5.64\cdot q^2 & - 2.24\cdot q &
\end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned}
F(q) &= q + 3.2 \\
G(q) &= 5.64\cdot q^2 - 2.24\cdot q
\end{aligned}$$

El *predictor de varianza mínima* sobre 2 pasos es:

$$\hat{y}(k+2\,|\,k) = \frac{q\cdot G(q)}{C(q)}\cdot y_k = \frac{5.64\cdot q^3 - 2.24\cdot q^2}{q^3 + 1.5\cdot q^2 + 0.9\cdot q}\cdot y_k$$

El *controlador de varianza mínima* es:

$$u_k = -\frac{G(q)}{B(q)\cdot F(q)}\cdot y_k = -\frac{(5.64\cdot q^3 - 2.24\cdot q^2)}{(q+0.5)\cdot(q+3.2)}\cdot y_k$$

La salida del sistema controlado es:

$$y_k = F^*(q^{-1})\cdot e_k = (1 + 3.2\cdot q^{-1})\cdot e_k = e_k + 3.2\cdot e_{k-1}$$

La varianza de la salida es:

$$E[y_k^2] = E[(e_k + 3.2 \cdot e_{k-1}) \cdot (e_k + 3.2 \cdot e_{k-1})] =$$
$$= E[e_k^2] + 3.2 \cdot E[e_k \cdot e_{k-1}] + 3.2 \cdot E[e_{k-1} \cdot e_k] + 10.24 \cdot E[e_{k-1}^2]$$

Puesto que {e_k} es una secuencia de variables aleatorias independientes entonces $E[e_k \cdot e_{k-1}]=0$ y como su varianza es $E[e^2_k]=\sigma^2$ se obtiene el siguiente resultado

$$E[y_k^2] = 11.24 \cdot \sigma^2$$

♦

♦ Solución problema 9.8

a) En primer lugar, hay que obtener la expresión de la salida en lazo cerrado, para ello hay que sustituir la expresión $u(k) = -K \cdot y(k)$ en la ecuación del sistema y reordenar términos:

$$y_k + (K - 0.25) \cdot y_{k-1} + 0.5 \cdot y_{k-2} = e_k + 0.5 \cdot e_{k-1}$$

Equivalentemente este proceso puede expresarse en la forma:

$$y_k \cdot [1 + (K - 0.25) \cdot q^{-1} + 0.5 \cdot q^{-2}] = e_k \cdot [1 + 0.5 \cdot q^{-1}]$$

O en la forma:

$$y_k = \frac{q^2 + 0.5 \cdot q}{q^2 + (K - 0.25) \cdot q + 0.5} e_k$$

Puesto que se la salida se obtiene mediante el filtrado de ruido blanco,

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)} \cdot e(k)$$

entonces la varianza de la salida, se puede obtener usando la fórmula propuesta en la sección 3.5.4 de los apuntes:

$$E[y_k^2] = \frac{B_0 \cdot a_0 \cdot e_1 - B_1 \cdot a_0 \cdot a_1 + B_2 \cdot (a_1^2 - a_2 \cdot e_1)}{a_0 \cdot [(a_0^2 - a_2^2) \cdot e_1 - (a_0 \cdot a_1 - a_1 \cdot a_2) \cdot a_1]}$$

donde

$$
\begin{aligned}
B_0 &= b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 \\
B_1 &= 2\cdot(b_0\cdot b_1 + b_1\cdot b_2) \\
B_2 &= 2\cdot b_0\cdot b_2 \\
e_1 &= a_0 + a_2
\end{aligned}
$$

En este caso:

$$
\begin{aligned}
B(q) &= q^2 + 0.5\cdot q \\
A(q) &= q^2 + (K - 0.25)\cdot q + 0.5
\end{aligned}
$$

Luego: b_0=1, b_1=0.5, b_2=0, a_0=1, a_1=K-0.25 y a_2=0.5.

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
B_0 &= 1^2 + 0.5^2 + 0^2 = 1.25 \\
B_1 &= 2\cdot(b_0\cdot b_1 + b_1\cdot b_2) = 2\cdot b_1\cdot(b_0 + b_2) = 2\cdot 0.5\cdot(1+0) = 1 \\
B_2 &= 2\cdot b_0\cdot b_2 = 2\cdot 1\cdot 0 = 0 \\
e_1 &= a_0 + a_2 = 1 + 0.5 = 1.5
\end{aligned}
$$

Sustituyendo valores en la expresión de la varianza de la salida y operando se obtiene

$$
E[y_k^2] = \frac{2.125 - K}{1.125 - 0.5\cdot(K - 0.25)^2}
$$

Desarrollando el cuadrado del denominador y reordenando términos se obtiene:

$$
E[y_k^2] = \frac{2.125 - K}{0.5\cdot[-K^2 + 0.5\cdot K + 2.1875]}
$$

Y descomponiendo en factores, se obtiene la expresión:

$$
E[y_k^2] = \frac{2.125 - K}{0.5\cdot(1.75 - K)\cdot(1.25 + K)}
$$

Tal y como se pedía demostrar.

b) Equivalentemente el proceso del enunciado puede expresarse en la forma:

$$
y_k\cdot[1 - 0.25\cdot q^{-1} + 0.5\cdot q^{-2}] = u_k\cdot[q^{-1}] + e_k\cdot[1 + 0.5\cdot q^{-1}]
$$

O en la forma:

$$y_k \cdot [q^2 - 0.25 \cdot q + 0.5] = u_k \cdot [q] + e_k \cdot [q^2 + 0.5 \cdot q]$$

Comparando con un proceso cuya forma general es

$$A(q) \cdot y_k = B(q) \cdot u_k + C(q) \cdot e_k$$

se obtiene

$$A(q) = q^2 - 0.25 \cdot q + 0.5$$
$$B(q) = q$$
$$C(q) = q^2 + 0.5 \cdot q$$

El orden del polinomio *A*(*q*) es *n*=2 y el del polinomio *B*(*q*) es *m*=1. Luego *d*=n-m=1. *B*(*q*) y C(q) son estables.

Dividiendo $q^{d-1} \cdot C(q)$ entre *A*(*q*) se obtiene:

$$\begin{array}{r|l} q^2 + 0.5 \cdot q & q^2 - 0.25 \cdot q + 0.5 \\ \cline{2-2} -q^2 + 0.25 \cdot q - 0.5 & 1 \\ \hline 0.75 \cdot q - 0.5 & \end{array}$$

Luego

$$F(q) = 1$$
$$G(q) = 0.75 \cdot q - 0.5$$

El *controlador de varianza mínima* es:

$$u_k = -\frac{G(q)}{B(q) \cdot F(q)} \cdot y_k = -\frac{0.75 \cdot q - 0.5}{q} \cdot y_k$$

La salida del sistema controlado es:

$$y_k = F^*(q^{-1}) \cdot e_k = 1 \cdot e_k = e_k$$

Luego la varianza de la salida es:

$$E[y_k^2] = E[e_k^2] = \sigma^2 = 1$$

c) La paradoja se produce porque usando un controlador proporcional con *K*=2.125 se obtiene una varianza 0 para la salida del sistema. Lo cual entra en contradicción con la varianza 1 que se obtiene utilizando el controlador de varianza mínima. La explicación de esta paradoja es que la expresión para la varianza dada en el apartado a) únicamente es válida si el sistema en lazo cerrado

$$y_k = \frac{q^2 + 0.5 \cdot q}{q^2 + (K - 0.25) \cdot q + 0.5} e_k$$

es estable, ya que de lo contrario la salida no sería un proceso estacionario y se estarían violando las condiciones del *Teorema de factorización espectral* en el que se basa la metodología expuesta en la sección 3.5.4 para calcular la varianza de la salida.

El denominador para *K*=2.125 es

$$q^2 + 1.875 \cdot q + 0.5$$

Sus raíces son: z=-1.5531 y z=-0.3219. Se observa que existe una raíz (z=-1.5531) fuera del círculo unidad luego el sistema es inestable. En consecuencia la expresión

$$E[y_k^2] = \frac{2.125 - K}{0.5 \cdot (1.75 - K) \cdot (1.25 + K)}$$

no se puede usar para calcular el valor de la varianza de la salida si *K*=2.125.

♦

♦ Solución problema 9.9

Equivalentemente el proceso del enunciado puede expresarse en la forma:

$$y_k \cdot [1 - 0.3 \cdot q^{-1}] = u_k \cdot [q^{-2}] + e_k \cdot [1 - 0.5 \cdot q^{-1}]$$

O en la forma:

$$y_k \cdot [q^2 - 0.3 \cdot q] = u_k + e_k \cdot [q^2 - 0.5 \cdot q]$$

Comparando con un proceso cuya forma general es

$$A(q) \cdot y_k = B(q) \cdot u_k + C(q) \cdot e_k$$

se obtiene

$$\begin{aligned} A(q) &= q^2 - 0.3 \cdot q \\ B(q) &= 1 \\ C(q) &= q^2 - 0.5 \cdot q \end{aligned}$$

El orden del polinomio *A*(*q*) es *n*=2 y el del polinomio *B*(*q*) es *m*=0. Luego *d*=n-m=2. *B*(*q*) y C(q) son estables.

Para obtener el predictor óptimo de la salida sobre *d*=2 pasos, primero hay que dividir $q^{d-1}\cdot C(q)$ entre $A(q)$:

$$
\begin{array}{l|l}
\quad q^3 - 0.5\cdot q^2 & q^2 - 0.3\cdot q \\ \cline{2-2}
\underline{-q^3 + 0.3\cdot q^2} & q - 0.2 \\
\qquad -0.2\cdot q^2 & \\
\qquad \underline{0.2q^2 - 0.06\cdot q} & \\
\qquad\qquad -0.06\cdot q &
\end{array}
$$

Con lo que

$$
\begin{aligned}
F(q) &= q - 0.2 \\
G(q) &= -0.06\cdot q
\end{aligned}
$$

Luego

$$\hat{y}(k+2\,|\,k) = \frac{q\cdot G(q)}{C(q)}\cdot y_k = \frac{-0.06\cdot q^2}{q^2 - 0.5\cdot q}\cdot y_k$$

b) El *controlador de varianza mínima* es:

$$u_k = -\frac{G(q)}{B(q)\cdot F(q)}\cdot y_k = \frac{0.06\cdot q}{q - 0.2}\cdot y_k$$

c) La salida del sistema controlado es:

$$y_k = F^*(q^{-1})\cdot e_k = (1 - 0.2\cdot q^{-1})\cdot e_k = e_k - 0.2\cdot e_{k-1}$$

d) La varianza de la salida es:

$$
\begin{aligned}
E[y_k^2] &= E[(e_k - 0.2\cdot e_{k-1})\cdot(e_k - 0.2\cdot e_{k-1})] = \\
&= E[e_k^2] - 0.2\cdot E[e_k\cdot e_{k-1}] - 0.2\cdot E[e_{k-1}\cdot e_k] + 0.04\cdot E[e_{k-1}^2]
\end{aligned}
$$

Puesto que $\{e_k\}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes entonces $E[e_k\cdot e_{k-1}]=0$ y como su varianza es $E[e^2_k]=\sigma^2$ se obtiene el siguiente resultado

$$E[y_k^2] = 1.04\cdot\sigma^2 = 1.04$$

♦

♦ Solución problema 9.10

Equivalentemente este proceso puede expresarse en la forma:

$$y_k\cdot[1+aq^{-1}] = u_k\cdot[b\cdot q^{-1}] + e_k\cdot[1+c\cdot q^{-1}]\cdot[1+aq^{-1}]$$

$$y_k\cdot[1+aq^{-1}] = u_k\cdot[b\cdot q^{-1}] + e_k\cdot[1+(a+c)\cdot q^{-1} + a\cdot c\cdot q^{-2}]$$

O en la forma:

$$y_k\cdot[q^2 + a\cdot q] = u_k\cdot[b\cdot q] + e_k\cdot[q^2 + (a+c)\cdot q + a\cdot c]$$

Comparando con un proceso cuya forma general es

$$A(q)\cdot y_k = B(q)\cdot u_k + C(q)\cdot e_k$$

se obtiene

$$\begin{aligned} A(q) &= q^2 + a\cdot q \\ B(q) &= b\cdot q \\ C(q) &= q^2 + (a+c)\cdot q + a\cdot c \end{aligned}$$

El orden del polinomio *A*(*q*) es *n*=2 y el del polinomio *B*(*q*) es *m*=1. Luego *d*=n-m=1. Se supone que tanto *B*(*q*) como *C*(*q*) son estables.

Hay que dividir $q^{d-1}\cdot C(q)$ entre *A*(*q*)

$$\begin{array}{r|l} q^2 + (a+c)\cdot q + a\cdot c & q^2 + a\cdot q \\ \cline{2-2} -q^2 - a\cdot q \qquad\qquad & 1 \\ \hline c\cdot q + a\cdot c & \end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned} F(q) &= 1 \\ G(q) &= c\cdot q + a\cdot c \end{aligned}$$

Con lo que el controlador de varianza mínima es:

$$u_k = -\frac{G(q)}{B(q)\cdot F(q)}\cdot y_k = -\frac{c\cdot(q+a)}{b\cdot q}\cdot y_k$$

♦

♦ Solución problema 9.11

Equivalentemente el proceso del enunciado puede expresarse en la forma:

$$y_k \cdot [1 - 0.2 \cdot q^{-1} + 0.6 \cdot q^{-2}] = u_k \cdot [2 \cdot q^{-1} - 0.8 \cdot q^{-2}] + e_k \cdot [1 + 0.2 \cdot q^{-1}]$$

O en la forma:

$$y_k \cdot [q^2 - 0.2 \cdot q + 0.6] = u_k \cdot [2 \cdot q - 0.8] + e_k \cdot [q^2 + 0.2 \cdot q]$$

Comparando con un proceso cuya forma general es

$$A(q) \cdot y_k = B(q) \cdot u_k + C(q) \cdot e_k$$

se obtiene

$$\begin{aligned} A(q) &= q^2 - 0.2 \cdot q + 0.6 \\ B(q) &= 2 \cdot q - 0.8 \\ C(q) &= q^2 + 0.2 \cdot q \end{aligned}$$

El orden del polinomio $A(q)$ es n=2 y el del polinomio $B(q)$ es m=1. Luego d=n-m=1. $B(q)$ y $C(q)$ son estables.

a) Para obtener el predictor óptimo de la salida sobre d=1 paso, primero hay que dividir $q^{d-1} \cdot C(q)$ entre $A(q)$:

$$\begin{array}{r|l} q^2 + 0.2 \cdot q & q^2 - 0.2 \cdot q + 0.6 \\ \cline{2-2} -q^2 + 0.2 \cdot q - 0.6 & 1 \\ \cline{1-1} 0.4 \cdot q - 0.6 & \end{array}$$

Con lo que

$$\begin{aligned} F(q) &= 1 \\ G(q) &= 0.4 \cdot q - 0.6 \end{aligned}$$

Luego

$$\hat{y}(k+1 \mid k) = \frac{q \cdot G(q)}{C(q)} \cdot y_k = \frac{0.4 \cdot q^2 - 0.6 \cdot q}{q^2 + 0.2 \cdot q} \cdot y_k$$

b) El *controlador de varianza mínima* es:

$$u_k = -\frac{G(q)}{B(q)\cdot F(q)}\cdot y_k = -\frac{0.4\cdot q - 0.6}{2\cdot q - 0.8}\cdot y_k$$

c) La función de transferencia en lazo cerrado es

$$y_k = F^*(q^{-1})\cdot e_k = 1\cdot e_k = e_k$$

Es decir, es una ganancia unidad.

d) La varianza de la salida en la lazo cerrado:

$$E[y_k^2] = E[e_k^2] = \sigma^2$$

Para calcular la varianza de la salida en lazo abierto se supone que la señal de control u_k es determinista y en consecuencia no influye en el cálculo de la varianza. Luego la ecuación del sistema que se debe considerar es

$$y_k \cdot [q^2 - 0.2\cdot q + 0.6] = e_k \cdot [q^2 + 0.2\cdot q]$$

Que es equivalente a

$$y_k = \frac{q^2 + 0.2\cdot q}{q^2 - 0.2\cdot q + 0.6}\cdot e_k$$

Si se compara con

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}\cdot e(k)$$

entonces

$$B(q) = q^2 + 0.2\cdot q$$
$$A(q) = q^2 - 0.2\cdot q + 0.6$$

El numerador *B*(*q*) tiene sus ceros (*z*=0 y *z*=-0.2) dentro del círculo unidad. Asimismo las raíces del denominador *A(q)* son *z*= 0.1±j·0.77 que están dentro del círculo unidad. En consecuencia es posible utilizar la siguiente fórmula (ver sección 3.5.4) para calcular la varianza de la salida:

$$E[y_k^2] = \frac{B_0\cdot a_0\cdot e_1 - B_1\cdot a_0\cdot a_1 + B_2\cdot(a_1^2 - a_2\cdot e_1)}{a_0\cdot[(a_0^2 - a_2^2)\cdot e_1 - (a_0\cdot a_1 - a_1\cdot a_2)\cdot a_1]}\sigma^2$$

donde

$$\begin{aligned} B_0 &= b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 \\ B_1 &= 2\cdot(b_0\cdot b_1 + b_1\cdot b_2) \\ B_2 &= 2\cdot b_0\cdot b_2 \\ e_1 &= a_0 + a_2 \end{aligned}$$

De los coeficientes de los polinomios $B(q)$ y $A(q)$ se obtiene que: b_0=1, b_1=0.2, b_2=0, a_0=1, a_1=-0.2 y a_2=0.6. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1^2 + 0.2^2 + 0^2 = 1.04 \\ B_1 &= 2\cdot(b_0\cdot b_1 + b_1\cdot b_2) = 2\cdot b_1\cdot(b_0 + b_2) = 2\cdot 0.2\cdot(1+0) = 0.4 \\ B_2 &= 2\cdot b_0\cdot b_2 = 2\cdot 1\cdot 0 = 0 \\ e_1 &= a_0 + a_2 = 1 + 0.6 = 1.6 \end{aligned}$$

Sustituyendo valores en la expresión de la varianza de la salida

$$E[y_k^2] = \frac{1.04\cdot 1.6 + 0.4\cdot 0.2}{[(1-0.6^2)\cdot 1.6 - (1-0.6)\cdot 0.2^2]}\cdot\sigma^2$$

y operando se obtiene

$$E[y_k^2] = \frac{1.664 + 0.08}{1.024 - 0.016}\cdot\sigma^2 = 1.73\cdot\sigma^2$$

♦

♦ Solución problema 9.12

a) Equivalentemente el proceso del enunciado puede expresarse en la forma:

$$y_k\cdot[1 - 0.9\cdot z^{-1}] = u_k + e_k\cdot[1 - 0.5\cdot z^{-1}]$$

O en la forma:

$$y_k\cdot[z - 0.9] = u_k\cdot z + e_k\cdot[z - 0.5]$$

Comparando con un proceso cuya forma general es

$$A(z)\cdot y_k = B(z)\cdot u_k + C(z)\cdot e_k$$

se obtiene

$$A(z) = z - 0.9$$
$$B(z) = z$$
$$C(z) = z - 0.5$$

El orden de los polinomios A(z) y C(z) es deg(A)=deg(C)=*n*=1 y deg(B)=1. Además A y B no poseen ningún factor común. Además los recíprocos de estos polinomios son:

$$A^*(z) = z^{\deg A} \cdot A(z^{-1}) = z \cdot (z^{-1} - 0.9) = 1 - 0.9 \cdot z$$
$$B^*(z) = z^{\deg B} \cdot B(z^{-1}) = z \cdot z^{-1} = 1$$
$$C^*(z) = z^{\deg C} \cdot C(z^{-1}) = z \cdot (z^{-1} - 0.5) = 1 - 0.5 \cdot z$$

<u>*Paso 1*</u>: Para obtener el controlador LQG en primer lugar hay que obtener un polinomio *P*(*z*) mónico de grado *n=1* cuyas raíces se encuentran todas dentro del círculo unidad y que es solución de la ecuación de Riccati:

$$r \cdot P(z) \cdot P(z^{-1}) = \rho \cdot A(z) \cdot A(z^{-1}) + B(z) \cdot B(z^{-1})$$

Luego:

$$r \cdot (z + p_1) \cdot (z^{-1} + p_1) = \rho \cdot (z - 0.9) \cdot (z^{-1} - 0.9) + z \cdot z^{-1}$$

Operando se obtiene

$$r \cdot (1 + p_1^2) + r \cdot p_1 \cdot (z^{-1} + z) = (1.81 \cdot \rho + 1) - 0.9 \cdot \rho (z^{-1} + z)$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de *z* se obtienen el siguiente par de ecuaciones:

$$r \cdot p_1 = -0.9\rho \qquad (1)$$

$$r \cdot (1 + p_1^2) = 1.81 \cdot \rho + 1 \qquad (2)$$

De (1) se obtiene

$$r = \frac{-0.9 \cdot \rho}{p_1} \qquad (3)$$

Y sustituyendo (3) en (2) se obtiene la siguiente ecuación de segundo orden para p_1:

$$p_1^2 + \frac{1.81\rho \cdot +1}{0.9 \cdot \rho} \cdot p_1 + 1 = 0$$

La solución de esta ecuación que garantiza que $P(z)$ está dentro del círculo unidad ($|p_1|<1$) es:

$$p_1 = \frac{-\frac{1.81\rho\cdot+1}{0.9\cdot\rho} + \sqrt{\left(\frac{1.81\rho\cdot+1}{0.9\cdot\rho}\right)^2 - 4}}{2} \tag{4}$$

Paso 2: En segundo lugar, hay que calcular el polinomio $S(z)$ a partir de la ecuación:

$$A^*(z)\cdot X(z) + r\cdot P(z)\cdot S^*(z) = B(z)\cdot C^*(z)$$

Puesto que la ecuación del sistema posee un término u_k entonces deg(S)=n=1. Luego:

$$S(z) = s_0\cdot z + s_1$$

Su reciproco es:

$$S^*(z) = z^{\deg S}\cdot S(z^{-1}) = z\cdot(s_0\cdot z^{-1} + s_1) = s_0 + s_1\cdot z$$

Por otra parte deg(X)<n, luego

$$X(z) = x_0$$

Sustituyendo los polinomios A*(z), X(z), P(z), S*(z), B(z) y C*(z) se obtiene

$$(1 - 0.9\cdot z)\cdot x_0 + r\cdot(z + p_1)\cdot(s_0 + s_1\cdot z) = z\cdot(1 - 0.5\cdot z)$$

Multiplicando los factores y reordenando términos se obtiene

$$r\cdot s_1\cdot z^2 + (-0.9\cdot x_0 + r\cdot s_0 + r\cdot p_1)\cdot z + (x_0 + r\cdot p_1\cdot s_0) = -0.5\cdot z^2 + z$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de z se obtienen tres ecuaciones:

$$\begin{cases} r\cdot s_1 = -0.5 \\ -0.9\cdot x_0 + r\cdot s_0 + r\cdot p_1 = 1 \\ x_0 + r\cdot p_1\cdot s_0 = 0 \end{cases}$$

Resolviéndolas se obtiene:

$$s_1 = \frac{-0.5}{r} \tag{5}$$

$$s_0 = \frac{1 - r \cdot p_1}{r \cdot (1 + 0.9 p_1)} \tag{6}$$

$$x_0 = -r \cdot p_1 \cdot s_0 = -\frac{p_1 (1 - r \cdot p_1)}{(1 + 0.9 p_1)} \tag{7}$$

<u>Paso 3</u>: En tercer lugar hay que determinar el polinomio *R*(*z*) a partir de la ecuación

$$P^*(z) \cdot X(z) + \rho \cdot A(z) \cdot S^*(z) = R^*(z) \cdot B(z)$$

El grado del polinomio *R*(*z*) es deg(*R*)=n=1. Se supone que su estructura es:

$$R(z) = r_0 \cdot z + r_1$$

Luego su polinomio reciproco es:

$$R^*(z) = z^{\deg R} \cdot R(z^{-1}) = z \cdot (r_0 \cdot z^{-1} + r_1) = r_0 + r_1 \cdot z$$

Luego la ecuación toma la forma:

$$(1 + p_1 \cdot z) \cdot x_0 + \rho \cdot (z - 0.9) \cdot (s_0 + s_1 \cdot z) = (r_0 + r_1 \cdot z) \cdot z$$

Multiplicando los factores y reordenando términos se obtienen

$$\rho \cdot s_1 \cdot z^2 + [p_1 \cdot x_0 + \rho \cdot (s_0 - 0.9 \cdot s_1)] \cdot z + [x_0 - 0.9 \cdot s_0 \cdot \rho] = r_1 \cdot z^2 + r_0 \cdot z$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de z se obtienen directamente las expresiones de r_1 y r_0, en función de variables ya conocidas.

$$r_1 = \rho \cdot s_1 \tag{8}$$

$$r_0 = p_1 \cdot x_0 + \rho \cdot (s_0 - 0.9 \cdot s_1) \tag{9}$$

<u>Paso 4</u>: Finalmente la ley de control LQG viene dada

$$u_k = -\frac{S(q)}{R(q)} \cdot y_k = -\frac{s_0 \cdot z + s_1}{r_0 \cdot z + r_1} \cdot y_k$$

b) Si ρ=1, entonces:

$$p_1 = \frac{-\dfrac{1.81+1}{0.9} + \sqrt{\left(\dfrac{1.81 \cdot +1}{0.9}\right)^2 - 4}}{2} = \frac{-3.12 + \sqrt{5.73}}{2} = -0.36$$

$$r = \frac{-0.9}{p_1} = \frac{-0.9}{-0.36} = 2.5$$

$$s_1 = \frac{-0.5}{r} = \frac{-0.5}{2.5} = 1$$

$$s_0 = \frac{1 - r \cdot p_1}{r \cdot (1 + 0.9 p_1)} = \frac{1 - 2.5 \cdot (-0.36)}{2.5 \cdot (1 + 0.9 \cdot (-0.36))} = \frac{1 + 0.9}{2.5 \cdot (1 - 0.32)} = \frac{1.9}{1.7} = 1.12$$

$$x_0 = -r \cdot p_1 \cdot s_0 = -2.5 \cdot (-0.36) \cdot 1.12 = 1.01$$

$$r_1 = s_1 = 1$$

$$r_0 = p_1 \cdot x_0 + (s_0 - 0.9 \cdot s_1) = -0.36 \cdot 1.01 + (1.12 - 0.9) = -0.14$$

Luego el control LQG es:

$$u_k = -\frac{s_0 \cdot z + s_1}{r_0 \cdot z + r_1} = -\frac{1 + 1.12 \cdot z}{1 - 0.14 \cdot z} \cdot y_k$$

♦

SOLUCION DE LOS PROBLEMAS
TEMA 10: Control robusto QFT

♦ Solución problema 10.1

Considérese el caso extremo de la expresión asociado a la especificación de estabilidad robusta

$$\left| \frac{L(j \cdot \omega)}{1 + L(j \cdot \omega)} \right| = W_{er} \tag{1}$$

La función de trasferencia en lazo abierto $L(s)$ puede expresarse equivalentemente en la forma módulo-argumento

$$L(j\omega) = |L(j\omega)| \cdot e^{j \arg L(j\omega)}$$

Se define la frecuencia del margen de ganancia ω_c como aquella en la que se verifica que

$$\arg L(j\omega_c) = 180^\circ$$

Luego en dicha frecuencia

$$L(j\omega_c) = -|L(j\omega_c)|$$

Sustituyendo esta expresión en (1) se obtiene:

$$\frac{|L(j\omega_c)|}{1 - |L(j\omega_c)|} = W_{er}$$

que equivalentemente se puede expresar, como

$$\frac{1}{\dfrac{1}{|L(j\omega_c)|} - 1} = W_{er} \tag{2}$$

Se define el margen de ganancia MG como

$$MG = \frac{1}{|L(j\omega_c)|}$$

Luego (2) se puede expresar como:

$$\frac{1}{MG-1}=W_{er}$$

Finalmente despejando MG se obtiene:

$$MG=1+\frac{1}{W_{er}}$$

Tal y como se quería demostrar.

Se define la frecuencia de corte o frecuencia del margen de fase ω_{ϕ} como aquella en la que se verifica que

$$\left|L(j\omega_{\phi})\right|=1$$

Luego

$$L(j\omega_{\phi})=e^{j\arg L(j\omega_{\phi})}$$

Sustituyendo esta expresión en (1) se obtiene

$$\left|\frac{e^{j\cdot\phi}}{1+e^{j\cdot\phi}}\right|=\frac{1}{\left|1+e^{j\cdot\phi}\right|}=W_{er}$$

Sustituyendo en la expresión anterior

$$e^{j\cdot\phi}=\cos\phi+j\cdot\sin\phi$$

y operando se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2+2\cdot\cos\phi}}=W_{er}$$

Elevando al cuadrado y despejando ϕ se obtiene:

$$\phi=\operatorname{acos}\left(\frac{0.5}{W_{er}^{2}}-1\right)$$

Pasándolo a grados se obtiene:

$$\phi = \frac{180}{\pi}\operatorname{acos}\left(\frac{0.5}{W_{er}^2} - 1\right)$$

El margen de fase MF se define como:

$$MF = 180^{\circ} - \phi$$

Sustituyendo en esta expresión el valor de ϕ se obtiene finalmente:

$$MF = 180^{\circ} - \frac{180^{\circ}}{\pi}\operatorname{acos}\left(\frac{0.5}{W_{er}^2} - 1\right)$$

Tal y como se quería demostrar.

♦

♦ Solución problema 10.2

El margen de fase *MF* y el margen de ganancia *MG* se relacionan con W_{er} a través de las siguientes expresiones:

$$W_{er} = \sqrt{\frac{0.5}{\cos\left(\pi \cdot \left(1 - \frac{MF}{180^{\circ}}\right)\right) + 1}} \quad (1)$$

$$W_{er} = \frac{1}{MG - 1} \quad (2)$$

a) Sustituyendo *MF*=30º en (1) se obtiene W_{er}=1.93.

b) Sustituyendo *MF*=75º en (1) se obtiene W_{er}=0.82.

c) Sustituyendo *MG*=1.9 en (2) se obtiene W_{er}= 1.11.

d) Pasando *MG*=10 dB a unidades aritméticas se obtiene *MG*=3.1623, sustituyendo este valor en (2) se obtiene W_{er}=0.46.

♦

♦ Solución problema 10.3

El margen de fase *MF* y el margen de ganancia *MG* se relacionan con W_{er} a través de las siguientes expresiones:

$$MG = 1 + \frac{1}{\mathrm{W_{er}}} \tag{1}$$

$$MF = 180^{\circ} - \frac{180^{\circ}}{\pi}\,\mathrm{acos}\left(\frac{0.5}{W_{er}^2} - 1\right) \tag{2}$$

a) Sustituyendo W_{er}=1.1 en (1) y en (2) se obtiene MG=1.91 y MF=54.07º.

b) Sustituyendo W_{er}=1.5 en (1) y en (2) se obtiene MG=1.67 y MF=38.94º.

c) Sustituyendo W_{er}=2.0 en (1) y en (2) se obtiene MG=1.5 y MF=28.9º.

♦

♦ Solución problema 10.4

a) Los coeficientes del numerador y del denominador de P(s) se pueden expresar en forma matricial

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0 & 2.3 \\ -1.5 & 0 & 2.3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9.6 \\ 3.6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.9 \\ -10 & 6.2 & 1 \\ -0.2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5.3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comparando con las expresiones

$$b = MN \cdot q + n_0$$

$$a = MD \cdot r + d_0$$

se obtiene

$$MN=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1.5 & 0 & 2.3\\ -1.5 & 0 & 2.3 & 0\end{bmatrix} \; n_0=\begin{bmatrix}9.6\\ 3.6\\ 0\end{bmatrix} \; MD=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2.9\\ -10 & 6.2 & 1\\ -0.2 & 1 & 0\end{bmatrix} \; d_0=\begin{bmatrix}-5.3\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

d) En este caso para no confundirse con la notación de las expresiones:

$$b = MN\cdot q + n_0$$

$$a = MD\cdot r + d_0$$

conviene expresar la planta de la siguiente forma:

$$P(s)=\frac{q_2\cdot s^2+q_0}{s^3+r_1\cdot s+r_0}$$

Los coeficientes del numerador y del denominador de P(s) se pueden expresar en forma matricial

$$\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

Luego

$$MN=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \; n_0=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \; MD=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \; d_0=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

♦

♦ Solución problema 10.5

a) La planta se puede expresar de la siguiente forma:

$$P(j\cdot\omega)=\frac{1}{(j\cdot\omega)^2+2\cdot\delta\cdot\omega_n(j\cdot\omega)+\omega_n^2}=\frac{1}{(\omega_n^2-\omega^2)+j\cdot 2\cdot\delta\cdot\omega_n\cdot\omega}=\frac{(\omega_n^2-\omega^2)-j\cdot 2\cdot\delta\cdot\omega_n\cdot\omega}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+\left(2\cdot\delta\cdot\omega_n\cdot\omega\right)^2}$$

El módulo en dB y la fase en grados son:

$$\left|P(j\omega)\right|_{dB} = -20 \cdot \log_{10}\left(\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot \omega\right)^2}\right)$$

$$\arg[P(\mathrm{j}\omega)] = -\frac{180}{\pi}\arctan\left(\frac{2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot \omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

Para ω=1 rad/s estas expresiones toman la siguiente forma:

$$\left|P(j \cdot 1)\right|_{dB} = -20 \cdot \log_{10}\left(\sqrt{(\omega_n^2 - 1)^2 + \left(2 \cdot \delta \cdot \omega_n\right)^2}\right) \quad (1)$$

$$\arg[P(\mathrm{j} \cdot 1)] = -\frac{180}{\pi}\arctan\left(\frac{2 \cdot \delta \cdot \omega_n}{\omega_n^2 - 1}\right) \quad (2)$$

En la siguiente tabla se muestran los puntos de las plantillas $\mathcal{T}(1)$ que se obtienen sustituyendo las posibles combinaciones de los valores de δ y ω_n propuestos en el enunciado en las ecuaciones (1) y (2)

δ	ω_n	**arg[P(j1)] (º)**	**$\|P(j1)\|_{dB}$**
0.5	1	-90	0
0.5	2	-90	-1.5836
0.5	3	-90	-2.9226
0.5	4	-90	-4.0824
0.6	1	-33.69	-11.139
0.6	2	-20.556	-18.633
0.6	3	-14.931	-23.82
0.6	4	-38.66	-11.691
0.7	1	-24.228	-18.863
0.7	2	-17.745	-23.945
0.7	3	-43.025	-12.263
0.7	4	-27.699	-19.119
0.8	1	-20.472	-24.089
0.8	2	-46.848	-12.842
0.8	3	-30.964	-19.397
0.8	4	-23.106	-24.248

b) El punto nominal se obtiene sustituyendo δ=0.5 y ω_n=1.5 en las ecuaciones (1) y (2):

$$(\arg[P(\mathrm{j} \cdot 1)], \left|P_0(j \cdot 1)\right|_{dB}) = (\text{-50.194º}, \text{-5.8121 dB})$$

c)

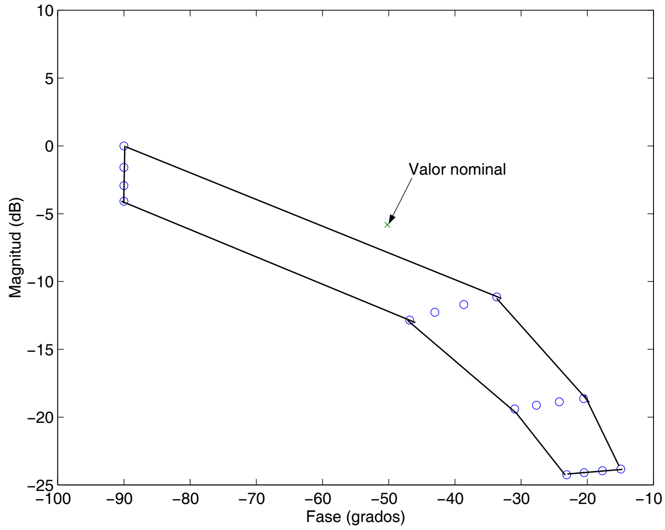


Figura 7

En la Figura 7 se observa que el punto nominal queda fuera del contorno de la plantilla. Esto es así porque la aproximación de la plantilla que se ha calculado mediante el método del barrido en el espacio de parámetros no es lo suficientemente buena. Para mejorarla se debe aumentar el número de puntos a considerar para el parámetro ω_n, ya que de acuerdo con la tabla es el parámetro que permite trazar longitudinalmente la forma de la plantilla. Por ejemplo considerando que ω_n={1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4} se obtendría la aproximación de la plantilla y el contorno que se muestra en la Figura 8. Se observa que ahora sí el punto nominal queda comprendido dentro del contorno.

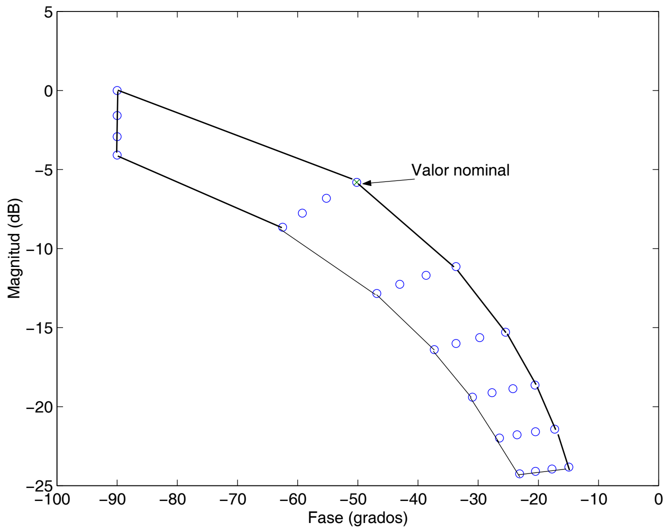


Figura 8

♦

♦ Solución problema 10.6

a) La planta se puede expresar de la siguiente forma:

$$P(j\cdot\omega)=\frac{e^{-\tau\cdot j\cdot\omega}}{j\cdot\omega+a}=\frac{e^{-\tau\cdot j\cdot\omega}}{\left(\sqrt{\omega^2+a^2}\right)e^{-j\cdot\mathrm{atan}\left(\frac{\omega}{a}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+a^2}}\cdot e^{-\cdot j\cdot\left(\tau\cdot\omega+\mathrm{a\,rctan}\left(\frac{\omega}{a}\right)\right)}$$

El módulo en dB y la fase en grados son:

$$\left|P(j\omega)\right|_{dB}=-20\cdot\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2+a^2}}\right)$$

$$\arg[P(\mathrm{j}\omega)]=-\frac{180}{\pi}\cdot\left(\tau\cdot\omega+\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)\right)$$

Para ω=2.5 rad/s estas expresiones toman la siguiente forma:

$$\left|P(j\cdot 2.5)\right|_{dB}=-20\cdot\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{6.25+a^2}}\right) \qquad (1)$$

$$\arg[P(\mathrm{j}\cdot 2.5)]=-\frac{180}{\pi}\cdot\left(\tau\cdot\omega+\arctan\left(\frac{2.5}{a}\right)\right) \qquad (2)$$

En la siguiente tabla se muestran los puntos de las plantillas $\mathcal{T}(2.5)$ que se obtienen sustituyendo las posibles combinaciones de los valores de δ y ω_n propuestos en el enunciado en las ecuaciones (1) y (2)

a	τ	arg[P(j·2.5)] (º)	$\lvert P(j\cdot 2.5)\rvert_{dB}$
1	1	-211.44	-8.6034
1	2.5	-426.3	-8.6034
1	5	-784.4	-8.6034
1	10	-1500.6	-8.6034
2.25	1	-191.25	-10.536
2.25	2.5	-406.11	-10.536
2.25	5	-764.21	-10.536
2.25	10	-1480.4	-10.536
3.75	1	-176.93	-13.078
3.75	2.5	-391.79	-13.078
3.75	5	-749.89	-13.078
3.75	10	-1466.1	-13.078
5	1	-169.8	-14.949
5	2.5	-384.66	-14.949
5	5	-742.76	-14.949
5	10	-1459	-14.949

b) En la Figura 9 se han dibujado la aproximación de la plantilla $\mathcal{T}(2.5)$ y su contorno $\delta\mathcal{T}(2.5)$.

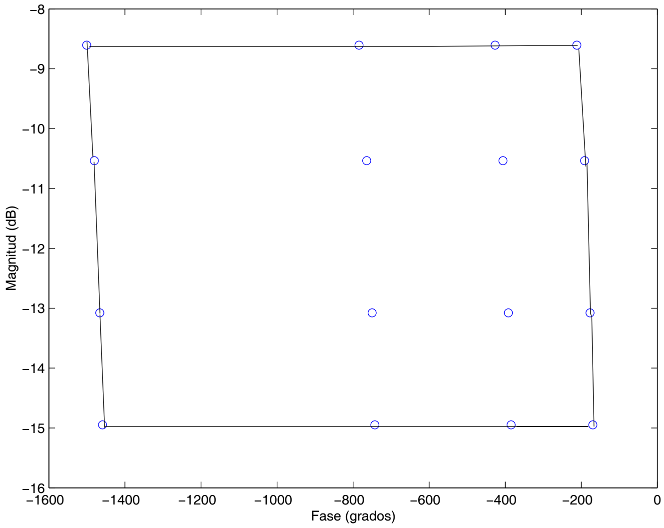

−8
−9
−10
−11
−12
−13
−14
−15
−16
Magnitud (dB)
−1600
−1400
−1200
−1000
−800
−600
−400
−200
0
Fase (grados)

Figura 9

♦

BIBLIOGRAFIA

- ASTRÖM, K. J. y WITTENMARK, B. Sistemas Controlados por Computador. Ed. Paraninfo, 1996.
- LEWIS, L., Optimal Control, John Wiley, 1986.
- YANIV, O., Qunatitative feedback design of linear and nonlinear control systems, Kluwer Academics Publishers : Norwell, Massachusetts, 1999.