

ESPAÑOLA

ASOCIACION **IAE** INFORMÁTICA

IAE AUTOMÁTICA

- MODELOS DE SISTEMAS DE CONTROL EN TIEMPO CONTINUO Y DISCRETOS
- CONTROL DE SISTEMAS DE TIEMPO CONTINUO Y DISCRETOS
- ESCALAS DE TIEMPO, PROXIMIDAD EN LAS DERIVADAS DE LAS VARIABLES DE ESTADO Y SIMPLIFICACION DE MODELOS
- SOBRE LA REGULACION DE UNA CLASE PARTICULAR DE SISTEMAS DE LINEALES CON INTERCONEXIONES
- ESTABILIZACION ASINTOTICA DE SISTEMAS BI-LINEALES CON PERTURBACIONES SINGULARES
- CONSIDERACIONES SOBRE LA ROBUSTEZ DE CONTROL EN COMPLEJIDAD RESTRINGIDA
- EXTENSION DE UNA ESTRATEGIA DE CONTROL A SISTEMAS DE TIEMPO CONTINUO Y DISCRETOS

6º CONGRESO

INFORMATICA Y AUTOMATICA

Organizado por ASOCIACION ESPAÑOLA DE INFORMATICA Y AUTOMATICA

MADRID 15 al 18 de OCTUBRE 1965

- MODELOS DE SISTEMAS LINEALES DISCRETOS CON MATRICES SINGULARES 409
M.D. Soto Torres, R. Fernández Lechón, M.C. Castrodeza Chamorro
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Valladolid
- CONTROL DE VELOCIDAD DE UN MOTOR DC SIN ESCOBILLAS 413
P. González de Santos y J. Nó Sánchez de León
Instituto de Automática Industrial. Madrid
- ESCALAS DE TIEMPO, PROXIMIDAD EN LAS DERIVADAS DE LAS VARIABLES DE ESTADO Y SIMPLIFICACION DE MODELOS 417
M. Armada Rodríguez
Instituto de Automática Industrial
- SOBRE LA REGULACION DE UNA CLASE PARTICULAR DE SISTEMAS BILINEALES CON INTERCONEXIONES 421
J.C. Soto*, M. de la Sen** y J.L. Malaina*
* E.U.I. Técnica Industrial. Universidad del País Vasco. Bilbao
** Facultad de Ciencias. Universidad del País Vasco. Leioa
- ESTABILIZACION ASINTOTICA DE SISTEMAS BILINEALES CON PERTURBACIONES SINGULARES 425
M.A. Armada
Instituto de Automática Industrial. C.S.I.C. Madrid
- ⊕ CONSIDERACIONES SOBRE LA ROBUSTEZ DE CONTROLADORES DE COMPLEJIDAD RESTRINGIDA 431
J.M. de la Cruz*, S. Dormido**, F. Morilla** y J. Aranda**
* Facultad de Físicas. Universidad Complutense. Madrid
** Facultad de Físicas. U.N.E.D.
- EXTENSION DE UNA ESTRATEGIA DE CONTROL SUBOPTIMO PARA IMPLEMENTACIONES SOBRE MICROPROCESADOR 437
L. Moreno, I. Serra y E. Luque
Dpto. Electricidad y Electrónica. Universidad Autónoma de Barcelona
- TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE MODELOS AGREGADOS PARCIALES DE SISTEMAS MULTIVARIABLES 441
E. Kahoraho*, S. Dormido** y J.L. Gutiérrez*
* E.T.S.I. Industriales de Bilbao
** Facultad de Ciencias. UNED. Madrid
- ESTIMACION VERSUS OBSERVACION PARA EL CONTROL DE VARIABLES INACCESIBLES EN UN HORNO DE FOSA 447
D. Maravall Gómez-Allende y F. Monasterio-Huelín
E.T.S.I. Telecomunicación. Madrid

CONSIDERACIONES SOBRE LA ROBUSTEZ DE CONTROLADORES DE COMPLEJIDAD RESTRINGIDA

De la Cruz, J.M.* , Dormido, S⁺ , Morilla, F⁺ , Aranda, J.⁺

* Dpto Informática y Automática, Fac. de Física, U. Complutense
+ Dpto Informática y Automática, Fac. CC.Físicas, U.N.E.D.

Resumen. Se estudia la estabilidad del sistema en lazo cerrado, obtenido cuando un controlador, que es óptimo desde algún punto de vista, es sustituido por un controlador de complejidad restringida (CCR). Las condiciones de estabilidad que se obtienen están ligadas a la proximidad de ambos controladores sobre el círculo unidad y al número de ceros o polos inestables que poseen ambos controladores. Estas condiciones se utilizan para diseñar nuevos métodos para la obtención de CCR.

INTRODUCCION

La denominación de Controladores de Complejidad Restringida (CCR) se aplica a los controladores lineales que no son los óptimos para el modelo del sistema. Las razones del estudio de los CCR se justifican fundamentalmente por tres aspectos (Goodwin y Ramadge, 1979):

- Por la gran sensibilidad que suelen presentar los controladores óptimos a las variaciones de los parámetros del proceso.
- Por la importancia que los controladores sencillos, y especialmente los del tipo PID, tienen en el control de procesos reales.
- El uso de CCR aparece en el diseño de controladores descentralizados para sistemas de gran escala (Sandell y col., 1978).

Se han propuesto varios métodos para la obtención de CCR desde un punto de vista de entrada/salida; entre otros el de Goodwin y Ramadge (1979), el de Iserman (1981) y el de De la Cruz (1984). En el primer método, el CCR se calcula minimizando una función de coste. Para ello se utiliza un algoritmo de tipo gradiente. El método se aplica exclusivamente para obtener controladores que minimizan la varianza de la señal de salida. El método de Iserman (1981) permite obtener un controlador PID a partir de un controlador de respuesta plana. El método de De la Cruz (1984) puede aplicarse a cualquier tipo de controlador y se basa en la obtención del CCR a partir de un controlador óptimo para el modelo del sistema, utilizando términos de reducción de modelos, de forma que el CCR mantiene los primeros parámetros de Markov

(PM) y/o Momentos Temporales (MT) del controlador óptimo. Esto hace que si el sistema en lazo cerrado con el CCR es estable, entonces los sistemas en lazo cerrado obtenidos a partir del controlador óptimo y del CCR mantienen iguales, al menos, un número de PM y/o de MT igual al que retiene el CCR. El método de Iserman (1981) está ríamente incluido dentro de este último método (De la Cruz y col., 1985).

Un problema fundamental que se plantea es el siguiente: ¿Bajo qué condiciones es estable el sistema en lazo cerrado obtenido al sustituir el controlador óptimo, $G_p(z)$, por el CCR $G_c'(z)$?

En el presente trabajo se presentan dos teoremas basados en el criterio generalizado de Nyquist, que dan condiciones que permiten garantizar la estabilidad del sistema con el CCR. Estos teoremas permiten diseñar nuevos métodos de reducción de modelos para la obtención del CCR. En este trabajo se apuntan algunos de estos métodos y se dan resultados experimentales obtenidos al aplicar los teoremas a la obtención de CCR estables.

TEOREMAS DE ESTABILIDAD

Para un sistema con la configuración de la Fig. 1, conocida la función de transferencia en lazo abierto, $G(z)$, es posible determinar la estabilidad del sistema en lazo cerrado utilizando el diagrama de Nyquist de $G(z)$.

Para sistemas discretos, el contorno de Nyquist Γ es la curva que encierra

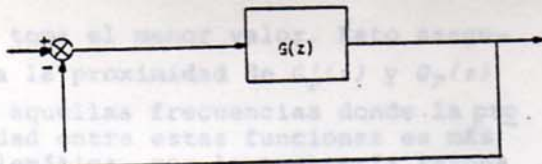


Fig. 1 Sistema con realimentación unidad

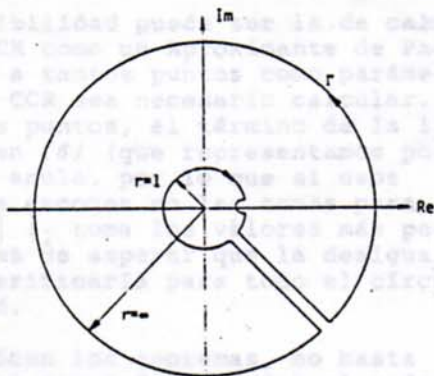


Fig. 2 Contorno de Nyquist para sistemas discretos

la región de inestabilidad o, lo que es igual, la región situada fuera del círculo unidad (Fig. 2).

Cuando se evalúa una función de transferencia a lo largo del contorno de Nyquist y la función de transferencia tiene polos sobre el círculo unidad, éstos se excluyen del contorno mediante pequeños semicírculos en torno a ellos, de modo que el contorno no contenga ninguna singularidad, como se muestra en la Fig. 2 para el caso de que exista un polo en $z = 1$.

Se supone que $G(z)$ es la función de transferencia en lazo abierto obtenida al aplicar el controlador óptimo con función de transferencia $G_r(z)$ al proceso con función de transferencia $G_p(z)$, esto es:

$$G(z) = G_r(z) G_p(z) \quad (1)$$

Por $G'(z)$ representamos la función de transferencia en lazo abierto obtenida al aplicar el controlador reducido $G_r'(z)$ al proceso $G_p(z)$:

$$G(z) = G_r'(z) G_p(z) \quad (2)$$

El criterio generalizado de Nyquist permite obtener ciertas condiciones que garantizan la estabilidad del sistema en lazo cerrado con el CCR. Los dos teoremas que siguen se deducen fácilmente de los teoremas de Mannerfelt (1981), que se basan en el criterio generalizado de Nyquist.

Teorema 1. Se considera el sistema en lazo cerrado obtenido al aplicar realimentación unidad al sistema con función de transferencia $G'(z)$. Si se ve-

rifican las condiciones:

1. El sistema con función de transferencia en lazo cerrado

$$G_w(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} \quad (3)$$

es estable.

2. Se verifica la siguiente desigualdad sobre el contorno de Nyquist (Γ)

$$|G'(z) - G(z)| < |1+G(z)| \quad (4)$$

entonces el sistema en lazo cerrado $G_w'(z) = G'(z) / (1+G'(z))$ es estable si y sólo si $G_r(z)$ y $G_r'(z)$ tienen el mismo número de polos inestables.

Teorema 2. Se considera el sistema en lazo cerrado obtenido al aplicar realimentación unidad al sistema con función de transferencia $G'(z)$. Si se verifican las condiciones:

1. El sistema con función de transferencia en lazo cerrado

$$G_w(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

es estable.

2. Se verifica la siguiente desigualdad sobre el contorno de Nyquist (Γ)

$$\left| \frac{1}{G_r'(z)} - \frac{1}{G_r(z)} \right| < \left| 1 + \frac{1}{G_r(z)} \right| \quad (5)$$

entonces el sistema en lazo cerrado

$G_w'(z) = \frac{G'(z)}{1+G'(z)}$ es estable, si y sólo si $G_r(z)$ y $G_r'(z)$ tienen el mismo número de ceros inestables.

La demostración de estos teoremas puede verse en De la Cruz (1984).

La relación (3) puede escribirse así:

$$|G_r'(z) - G_r(z)| < \left| \frac{1}{G_p(z)} + G_r(z) \right| \quad (6)$$

Por su parte, la relación (4) puede ponerse como:

$$\left| \frac{1}{G_r'(z)} - \frac{1}{G_r(z)} \right| < \left| G_p(z) + \frac{1}{G_r(z)} \right| \quad (7)$$

DISEÑO DEL CCR

De la desigualdad (6) se deduce que, para lograr la estabilidad, es necesario que el modelo reducido esté próximo al controlador óptimo sobre el círculo de radio unidad. $G_r'(z)$ debe de estar próximo a $G_r(z)$ sobre todo en aquellas frecuencias para las que el término de la derecha en (6), (que representaremos por $|I_1|$) es pequeño.

Una forma posible de obtener el CCR es como un Aproximante de Padé de $G_r(z)$ en torno al punto para el que

$| |_1$ toma el menor valor. Esto aseguraría la proximidad de $G'_r(z)$ y $G_r(z)$ para aquellas frecuencias donde la proximidad entre estas funciones es más problemática, por lo que sería razonable pensar que la desigualdad se cumple para todo el círculo unidad.

Otra posibilidad puede ser la de calcular el CCR como un Aproximante de Padé en torno a tantos puntos como parámetros del CCR sea necesario calcular. Para esos puntos, el término de la izquierda en (6) (que representamos por $| |_2$) se anula, por lo que si esos puntos se escogen en las zonas para las que $| |_1$ toma los valores más pequeños, es de esperar que la desigualdad se verificaría para todo el círculo unidad.

Como indican los teoremas, no basta con que el regulador $G_r(z)$ y el reducido $G'_r(z)$ tomen valores próximos para $|z|=1$, sino que además deben de poseer el mismo número de polos y ceros inestables. Una forma de evitar la obtención de CCR inestables, a partir de un controlador $G_r(z)$ estable, puede ser la de obtener el denominador del CCR derivando el denominador del controlador $G_r(z)$ y obtener el numerador de modo que $G'_r(z)$ y $G_r(z)$ estén próximos en un rango de frecuencias determinado. De esta forma se consigue que los polos del CCR no emigren fuera del círculo unidad y que los valores que ambos controladores tomen sobre el círculo unidad estén próximos. Si $G_r(z)$ posee polos inestables, $G'_r(z)$ debe de mantenerlos y se deducirían sus polos estables derivando solamente los polos estables de $G_r(z)$.

SERVOCONTROLADORES

Teniendo en cuenta las relaciones (1) y (3), se obtiene la siguiente desigualdad equivalente a la expresada por la ec. (6):

$$|G'_r(z) - G_r(z)| < \left| \frac{G'_r(z)}{G_w(z)} \right| \quad (8)$$

Para la ec. (7) se obtiene la siguiente relación equivalente:

$$\left| \frac{1}{G'_r(z)} - \frac{1}{G_r(z)} \right| < \left| \frac{G_p(z)}{G_w(z)} \right| \quad (9)$$

Como se sabe, gran cantidad de controladores pueden estudiarse desde el punto de vista de asignación de ceros y polos. Esto requiere la especificación de la función de transferencia en lazo cerrado. Conociendo esta función y el controlador óptimo para conseguir dicha función de transferencia en lazo cerrado, se puede calcular el término de la derecha en la ec. (8). Así, las necesidades sobre la proximidad entre el CCR y el controlador óptimo se pueden

expresar en términos de condiciones en el dominio de frecuencias.

Para un nuevo servo normal, la función de transferencia $G_w(z)$ toma el valor unidad para bajas frecuencias y permanece constante hasta las frecuencias correspondientes a la anchura de banda que se desea, donde comienza a decrecer. Por ello, desde el punto de vista de la estabilidad y teniendo en cuenta la relación (9), es conveniente que el proceso posea una ganancia elevada.

La relación (8) puede escribirse también en la forma:

$$|G'_r(z) - G_r(z)| < \frac{1}{\left| \frac{G_p(z)}{G_w(z)} (1 - G_w(z)) \right|} \quad (10)$$

Para altas frecuencias, normalmente las ganancias de $G_p(z)$ y $G_w(z)$ son pequeñas, por lo que la desigualdad (10) puede verificarse incluso si $G_r(z)$ y $G'_r(z)$ se apartan bastante para altas frecuencias.

El controlador $G_r(z)$ normalmente posee uno o más polos en $z=1$ para evitar errores en el sistema, debido a perturbaciones de baja frecuencia. Según el teorema 1, es necesario que $G'_r(z)$ retenga los polos de $G_r(z)$ en $z=1$ en orden a obtener estabilidad. La ganancia de $G_p(z)$ es normalmente mucho mayor que la deseada para $G_w(z)$ a bajas frecuencias; por ello es conveniente que $G_r(z)$ y $G'_r(z)$ estén próximos a bajas frecuencias, aunque posean el mismo número de polos en $z=1$.

EJEMPLOS

Se considera el siguiente proceso de fase no mínima, estudiado por Astrom y col. (1977) y por De la Cruz (1984).

$$y(t) + ay(t-1) = b_1 u(t-2) + b_2 u(t-3) + e(t) + ec(t-1)$$

donde $y(t)$ es la salida del proceso, $u(t)$ es la entrada y control, y $\{e(t)\}$ es una secuencia de variables aleatorias normales de media nula y varianza uno; los parámetros del proceso toman los valores: $a=-0.95$; $b_1=1$; $b_2=2$; $c=-0.7$. El regulador de varianza mínima para este proceso viene dado por la ecuación, Astrom y col. 1977

$$u(t) = - \frac{.117}{1+0.75z^{-1}+0.246z^{-2}} y(t) \quad (11)$$

Con este regulador, la varianza de la salida en lazo cerrado es: $\sigma^2 y = 1.082$.

Se considera el CCR con la estructura

$$u(t) = - \frac{g}{1+hz^{-1}} y(t)$$

En la Tabla 1 se muestran los valores de g y h obtenidos cuando el CCR se calcula como un Aproximante de Padé

en $z=1$ y/o $z=-\infty$.

TABLA 1

Tipo de aproximación	Parámetros g	h	$\sigma^2 y$
2 - PM	0.111	0.750	1.087
1-PM, 1-MT	0.117	0.996	inestable
2 - MT	0.155	1.647	inestable

El CCR produce un sistema en lazo cerrado estable cuando g y h se obtienen a partir de la PM del controlador (11). En la Fig.3 se muestran los valores de $||_1$ y $||_2$ para este caso. Como ambos controladores no poseen polos inestables, el sistema en lazo cerrado es estable.

En la fig.3 también está representado el valor de $||_2$ cuando el CCR se obtiene a partir de los MT. Como era de esperarse, para bajas frecuencias, ambos controladores están en este caso muy próximos, tomando el mismo valor en $z=1$. Aunque la desigualdad (6) se verifica, el sistema en lazo cerrado es inestable ya que el CCR tiene un polo inestable.

Si el CCR se obtiene del primer PM y del Primer MT, entonces el CCR tiene un polo estable; sin embargo está muy próximo a $z=-1$, lo que hace que no se verifique la desigualdad (6) (Fig.4). En la Fig.5 se muestran las gráficas de $||_1$ y $||_2$ cuando el CCR se calcula como un Aproximante Parcial de Padé en torno a $z=1$ y $z=-1$. En este caso ambos controladores (CCR y óptimo) toman el mismo valor en esos puntos y permanecen bastante próximos para el resto de puntos del círculo unidad. En este caso, los parámetros del CCR son: $g=0.094$; $h=0.602$. La varianza del sistema en lazo cerrado es $\sigma^2 y=1.015$ que coincide prácticamente con la del controlador óptimo.

En la Fig.6 se muestran las gráficas de $||_1$ y $||_2$ cuando el CCR se calcula de modo que h se obtiene derivando el denominador del controlador (11) y g se obtiene bien del primer PM o del primer MT. En ambos casos el sistema en lazo cerrado obtenido es estable con varianzas $\sigma^2 y=1.088$ y $\sigma^2 y=1.122$, respectivamente.

CONCLUSIONES

Se ha estudiado la estabilidad del sistema en lazo cerrado obtenido al sustituir un controlador "óptimo" por otro de complejidad restringida (CCR). De las condiciones de estabilidad obtenidas se han sugerido algunos posibles métodos de obtención de CCR. Se han mostrado algunos resultados experimentales obtenidos.

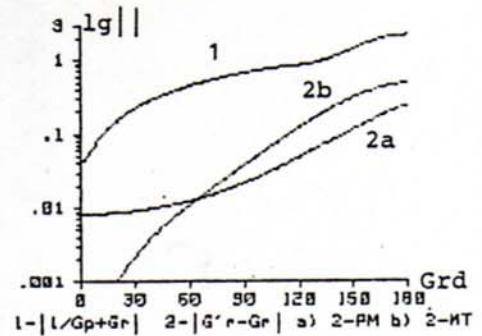


Fig.3: Valor de los módulos cuando el CCR se obtiene a partir de los PM o de los MT.

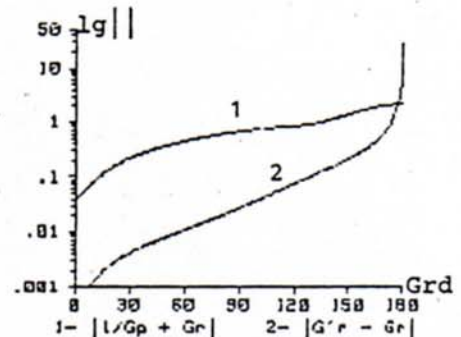


Fig.4: Valor de los módulos cuando el CCR se obtiene a partir de los PM y MT

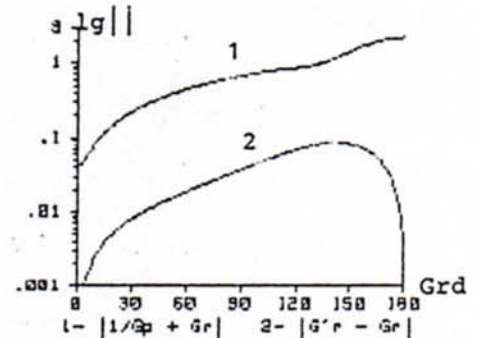


Fig.5: Valor de los módulos cuando el CCR se obtiene como un aproximante en torno a $z=1$ y $z=-1$.

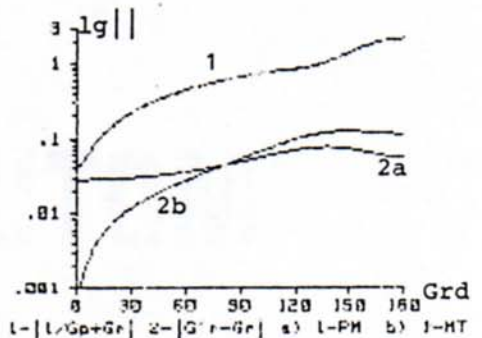


Fig.6: Valor de los módulos cuando el CCR se obtiene mediante derivación y un PM o un MT.

REFERENCIAS

- (1) Aström, K.J., Borisson, U., Ljung, L. and Wittenmark, B. (1977), "Theory and Applications of Self-Tuning Regulators". Automatica, 18, 457-476.
- (2) De la Cruz, J.M. (1984). Tesis Doctoral. Facultad de Física, Univ. Complutense. Madrid.
- (3) De la Cruz, J.M., Dormido, S., Guillén, J.M., Aranda, J. (1985), "Diseño de un controlador PID mediante aproximación a un controlador de respuesta plana" Comunicación en la R.S.E.F. y Q. (En prensa).
- (4) Goodwin, G.C., Ramadge, P.J. (1979) "Design of Restricted Complexity Adaptive Regulators" IEEE Trans. AC, 24, 584-588.
- (5) Iserman, R. (1981) "Digital Control Systems" Springer-Verlag.
- (6) Mannerfelt, C.F. (1981) "Robust Control Design with Simplified Models". Document Lutfdz/(TFRT-1021)/1-153/(1981). Lund Inst. of Tech., Sweden.
- (7) Sandell, N.R., Varaiya, P., Athans, M. and Safonov, M.G. (1978) "Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems" IEEE Trans. AC, 23, 108-128.

SUMMARY

In this paper it is studied the stability of the closed loop system that is obtained when a controller that is optimal from some point of view is replaced by a restricted complexity controller. Some new methods for getting restricted complexity controllers are given. These new methods are based on the conditions for the stability that are been obtained. Some experimental results are also given.

INFORMATICA Y AUTOMATICA

ASOCIACION ESPAÑOLA DE ELECTRONICA Y AUTOMATICA
 VOLUMEN 15, NÚMERO 10, OCTUBRE, 1980