



**APUNTES DE**  
**AUTOMÁTICA II**

**(Primer parcial)**

**Jose Manuel Díaz**

**Joaquín Aranda**

**Jesús Manuel de la Cruz**

**Departamento de Informática y Automática**  
**E.T.S.I. Informática**  
**U.N.E.D**



Apuntes de Automática II (Primer parcial).

Última reimpresión: octubre 2006.

ISBN: 84-690-0484-0

Copyright © 2006 Jose Manuel Díaz, Joaquín Aranda y Jesús Manuel de la Cruz

Todos los derechos reservados. Prohibida la copia por cualquier medio de alguna de las partes de este manual sin el consentimiento por escrito de los autores.

Departamento de Informática y Automática

E.T.S.I Informática.

Universidad de Educación a Distancia (UNED).

C/ Juan del Rosal nº 16.

Madrid 28040 (España)



# INDICE

## TEMA 0: HISTORIA DE LA AUTOMATICA

0.1 INTRODUCCION .....	1
0.2 HISTORIA DE LA AUTOMATICA .....	2
0.2.1 La prehistoria de la automatica .....	2
0.2.2 El periodo primitivo de la automatica: El nacimiento de la teoria matematica de control .....	4
0.2.3 Periodo clásico de la automática .....	5
0.2.4 Periodo Moderno de la Automática .....	7
0.3 REFERENCIAS .....	11

## TEMA 1: MODELOS DE SISTEMAS CONTINUOS

1.1 INTRODUCCION .....	15
1.2 REPRESENTACION EN EL ESPACIO DE ESTADOS DE SISTEMAS CONTINUOS .....	17
1.3 TRANSFORMACIÓN DE VARIABLES DE ESTADO .....	20
1.4 FORMAS CANÓNICAS .....	28
1.4.1 Forma canónica controlable .....	28
1.4.2 Forma canónica observable .....	31
1.4.3 Forma canónica de Jordan .....	34
1.5 RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE ESTADO.....	38
1.6 CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD .....	47
1.6.1 Controlabilidad del estado .....	48
1.6.2 Observabilidad.....	51
1.7 DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADOS .....	55
1.7.1 Diseño mediante la ubicación de polos .....	55
1.7.2 Observadores de estado .....	62

## TEMA 2: MODELOS DE SISTEMAS DISCRETOS

2.1 INTRODUCCION .....	79
2.2 MODELADO DE SEÑALES DISCRETAS .....	80
2.2.1 <i>Secuencias</i> .....	80
2.2.2 <i>La transformada Z de una secuencia</i> .....	81
2.3 MODELADO DE SISTEMAS DISCRETOS .....	84
2.3.1 <i>Ecuación en diferencias</i> .....	84
2.3.2 <i>Ecuación de estado</i> .....	87
2.3.3 <i>Función de transferencia</i> .....	89
2.3.4 <i>Formas canónicas</i> .....	90
2.4 RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE ESTADO .....	92
2.4.1 <i>Sistemas lineales invariantes en el tiempo</i> .....	92
2.4.2 <i>Sistemas lineales variantes en el tiempo</i> .....	93
2.5 RESPUESTA IMPULSIONAL EN TIEMPO DISCRETO .....	95
2.6 DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES EN EL ESPACIO DE ESTADO EN TIEMPO CONTINUO.....	96
2.7 CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD .....	100
2.7.1 <i>Controlabilidad</i> .....	101
2.7.2 <i>Observabilidad</i> .....	101
2.8 DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADOS .....	101
2.8.1 <i>Diseño mediante la ubicación de polos</i> .....	102
2.8.2 <i>Observadores de estado</i> .....	103
2.9 ENFOQUE DE ECUACIONES POLINOMIALES PARA EL DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL.....	105
2.9.1 <i>La ecuación Diofántica</i> .....	105
2.9.2 <i>Sistemas de control elementales</i> .....	108
2.9.3 <i>Diseño de sistemas de control mediante la igualación a un modelo</i> .....	114

## TEMA 3: MODELOS DE PERTURBACIONES

3.1 INTRODUCCION .....	119
3.2 MODELOS CLASICOS DE PERTURBACIONES.....	119
3.2.1 <i>Carácter de las perturbaciones</i> .....	119
3.2.2 <i>Modelos de perturbaciones simples</i> .....	120

3.3 REDUCCION DE LOS EFECTOS DE LAS PERTURBACIONES .....	122
3.3.1 Reducción en la fuente .....	122
3.3.2 Reducción mediante realimentación local .....	122
3.3.3 Reducción mediante feedforward .....	123
3.3.4 Reducción mediante predicción .....	124
3.4 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS .....	124
3.4.1 Variables aleatorias .....	125
3.4.2 Procesos estocásticos .....	129
3.4.3 Ruido blanco .....	133
3.4.4 Procesos estocásticos gaussianos y markovianos .....	134
3.5 MODELOS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS .....	137
3.5.1 Modelos en el espacio de estados .....	137
3.5.2 Filtrado de procesos estacionarios .....	147
3.5.3 Factorización espectral .....	152
3.5.4 Cálculo de varianzas .....	157

## TEMA 4: ESTIMACION OPTIMA

4.1 INTRODUCCION .....	161
4.2 EL FILTRO DE KALMAN .....	161

## TEMA 5: IDENTIFICACION DE SISTEMAS

5.1 INTRODUCCION .....	171
5.2 IDENTIFICACION POR MINIMOS CUADRADOS .....	176
5.2.1 Planteamiento del problema .....	176
5.2.2 Estima de mínimos cuadrados .....	177
5.2.3 Estima de mínimos cuadrados recursiva .....	185
5.2.4 Parámetros variables con el tiempo .....	190
5.3 IDENTIFICACION DE SISTEMAS LINEALES ESTOCASTICOS .....	195
5.3.1 Mínimos cuadrados extendidos (MCE) .....	197
5.3.2 Algoritmo de Máxima Verosimilitud (MV) .....	199
5.3.3 Método de la Variable Instrumental (VI) .....	200
5.4 SELECCIÓN DE LA SEÑAL DE ENTRADA .....	201
5.4.1 Grado de excitación persistente de una señal .....	201
5.4.2 Señal pseudo aleatoria binaria (PRBS) .....	206
5.4.3 Amplitud de la señal de entrada .....	208
5.5 IDENTIFICACION EN LAZO CERRADO .....	208

5.6 ELECCION DEL PERIODO DE MUESTREO.....	210
5.7 TRATAMIENTO DE LOS DATOS.....	212
5.7.1 Filtrado de las señales.....	213
5.7.2 Eliminación de valores medios .....	214
5.7.3 Detección de outliers .....	216
5.8 ELECCION DEL TIPO Y LA ESTRUCTURA DEL MODELO.....	218
5.8.1 Elección del tipo de modelo.....	218
5.8.2 Elección de la estructura del modelo.....	219
5.9 VALIDACION DE ESTRUCTURAS Y MODELOS .....	219

<b>APENDICE A: TABLA DE TRANSFORMADAS Z</b>	223
---	-----

<b>BIBLIOGRAFIA</b>	225
---------------------	-----

# TEMA 0

## HISTORIA DE LA AUTOMÁTICA

### 0.1 INTRODUCCION

La Real Academia de la Lengua define el término *Automática* de la siguiente forma: “*Ciencia que trata de sustituir en un proceso al operador humano por dispositivos mecánicos o electrónicos.*”

En esta definición se hace referencia expresa a dos actividades propias del operador humano: la tarea física y la tarea mental. Normalmente las tareas realizadas por el hombre son un conjunto de ambas. Se dice que un proceso está automatizado cuando no precisa la intervención de un operador humano.

La *Automática*<sup>1</sup> es una disciplina básicamente ingenieril, por ello sus avances están estrechamente ligados a los problemas prácticos que necesitaban ser resueltos por el hombre. Los principales eventos a lo largo de la historia de la humanidad que afectaron al progreso de la Automática fueron:

1. *La preocupación de los Griegos y de los Arabes por conseguir una medida precisa del tiempo.* Este periodo se extiende desde cerca del 300 a.c. hasta el 1200 de nuestra era.
2. *La Revolución Industrial en Europa.* Se suele decir que la Revolución Industrial comenzó a finales del siglo dieciocho, sin embargo, sus raíces pueden ubicarse mucho antes, alrededor del 1600.
3. *El desarrollo de las telecomunicaciones y las Guerras Mundiales.* Este periodo comprende desde 1910 hasta 1945.

---

<sup>1</sup>En este capítulo se usarán de forma sinónima los términos Automática, *Teoría de Control Automático* y *Teoría de Control Realimentado*.

#### 4. *El comienzo de la era espacial y de la era de las computadoras en 1957.*

En algún punto entre la Revolución Industrial y las Guerras Mundiales, la Teoría de Control Automático comenzó a formularse en términos matemáticos. Fue J. C. Maxwell en 1868 quién realizaría el primer análisis matemático riguroso de un sistema de control realimentado. Así, este año se utiliza para dividir la historia de la Automática en cuatro periodos fundamentales:

- *Prehistoria* que abarca todos los descubrimientos realizados en esta área anteriores al 1868.
- *Periodo primitivo*, que abarca el periodo de tiempo comprendido entre 1868 y comienzos del siglo XX.
- *Periodo clásico*, que abarca el periodo de tiempo comprendido entre comienzos del siglo XX y 1960.
- *Periodo moderno*, que abarca el periodo de tiempo comprendido entre 1960 y la actualidad.

En las siguientes secciones se describen los principales tendencias y descubrimientos clave de cada uno de estos periodos.

## **0.2 HISTORIA DE LA AUTOMATICA**

### **0.2.1 La prehistoria de la automatica**

#### ***0.2.1.1 Los relojes de agua de los Griegos y de los Árabs***

En la antigüedad la primera motivación para la realización de un control realimentado fue la necesidad por determinar de forma precisa el paso del tiempo. Así, alrededor del año 270 a. c. el griego Ktesibios inventó un *regulador flotante* para un reloj de agua. La función de este regulador era mantener a una altura constante el nivel de agua almacenada en un tanque. Esta altura constante generaba a su vez un flujo constante de agua a través de una tubería ubicada en el fondo del tanque, el cual se utilizaba para llenar de agua a un ritmo constante un segundo tanque. De esta forma se conseguía que el nivel de agua en el segundo tanque dependiera únicamente del tiempo transcurrido.

El regulador de Ktesibios usaba un corcho flotante, a modo de válvula, para controlar el flujo de entrada de agua al primer tanque. Cuando el nivel de agua en el primer tanque

disminuía el corcho dejaba de taponar la entrada de flujo al tanque, con lo que éste se volvía a llenar. El llenado se paraba cuando se alcanzaba una altura adecuada de tal forma que el corcho volvía a taponar el flujo entrante de agua.

Los Griegos usaron los reguladores flotantes y dispositivos similares para: la implementación de relojes de agua, la dispensación automática de vino, el diseño de sifones para mantener una diferencia constante de niveles de agua entre dos tanques, la apertura de las puertas de los templos, etc.

En el periodo comprendido entre el año 800 y el 1200 diferentes ingenieros árabes utilizaron reguladores flotantes para relojes de agua y otras aplicaciones. Durante este periodo, fue utilizado uno de los principios más importantes de la realimentación, el control "on/off".

Cuando Bagdad fue tomada por los Mongoles en 1258, todo el pensamiento creativo asociado a este tipo de reguladores finalizó. Además, la invención de relojes mecánicos en el siglo XIV dejó a los relojes de agua y sus sistemas de control realimentado obsoletos. (El reloj mecánico no es un sistema de control realimentado). El regulador flotante no aparecería de nuevo hasta su uso en la Revolución Industrial.

### **0.2.1.2 La Revolución Industrial**

La Revolución Industrial en Europa estuvo marcada por la invención de avanzados molinos de grano, hornos, calderas y la máquina de vapor. Estos dispositivos no podían ser adecuadamente regulados a mano por lo que se hizo necesario la invención de controles automáticos. Una amplia variedad de reguladores fueron inventados: flotantes, de temperatura, de presión, de control de velocidad,...., etc.

J. Watt inventó su motor de vapor en 1769, y esta fecha marca, según todos los historiadores, el comienzo de la Revolución Industrial. No obstante, las raíces de la Revolución Industrial podrían situarse sobre el 1600 o incluso un poco antes con el desarrollo de diferentes tipos de molinos de grano y hornos.

En 1788 Watt completó el diseño del regulador centrífugo "flyball" para regular la velocidad rotacional del motor de vapor. Este regulador caló hondo dentro del mundo ingenieril y llegó a convertirse en toda una sensación en Europa. Éste fue el primer uso del control realimentado del que existe conocimiento popular.

## 0.2.2 El periodo primitivo de la automática: El nacimiento de la teoría matemática de control

El diseño de sistemas de control realimentados durante el periodo de la Revolución Industrial se realizaba mediante prueba y error, requería de una fuerte componente de intuición ingenieril. En conclusión, era más un arte que una ciencia. Fue a mediados del siglo XIX cuando se dotó de un formalismo matemático el diseño de los sistemas de control realimentado.

En 1840, en Greenwich, el astrónomo británico G. B. Airy desarrolló un dispositivo realimentado para posicionar un telescopio. Su dispositivo era un sistema de control de velocidad que giraba el telescopio automáticamente para compensar la rotación de la Tierra, posibilitando así el estudio una determinada estrella durante un mayor tiempo. Desafortunadamente, Airy descubrió que debido a un diseño inadecuado del lazo de control realimentado se introducían oscilaciones bruscas en el sistema. Así el fue el primero en discutir la *inestabilidad* de los sistemas en lazo cerrado, y el primero en usar *ecuaciones diferenciales* en su análisis.

La teoría de las ecuaciones diferenciales estaba por aquel entonces bien desarrollada, debido al descubrimiento del cálculo infinitesimal (I. Newton (1642-1727), G. W. Leibniz (1646-1716), J. F. Riccati (1676-1754), etc). El uso de la ecuación diferencial en el análisis de sistemas dinámicos fue establecido por J. L. Lagrange (1736-1813) y W. R. Hamilton (1805-1865).

El primer trabajo sobre análisis matemático de sistemas de control se realizó mediante el uso de ecuaciones diferenciales. J. C. Maxwell analizó la estabilidad del regulador "flyball" de Watt [Maxwell 1868]. Su técnica consistía en linealizar las ecuaciones diferenciales del movimiento para encontrar la *ecuación característica* del sistema. Él estudió el efecto de los parámetros del sistema sobre la estabilidad y mostró que el sistema es estable si las raíces de la ecuación característica tienen *parte real negativa*.

Asimismo, el ruso I. I. Vyshnegradsky en 1877 independientemente de Maxwell también analizó la estabilidad de reguladores usando ecuaciones diferenciales. Por ello, a Maxwell y a Vyshnegradsky se les considera los fundadores de la teoría de control de sistemas.

E. J. Routh aportó una técnica numérica para determinar cuando una ecuación característica tiene raíces estables [Routh 1877]. En 1893, A. B. Stodola estudió la regulación de una turbina de agua usando las técnicas de Vyshnegradsky. También modeló las dinámicas del actuador e incluyó el retardo de los mecanismos de actuación en su

análisis. Fue el primero en mencionar la noción de *constante de tiempo del sistema*. Sin conocer el trabajo de Maxwell y Routh el propuso el problema de determinar la estabilidad de la ecuación característica a A. Hurwitz quién lo resolvió en 1895 [Hurwitz 1895].

Otra aportación fundamental a la teoría de control fue realizada por A. M. Lyapunov, que estudió en 1892 la estabilidad de ecuaciones diferenciales no lineales usando una noción generalizada de energía [Lyapunov 1892]. Desafortunadamente, aunque su trabajo fue aplicado y continuado en Rusia, su elegante teoría no llegó a Occidente hasta 1960.

### 0.2.3 Periodo clásico de la automática

El análisis matemático de los sistemas de control había sido realizado hasta la fecha usando ecuaciones diferenciales en el *dominio temporal*. Durante los años 20 y los años 30, en los laboratorios de la compañía Bell Telephone, los trabajos en el *dominio de la frecuencia* realizados entre otros por P. S. Laplace (1749-1827), J. Fourier (1768-1830) y A. L. Cauchy (1789-1857) fueron aplicados a las telecomunicaciones.

Un problema fundamental para el desarrollo de las líneas telefónicas era la necesidad de amplificar periódicamente la señal de voz. Desafortunadamente, si esta amplificación no se realiza cuidadosamente, se amplifica tanto el ruido como la voz. Para disminuir la distorsión en estos amplificadores H. S. Black demostró en 1927 la utilidad de la *realimentación negativa* [Black 1934]. El problema de diseño consistía en introducir un desplazamiento de fase en las frecuencias adecuadas del sistema. La teoría de regeneración para el diseño de amplificadores estables fue desarrollada por H. Nyquist [1932], quién enunció el conocido como *criterio de estabilidad de Nyquist* sobre el diagrama polar de una función compleja. H. W. Bode en 1938 fue el primero en usar *diagramas de magnitud y de fase* de una función compleja [Bode 1940]. Estudió la estabilidad en lazo cerrado utilizando las nociones de *margen de fase* y *margen de ganancia*.

Durante las Guerras Mundiales se produjo un importante desarrollo de los sistemas de control realimentados. Se construyeron buques cada vez más sofisticados. Un problema militar importante era el control de los movimientos propios de los buques y la fijación automática de su rumbo. En 1910, E. A. Sperry inventó el giróscopo, que utilizó en la estabilización y fijación de rumbo de los buques, y posteriormente en el control de aviones. En 1922 N. Minorsky introdujo su controlador de tres términos para la fijación de rumbo de los buques, fue el primero en usar el controlador *proporcional integral derivativo (PID)*. Además estudió efectos no lineales en los sistemas en lazo cerrado.

Otro problema militar importante durante este periodo era la fijación precisa de objetivos para armas ubicadas en barcos y aviones. Con la publicación en 1934 del libro “Teoría de Servomecanismos” de h. L. Házen, se inició el uso de la teoría de control mecánica en este problema. En su libro, Házen acuñó el término *servomecanismo*, que implicaba una relación maestro-esclavo en los sistemas.

En 1940 se creó el denominado como “Laboratorio de Radiación” en el Instituto Tecnológico de Massachusetss (MIT) para estudiar problemas de control y de procesado de la información asociados con el radar. Muchos de los trabajos sobre teoría de control durante la década de los 40 surgieron de este laboratorio.

En 1941 A. C. Hall reconoció los efectos derivados de ignorar el ruido en el diseño de los sistemas de control. Se dio cuenta que la tecnología basada en el dominio de la frecuencia desarrollada en los Laboratorios Bell podía ser empleada en prevenir los efectos del ruido, y usó esta aproximación al diseño de sistemas de control para un radar aerotransportado. Este éxito demostró concluyentemente la importancia de las técnicas del dominio de la frecuencia en el diseño de sistemas de control.

Por otra parte, W. R. Evans presentó su técnica del *lugar de las raíces* [Evans 1948], la cual aportaba una forma directa de determinar la posición en el plano  $s$  de los polos en lazo cerrado. Durante la década de los 50, muchos trabajos de control estuvieron centrados en el plano  $s$ , y en como obtener respuestas temporales adecuados de la salida de un sistema en lazo cerrado en término del tiempo de subida, sobreelongación, etc.

Durante este periodo, también se introdujeron técnicas estocásticas para teoría de control y teoría de comunicación. En el MIT en 1942, N. Wiener analizó los sistemas de procesado de la información usando modelos de procesos estocásticos. Trabajando en el dominio de la frecuencia, desarrolló un filtro óptimo estadístico para señales continuos estacionarias que mejoraba la relación señal/ruido en un sistema de comunicación. El ruso A. N, Kolmogorov en 1941 proporcionó una teoría para procesos estocásticos estacionarios discretos [Kolmogorov 1941].

En conclusión en este periodo clásico de la Automática predominaron las técnicas de diseño de control en el dominio de la frecuencia que disponían de suministraron una gran intuición y garantizaban soluciones a los problemas de diseño. Estas herramientas fueron aplicadas usando cálculos manuales, o mayormente reglas de actuación junto con técnicas gráficas.

La aproximación en el dominio de la frecuencia era apropiada para *sistemas lineales invariantes en el tiempo*. Además era mejor usarla en el caso de sistemas de *una entrada-una salida* (SISO), ya que su aplicación a sistemas de *múltiples entradas-múltiples salidas* (MIMO) se tornaba bastante tediosa.

Esta teoría tuvo algunos éxitos con sistemas no lineales. Usando las propiedades de rechazo del ruido de las técnicas del dominio de la frecuencia, un sistema de control puede ser diseñado para que sea *robusto* a variaciones en los parámetros del sistema, y para tener en cuenta (medir) errores y perturbaciones externas. Así, las técnicas clásicas pueden ser utilizadas sobre la versión linealizada de un sistema no lineal.

Las técnicas del dominio de la frecuencia pueden ser también aplicadas a sistemas con no linealidades sencillas usando la *aproximación de la función descriptiva*, la cual se basa en el criterio de Nyquist. Esta técnica fue usada por primera vez por J. Groszkowski en el diseño de transmisores de radio antes de la Segunda Guerra Mundial y fue formalizada en 1964 por J. Kudrewicz.

Desafortunadamente, utilizando la suposición de linealidad y tratando un par de transmisión SISO a la vez no es posible diseñar sistemas de control para sistemas multivariados fuertemente no lineales, como los que aparecen en las aplicaciones aeroespaciales.

## 0.2.4 Periodo Moderno de la Automática

Con la llegada de la era espacial, los diseños de control abandonaron las técnicas en el dominio de la frecuencia y volvieron a las técnicas de ecuaciones diferenciales de finales del siglo XIX, las cuales se desarrollaban en el *dominio del tiempo*.

En la Unión Soviética, siguiendo las ideas de Lyapunov hubo una gran actividad en el diseño de controles no lineales. En 1948, Ivachenko había investigado el principio del *control del relé*, donde la señal de control es conmutada discontinuamente entre valores discretos. En 1955, Tsytkin utilizó el plano de fase para el diseño de controles no lineales. Por su parte, V. M. Popov introdujo el *criterio del círculo* para el análisis de estabilidad no lineal [Popov 1961]. Toda esta actividad, condujo en 1957 a que la Unión Soviética fuese la primera nación en lanzar un satélite (Sputnik) al espacio. Además tuvo su reconocimiento internacional con la celebración en Moscú en 1960 de la primera conferencia de la recientemente creada IFAC (International Federation of Automatic Control).

Por aquella época, existía una fuerte rivalidad de los Estados Unidos con la Unión Soviética, por ello el lanzamiento del Sputnik produjo una tremenda actividad en el diseño de controles automáticos en los Estados Unidos. En 1957, R. Bellman aplicó *programación dinámica* al control óptimo de sistemas discretos, demostrando que la dirección natural para resolver problemas de control óptimo es haciéndolo hacia atrás en el tiempo. Su procedimiento, resultaba en un esquema en lazo cerrado generalmente no lineal.

Hacia 1958, L. S. Pontryagin había desarrollado su principio del máximo como una generalización de la mecánica hamiltoniana, el cual resolvía problemas de control óptimo usando el cálculo de variaciones desarrollado por L. Euler (1707-1783). Pontryagin resolvió el problema del tiempo mínimo, derivando como control óptimo una ley de control del tipo relé on/off.

En 1960, se publicaron tres trabajos fundamentales de R. Kalman. El primero de estos [Kalman y Bertram 1960] trataba sobre control en el dominio del tiempo de sistemas no lineales y utilizaba las ideas de Lyapunov, dándolas a conocer a Occidente. El segundo [Kalman 1960a] discutía el control óptimo de sistemas, aportando las ecuaciones de diseño para el *regulador cuadrático lineal* (LQ). El tercer trabajo [Kalman 1960b] discutía la teoría de estimación y filtrado, y aportaba las ecuaciones de diseño del *filtro discreto<sup>2</sup> de Kalman*.

En el periodo de un año gracias a los trabajos de Kalman, las principales limitaciones de la teoría de control clásica fueron superadas y nuevas herramientas teóricas fueron presentadas. En definitiva, 1960 marcó el comienzo de la era del *control moderno*.

Con las ideas aportadas por Kalman, el programa espacial de los Estados Unidos experimentó un fuerte desarrollo. Por ejemplo, el primer módulo que aterrizó en la Luna usaba un filtro de Kalman en su sistema de navegación.

Los puntos claves del trabajo de Kalman son los siguientes:

- Es una aproximación en el dominio del tiempo válida no solo para sistemas invariantes en el tiempo sino también para sistemas variantes con el tiempo y sistemas no-lineales.

---

<sup>2</sup> El *filtro continuo de Kalman* fue desarrollado en [Kalman y Bucy 1961].

- Al trabajar con álgebra lineal y matrices los sistemas MIMO podían ser fácilmente tratados.
- Usó el concepto de estado interno de un sistema; es decir, utilizó la representación interna de un sistema y no únicamente la representación externa (entrada-salida).
- Introdujo las ideas de controlabilidad y observabilidad.

La teoría de Kalman aportaba soluciones óptimas que conducían a sistemas de control que garantizaban unas determinadas especificaciones. Estos controles eran obtenidos directamente mediante la resolución de complicadas ecuaciones matriciales no lineales, las cuales generalmente tenían una solución única. En contraste, las técnicas clásicas en el dominio de la frecuencia aportan unas herramientas formales, típicamente herramientas gráficas, para el diseño de sistemas de control que no tenían una solución única.

En 1962, Rosenbrock establece las ideas básicas del control modal, en el cual el criterio de diseño es la colocación de los polos en lazo cerrado del sistema en posiciones especificadas. Más tarde en 1967, Wonham establece las relaciones entre el problema de control modal y la controlabilidad de la representación. Asimismo Luenberger descompone el problema de control en dos etapas: En la primera etapa se calcula el control como si el estado fuese accesible y en la segunda se busca un medio de estimar dicho estado a partir del conocimiento de la salida del sistema, tarea a la que aporta su *teoría de observadores* que había desarrollado en 1964.

En la década de los 60 se produjeron grandes avances en el desarrollo de las computadoras digitales, que son necesarias en los controles modernos por dos motivos. En primer lugar, se necesitan para resolver las ecuaciones de diseño matriciales que permiten obtener la ley de control. Esto se realiza de forma off-line (fuera de línea) durante el proceso de diseño. En segundo lugar, puesto que las leyes de control óptimas y los filtros son generalmente variantes con el tiempo, las computadoras son necesarias para implementar sobre los sistemas los esquemas de control moderno y filtrado.

Los sistemas de control que son implementados con computadores digitales deben ser formulados en tiempo discreto. Por tanto, el desarrollo en esta época de la *teoría de control digital* ([Jury 1960], [Kuo 1963]) fue algo natural.

La idea de usar computadores digitales para el *control de procesos industriales* también surgió durante este periodo. Los trabajos serios comenzaron en 1956 con el proyecto de

colaboración entre TRW y Texaco, que resultó en un sistema controlado por computador que fue instalado en la refinería de Port Arthur en Texas en 1959. El desarrollo de reactores nucleares durante la década de los 50 fue una motivación muy importante para explorar el control de procesos industriales y su instrumentación. En 1970, con los trabajos entre otros de K. Aström [Aström 1970], la importancia de los controles digitales en los procesos fue firmemente cimentada.

Con toda su potencia y ventajas, el control moderno también tenía algunas carencias. El comportamiento garantizado que se obtenía tras resolver las ecuaciones de diseño matriciales significaba que a menudo era posible diseñar un sistema de control que trabajara en la teoría sin precisar de ninguna intuición ingenieril sobre el problema. Por el contrario, las técnicas en el dominio de la frecuencia requieren de bastante intuición.

Otro problema es que un sistema de control moderno con algunas dinámicas del compensador puede dejar de ser robusto frente a perturbaciones, dinámicas no modeladas y ruido de medida. Por otra parte, la robustez es implementada en la aproximación del dominio de la frecuencia usando nociones tales como margen de fase y margen de ganancia.

Por tanto, en la década de los 70, especialmente en Gran Bretaña hubo gran actividad en intentar extender las técnicas en el dominio de la frecuencia y del lugar de las raíces a los sistemas multivariables. Esto condujo a Rosenbrock a introducir el concepto de *dominanza diagonal* con el que se busca reducir, no eliminar, la interacción en un sistema, y que se plasma en su método de diseño con el *diagrama inverso de Nyquist multivariable*.

En la misma dirección se realiza un gran esfuerzo para generalizar los conceptos propios de la respuesta en frecuencia a los sistemas multivariables, tarea en la que los trabajos de Owens, Kouvaritakis y McFarlane, bajo enfoques distintos, juegan un papel relevante, sin olvidar los desarrollos de Rosenbrock sobre las relaciones de estas formulaciones y las del espacio de estados.

Uno de los principales defensores de las técnicas clásicas aplicadas a sistemas multivariables fue I. Horowitz, cuya *teoría de realimentación cuantitativa* (QFT) [Horowitz 1963] permitía obtener controladores robustos trabajando sobre el diagrama de Nichols.

También por esta época aparecieron dos nuevas técnicas de control, el *control adaptativo* [Aström 89] y el *control predictivo basado en modelos* (M.B.P.C) [García 89]. El *control adaptativo* es un tipo especial de sistema de control no lineal que puede alterar sus

parámetros para adaptarse a un medio ambiente cambiante. Los cambios en el medio ambiente pueden representar variaciones en la dinámica del proceso o cambios en las características de las perturbaciones. Por su parte bajo el nombre *control predictivo basado en modelos* (M.B.P.C) se agrupan una diversidad de familias de estrategias de control que hacen uso explícito de un modelo del proceso para predecir el valor de la variable controlada durante un horizonte de tiempo.

También a comienzos de los 70 nació el *control inteligente* con técnicas tales como: lógica borrosa, redes neuronales, mecanismos de aprendizaje, tolerancia a fallos, etc. El control inteligente intenta sistematizar analíticamente sistemas de control con capacidades semejantes a la interacción del hombre con el entorno sobre el que actúa.

Desde los primeros años de la década de los ochenta se ha vuelto a considerar de nuevo el dominio frecuencial, hecho motivado principalmente por el *control robusto* y la *teoría  $H_{\infty}$* , con las aportaciones de Doyle, Glover, y Francis entre otros [Dorato, 87].

En 1981 J. Doyle and G. Stein mostraron la importancia de los diagramas del *valor singular* frente a la frecuencia en el diseño multivariable robusto. Usando estos diagramas, muchas de las técnicas clásicas del dominio de la frecuencia pueden ser incorporadas dentro de los diseños modernos. Este trabajo fue aplicado al control de aviones y al control de procesos por M. Athans entre otros.

A finales de los ochenta surgió un interés creciente por los temas de *modelado e identificación* [Ljung 87], se pretendía afrontar directamente los problemas que planteaban las inexactitudes de las representaciones matemáticas de las plantas industriales.

### 0.3 REFERENCIAS

A continuación se listan por orden alfabético las referencias citadas en este tema:

- Aström, K. J., Witenmark B. *Adaptive Control*. Addison- Wesley, MA, 1989.
- Aström, K. J., *Introduction to stochastic control theory*, New York: Academic Press, 1970.
- Black, H. S., *Stabilized feedback amplifiers*, Bell System Tech. J., 1934.
- Bode, H. W., *Feedback Amplifier Design*, Bell System Tech. J., vol. 19, p. 42, 1940.
- Dorato, P., *A historical review of robust control*, IEEE Control Systems Magazine, pp. 44-47. Abril 1987.

- Doyle, J. C., Stein, G., *Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis*, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, pp.4-16. Feb, 1981.
- Evans, W. R., *Graphical analysis of control systems*, Trans. AIEE, vol. 67, pp. 547-551, 1948.
- García C. et al., *Model predictive control: Theory and practice a survey*. Automatica, vol. 25, nº 3, 1989
- Horowitz I. M., *Synthesis of feedback systems*. Academic Press: New York, 1963.
- Hurwitz, A., *On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts*. Mathematische Annalen, vol. 46, pp. 273-284, 1895.
- Jury, E. I., *Recent advances in the field of sampled-data and digital control systems*, Proceedings of Conference International Federation Automatic Control, pp.240-246. Moscou 1960.
- Kalman, R. E, Bertram, J. E., *Control System Analysis and design via the "Second method of Lyapunov. I. Continuous-time systems"* Trans. ASME J. Basic Eng., pp. 371-393, June 1960.
- Kalman, R. E., *Contributiions to the theory of optimal control*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, vol.5, pp. 102-119, 1960a.
- Kalman, R. E., *A new approach to linear filtering and prediction problems*, ASME J. Basic Eng., vol.82, pp. 34-45, 1960b.
- Kalman, R. E., Bucy, R. S., *New results in linear filtering and prediction theory*. ASME J. Basic Eng., vol. 80, pp. 193-196, 1961.
- Kolmogorov, A. N., *Interpolation and Extrapolation*. Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math. vol. 5, pp. 3-14, 1941.
- Kuo, B. C., *Analysis and synthesis of sampled-data control systems*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1963.
- Ljung, L.,. *System Identification. theory for the user*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1987
- Lyapunov, M. A., *Probleme General de la stabilite du mouvement*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, vol. 9, pp. 203-474, 1907. (Traducido del articulo original publicado en 1892 en Comm.

Soc. Math. Kharkow y reimpresso como vol. 17 en Ann. Math. Studies. Princeton University Press. Princeton, N. J., 1949).

- Maxwell, J. C., *On governors*. Proc. Royal Soc. London, vol. 16, pp. 270-283, 1868.
- Nyquist, H., *Regeneration Theory*, Bell Syst. Tech. J. 1932
- Popov, V. M. *Absolute stability of nonlinear systems of automatic control*, Automat. Remote Control, vol. 22, nº 8, pp. 857-875, 1961.
- Routh, E. J., *A treatise on the stability of a given state of motion*, London: Macmillan & Co., 1877.



# TEMA 1

## MODELOS DE SISTEMAS CONTINUOS

### 1.1 INTRODUCCION

El primer paso en el estudio de un sistema físico es el desarrollo de una representación o *modelo* del mismo. Un modelo es una idealización del sistema físico, usado para reducir el esfuerzo de cálculo en el análisis y diseño del sistema. El modelo se desarrolla de forma que represente adecuadamente al sistema.

Al desarrollar un modelo para un sistema físico, ciertos parámetros y variables del sistema o relaciones entre sus componentes se pueden despreciar. Sin embargo, se debe de tener cuidado de no despreciar parámetros o relaciones que son cruciales para la precisión del modelo. Esto implica que un sistema físico pueda tener modelos diferentes dependiendo de la aplicación del modelo. Por ejemplo, un transistor tiene diferentes modelos dependiendo de la amplitud y frecuencia de la señal aplicada. Generalmente, se elige un modelo que resulte simple y que, al mismo tiempo, describa adecuadamente la conducta del sistema.

Los modelos se pueden dar en varias formas y con diferentes grados de formalismo matemático dependiendo del grado de sofisticación necesarios. Así, se pueden usar *modelos mentales*, como los usados en la vida diaria, sin ningún formalismo matemático. Por ejemplo este es el caso del modelo usado cuando se conduce un automóvil (“al girar el volante el automóvil gira” o “al pisar el freno el automóvil reduce la velocidad”).

Para ciertas aplicaciones, la descripción del sistema se puede hacer mediante *modelos gráficos* y tablas numéricas. Por ejemplo, un sistema lineal se puede describir mediante su diagrama de Bode o las gráficas de respuesta a un impulso o a un escalón.

Para aplicaciones más avanzadas necesitan modelos que describan las relaciones entre sus variables y componentes en término de expresiones matemáticas como

ecuaciones diferenciales o en diferencias, es decir, usar modelos matemáticos. Dependiendo del tipo de ecuaciones diferenciales o en diferencias usadas, estos modelos matemáticos serán continuos o discretos, lineales o no lineales, deterministas o estocásticos, etc.

Los modelos matemáticos se pueden obtener de dos formas distintas pero no excluyentes:

- *Modelización matemática.* Es un método analítico que usa las leyes físicas (como las leyes de Newton o las leyes de Kirchoff) para describir la conducta dinámica del proceso. El modelado depende totalmente de la aplicación y a menudo tiene sus raíces en la tradición y en las técnicas específicas del área de aplicación. Generalmente, supone considerar el sistema dividido en subsistemas cuyas propiedades son conocidas de experiencias anteriores y de los que se tienen modelos matemáticos. El modelo del sistema completo se obtiene uniendo matemáticamente los modelos de los subsistemas considerados.
- *Identificación de sistemas.* Este es un procedimiento experimental. En este método se tienen que realizar algunos experimentos sobre el sistema; un modelo del sistema es obtenido a partir de los datos registrados en los experimentos, estimando valores numéricos de los parámetros del modelo.

Hay dos procedimientos de modelado y análisis de sistemas lineales usados habitualmente: el procedimiento de la función de transferencia o del dominio frecuencial, y el procedimiento en el espacio de estados.

El método en el espacio de estados puede resultar novedoso a ingenieros acostumbrados a pensar en términos de funciones de transferencia. Pero es una forma natural de representación de sistemas dinámicos para matemáticos y físicos.

La representación en el espacio de estados facilita la aplicación de algoritmos de diseño asistido por ordenador. Además, se observan más fácilmente algunos desarrollos teóricos de control óptimo, estimación y la relación entre variables internas y variables externas de entrada y salida. Asimismo, el estudio de sistemas de control con más de una entrada y/o más de una salida es más fácilmente tratable en el espacio de estados.

En este tema se estudian la representación en el espacio de estados de sistemas continuos y la resolución de las ecuaciones diferenciales de estado. A continuación se enuncian dos propiedades propias de este tipo de representación: la controlabilidad y la

observabilidad. La parte final del tema se dedica al diseño de sistemas de control en el espacio de estados, en concreto al diseño mediante la ubicación de polos y al diseño de observadores.

## 1.2 REPRESENTACION EN EL ESPACIO DE ESTADOS DE SISTEMAS CONTINUOS

La noción de *estado* de un sistema dinámico es una noción fundamental en física. La premisa básica de la dinámica newtoniana es que la evolución futura de un proceso dinámico está completamente determinada por su estado actual. Esta premisa sirve como base para una definición abstracta del estado de un sistema dinámico.

Definición: El *estado de un sistema dinámico* es un conjunto de cantidades físicas, cuyas especificaciones (en ausencia de excitación externa) determina completamente la evolución del sistema.

Un sistema continuo SISO<sup>1</sup> invariante en el tiempo se puede representar por un modelo lineal descrito mediante una ecuación diferencial ordinaria de coeficientes constantes de orden  $n$  de la forma:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t) \quad (1.1)$$

donde  $u(t)$  es la entrada del sistema en el instante  $t$  e  $y(t)$  es la correspondiente salida del sistema en ese mismo instante.

El comportamiento del sistema se describe mediante su *función de transferencia*  $G(s)$  que se obtiene al aplicar la transformada de Laplace sobre la ecuación (1.1) considerando condiciones iniciales nulas:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (1.2)$$

La forma de la respuesta temporal del sistema está determinada por la localización de los *ceros* y los *polos* de la función de transferencia  $G(s)$ .

---

<sup>1</sup> SISO (Simple Input - Simple Output) es el acrónimo inglés que se utiliza para designar a los sistemas que poseen una sola entrada y una única salida.

La representación en el espacio de estados de este sistema es un conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden, que se pueden agrupar en una ecuación diferencial vectorial de la forma:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \quad (1.3)$$

donde  $x$  es el vector de estados de dimensión  $n \times 1$ ,  $A$  es una matriz constante de dimensión  $n \times n$  y  $b$  es un vector constante de dimensión  $n \times 1$ .

La ecuación de salida asociada, con  $n > m$  es:

$$y(t) = C \cdot x(t) \quad (1.4)$$

donde  $C$  es una matriz de dimensión  $1 \times n$ .

En el caso que  $n=m$  la ecuación de salida toma la forma:

$$y(t) = C \cdot x(t) + d \cdot u(t) \quad (1.5)$$

donde  $d$  es una constante.

En la Figura 1.1 se muestra la representación en diagramas de bloques del sistema descrito por las ecuaciones (1.3) y (1.4).

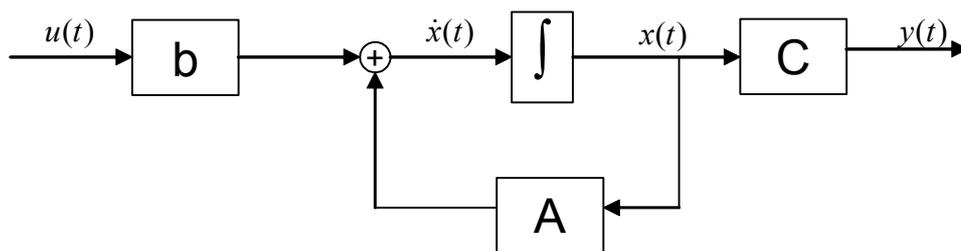


Figura 1.1: Diagrama de bloques del modelo en variables de estado de un sistema continuo.

La solución de las ecuaciones diferenciales (1.3) requiere el conocimiento de las condiciones iniciales del sistema, es decir, el valor del vector de estados  $x_0 = x(t_0)$  en el instante inicial.

A partir de las ecuaciones (1.3) y (1.4) o (1.5) es posible obtener la función de transferencia  $G$  del sistema:

$$G(s) = C \cdot [s \cdot I - A]^{-1} b + d \quad (1.6)$$

A la matriz  $[s \cdot I - A]^{-1}$  se le suele representar con el símbolo  $\Phi(s)$  y se le denomina *matriz resolvente*. Es la transformada de Laplace de la matriz de transición de estados que se verá a continuación. La ecuación (1.5) pone de manifiesto el hecho de que los polos de la función de transferencia son iguales a los autovalores de la matriz  $A$ .

Para sistemas invariantes MIMO<sup>2</sup> el modelo en el espacio de estados es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Si el sistema tiene  $r$  entradas y  $m$  salidas, entonces:

- $u(t)$  es el vector de entradas de dimensión  $r \times 1$ .
- $y(t)$  es el vector de salidas de dimensión  $m \times 1$ .
- $A$  es la matriz que describe la dinámica del sistema de dimensión  $n \times n$ .
- $B$  es la matriz de entrada de dimensión  $n \times r$ .
- $C$  es la matriz de salida de dimensión  $m \times n$ .
- $D$  es la matriz de alimentación directa de dimensión  $m \times r$ .

Modelos equivalentes MIMO se pueden desarrollar en la forma de una función de transferencia matricial, cuyos elementos son las funciones de transferencia de las componentes individuales de los vectores de entrada y salida.

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1r}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{m1}(s) & \dots & G_{mr}(s) \end{bmatrix} = C \cdot [s \cdot I - A]^{-1} B + D \quad (1.8)$$

<sup>2</sup> MIMO (Multiple Input -Multiple Output) es el acrónimo inglés que se utiliza para designar a los sistemas que poseen varias entradas y varias salidas.

Por lo general este modelo es bastante voluminoso, por lo que se prefiere usar el modelo en el espacio de estados.

Para sistemas variables con el tiempo también se usan modelos en el espacio de estados pero suponiendo que las matrices que definen la estructura del sistema son función del tiempo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= C(t) \cdot x(t) + D(t) \cdot u(t)\end{aligned}\tag{1.9}$$

Para este tipo de sistemas los métodos de la transformada de Laplace no suelen aplicarse.

◆ **Ejemplo 1.1:** *Masa con resorte y amortiguamiento sobre móvil*

Sobre un móvil (ver Figura 1.2) que se mueve con una aceleración  $u(t)$  se sitúa una masa  $m$  sujeta a la pared del móvil por un muelle de constante de elasticidad  $k$  y un amortiguador de coeficiente de amortiguación  $b$ .

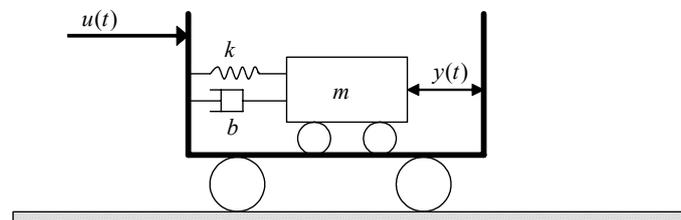


Figura 1.2: Masa con resorte y amortiguamiento sobre móvil

Para este sistema la variable de entrada es la aceleración  $u(t)$  y la variable de salida es el desplazamiento  $y(t)$ .

La ecuación del movimiento de este sistema se obtiene aplicando la segunda ley de Newton:

$$F = m \cdot a$$

Donde  $F$  es la suma de todas las fuerzas aplicadas a cada cuerpo en el sistema,  $m$  es la masa del cuerpo y  $a$  es el vector aceleración de cada cuerpo.

En este sistema las fuerzas que están actuando son las correspondientes al muelle y al amortiguador, que actúan en la dirección horizontal:

$$F = -k \cdot y - b \cdot \frac{dy}{dt}$$

La aceleración total es:

$$a = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - u(t)$$

Con lo que la ecuación del movimiento es:

$$m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{dy(t)}{dt} + k \cdot y(t) = m u(t)$$

Tomando la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas sobre la ecuación anterior:

$$m \cdot s^2 Y(s) + b \cdot s Y(s) + k \cdot Y(s) = m U(s)$$

Luego la función de transferencia tendrá la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{m}{m \cdot s^2 + b \cdot s + k} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m} \cdot s + \frac{k}{m}}$$

Si se definen las siguientes variables de estado:

$$x_1 = y \quad x_2 = \frac{dy}{dt}$$

Entonces la ecuación de estados que describe las dinámicas del sistema es:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

Y la ecuación de salida es:

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Fácilmente se comprueba que aplicando la expresión (1.5) se obtiene la función de transferencia  $G(s)$ .

◆

◆ **Ejemplo 1.2:** Red eléctrica RLC

Se considera la red eléctrica RLC de la Figura 1.3. La variable de entrada es la tensión aplicada  $u=v_s$  y la de salida es la intensidad de corriente por la resistencia  $R$ , es decir,  $y=i_1$ . Como variables de estado se pueden elegir la caída de tensión  $x_1=v_c$  en el condensador  $C$  y la corriente  $x_2=i_2$  a través de la inductancia  $L$ .

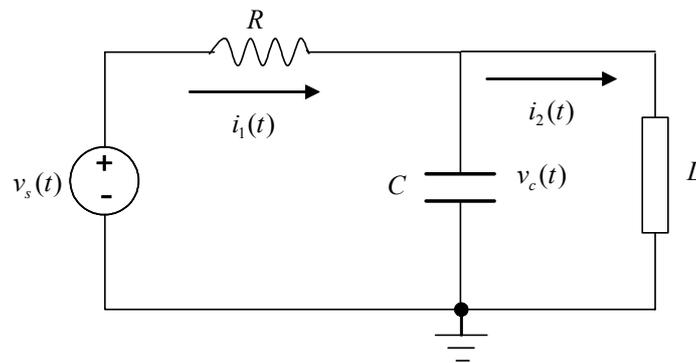


Figura 1.3: Red eléctrica RLC

Aplicando las leyes de Kirchoff a este circuito se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}v_s &= R \cdot i_1 + v_c \\ C \cdot \frac{dv_c}{dt} &= i_1 - i_2 \\ v_c &= L \cdot \frac{di_2}{dt}\end{aligned}$$

Operando sobre estas expresiones se obtienen las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}\frac{dv_c}{dt} &= -\frac{1}{R \cdot C} v_c - \frac{1}{C} i_2 + \frac{1}{R \cdot C} v_s \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{1}{L} v_c\end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R \cdot C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R \cdot C} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

La ecuación de salida es:

$$y = \frac{1}{R}u - \frac{1}{R}x_1$$

Este caso se corresponde con el indicado en la ecuación (1.5).

La función de transferencia  $G(s)$  se obtiene aplicando la ecuación (1.6):

$$G(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s - \frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{R}s^2 + \frac{C-1}{R^2C}s + \frac{1}{CL}}{s^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{CL}}$$

◆

◆ **Ejemplo 1.3:** Motor de corriente continua excitado por separado

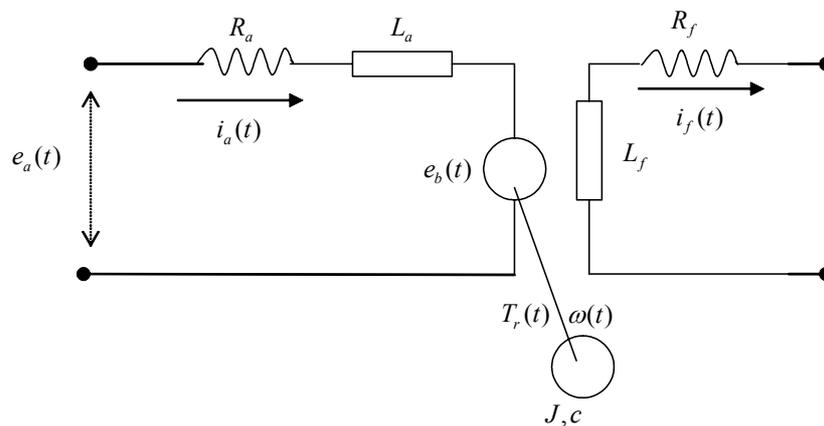


Figura 1.4: Diagrama esquemático del motor de corriente continua excitado por separado

En la Figura 1.4 se representa un diagrama esquemático de un motor de corriente continua. En dicha figura  $R_a$  y  $L_a$  representan la resistencia y la inductancia de la armadura.  $e_b(t)$  representa la fuerza contra-electromotriz debida a la rotación de los conductores de la armadura en el campo magnético. Análogamente,  $R_f$  y  $L_f$  indican la resistencia y la inductancia de la bobina del campo. Las no-linealidades y la dependencia de los parámetros con el tiempo de estas bobinas se han despreciado.

Se supone que la bobina del campo (el estator) está conectada a una fuente de voltaje constante y la bobina de la armadura (el rotor) está conectada a una fuente de voltaje variable  $v(t)$ . De esta forma, la intensidad de campo  $e_f$  se puede considerar constante. El voltaje  $e_a(t)$  puede variar para cambiar la velocidad angular  $\omega(t)$  del rotor.

El flujo magnético de la bobina del campo es una constante cuando  $i_f$  se supone constante. El torque  $T_r$  con el eje del motor es proporcional a  $i_a$  por una constante  $K_m$  del motor.

$$T_r = K_m \cdot i_a$$

El voltaje  $e_b(t)$  generado como resultado de la rotación, es proporcional a la velocidad de rotación del eje  $\omega$ , por una constante  $K_g^3$  del generador:

$$e_b(t) = K_g \cdot \omega(t)$$

Aplicando las leyes de Kirchoff al circuito de la armadura se obtiene:

$$e_a(t) = L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} + R_a \cdot i_a(t) + e_b(t)$$

El torque del rotor  $T_r(t)$  y la velocidad angular están relacionados mediante la segunda ley de Newton de la dinámica:

$$T_r(t) = T_d(t) + J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + c \cdot \omega(t)$$

Donde  $T_d(t)$  es el torque de la carga en el eje del rotor,  $c$  es la constante de rozamiento viscoso y  $J$  es el momento de inercia de la carga.

Combinando estas ecuaciones se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} \frac{di_a(t)}{dt} &= -\frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{K_g}{L_a} \omega(t) + \frac{1}{L_a} e_a(t) \\ \frac{d\omega(t)}{dt} &= \frac{K_m}{J} i_a(t) - \frac{c}{J} \omega(t) - \frac{1}{J} T_d(t) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en la forma matricial de ecuaciones de estado:

$$\begin{pmatrix} \frac{di_a(t)}{dt} \\ \frac{d\omega(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_g}{L_a} \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{c}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_a(t) \\ T_d(t) \end{pmatrix}$$

<sup>3</sup> En unidades consistentes,  $K_m$  es igual a  $K_g$ , pero en algunos casos la constante motor-torsión viene dada en otras unidades, como onzas-pulgadas por amperes, y la constante del generador debe de expresarse en unidades de voltios por 1000 rpm.

Si se considera como salida del sistema la velocidad de rotación del motor, entonces la ecuación de salida es:

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$$

Si las variables de salida son el torque desarrollado por el eje del rotor y la velocidad de rotación, entonces se tiene como ecuación de salida:

$$y = \begin{pmatrix} K_m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$$

La función de transferencia matricial es:

$$G(s) = \begin{pmatrix} K_m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + \frac{R_a}{L_a} & \frac{K_g}{L_a} \\ -\frac{K_m}{J} & s + \frac{c}{J} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{pmatrix}$$

Operando se obtiene:

$$G(s) = \frac{1}{\left(s + \frac{R_a}{L_a}\right)\left(s + \frac{c}{J}\right) + \frac{K_m \cdot K_g}{J \cdot L_a}} \begin{pmatrix} \frac{K_m}{L_a} \cdot \left(s + \frac{c}{J}\right) & \frac{K_m \cdot K_g}{J \cdot L_a} \\ \frac{K_m}{J \cdot L_a} & -\frac{1}{J} \cdot \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) \end{pmatrix}$$

♦

### 1.3 TRANSFORMACIÓN DE VARIABLES DE ESTADO

La representación en variables de estado no es única. De hecho, hay un número infinito de posibles elecciones de las variables de estado para representar al mismo sistema físico. Es posible pasar de una definición particular del vector de estados  $x$  a otra definición  $x'$  mediante una transformación lineal de la forma:

$$x' = T \cdot x \quad (1.10)$$

Donde  $T$  es una matriz no singular de dimensión  $n \times n$ , de forma que siempre se puede hacer la transformación inversa:

$$x = T^{-1} \cdot x' \quad (1.11)$$

Las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  de la representación original del sistema en variables de estado se transforman ahora en las matrices  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  y  $D'$ . Para obtener sus expresiones se va a suponer que  $T$  es constante, en caso contrario, habría que incluir su derivada en las expresiones a deducir. Se sustituye en (1.7)  $x$  por (1.11) con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} T^{-1} \cdot \dot{x}' &= A \cdot T^{-1} \cdot x' + B \cdot u \\ y &= C \cdot T^{-1} \cdot x' + D \cdot u \end{aligned} \quad (1.12)$$

O equivalentemente:

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= T \cdot A \cdot T^{-1} \cdot x' + T \cdot B \cdot u \\ y &= C \cdot T^{-1} \cdot x' + D \cdot u \end{aligned} \quad (1.13)$$

Que ya está en la forma normal:

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= A' \cdot x' + B' \cdot u \\ y &= C' \cdot x' + D' \cdot u \end{aligned} \quad (1.14)$$

Luego comparando (1.14) con (1.13) se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} A' &= T \cdot A \cdot T^{-1} & B' &= T \cdot B \\ C' &= C \cdot T^{-1} & D' &= D \end{aligned} \quad (1.15)$$

En el lenguaje del álgebra matricial se dice que la matriz  $A'$  de la dinámica del sistema transformado es *similar* a la matriz  $A$  de la dinámica del sistema original. Un hecho bien conocido del álgebra matricial es que matrices similares tienen el mismo polinomio característico. Ello supone que la función de transferencia entre las variables de entrada y de salida no dependen de la definición del vector de estados.

♦ **Ejemplo 1.4:** *Masas acopladas mediante un muelle*

Las ecuaciones del movimiento de las masas  $m_1$  y  $m_2$  acopladas mediante un muelle (ver Figura 1.5) y que se desplazan en una dirección son:

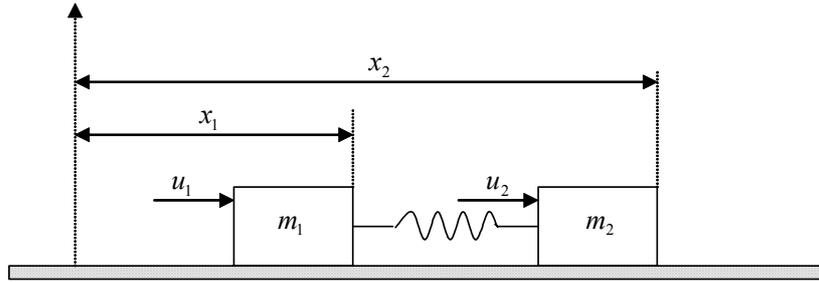


Figura 1.5: Masas acopladas mediante un muelle

$$\ddot{x}_1 + \frac{K}{m_1}(x_1 - x_2) = \frac{u_1}{m_1}$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{K}{m_2}(x_2 - x_1) = \frac{u_2}{m_2}$$

donde  $u_1$  y  $u_2$  son las aceleraciones asociadas a las fuerzas aplicadas externamente y  $K$  es la constante del muelle.

Si se definen como variables de estado a:

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dot{x}_1 \quad \dot{x}_2]^T$$

las matrices que definen las ecuaciones de estado son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K}{m_1} & \frac{K}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{K}{m_2} & -\frac{K}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

Sin embargo, muchas veces es mejor definir el movimiento de este sistema en función del movimiento del centro de masas  $x_c$  y de la diferencia entre las posiciones de las dos masas  $\delta$ :

$$x_c = \frac{m_1}{M}x_1 + \frac{m_2}{M}x_2 \quad M = m_1 + m_2$$

$$\delta = x_1 - x_2$$

Elijiendo ahora como variables de estado a:

$$x' = [x_c \quad \delta \quad \dot{x}_c \quad \dot{\delta}]^T$$

Se comprueba que la matriz de transformación entre las dos representaciones es:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{M} & \frac{m_2}{M} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1}{M} & \frac{m_2}{M} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego las matrices del sistema transformado son:

$$A' = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{KM}{m_1 \cdot m_2} \end{bmatrix} \quad B' = T \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{m_1} & -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

♦

## 1.4 FORMAS CANÓNICAS

La elección de las variables de estado va a depender de la aplicación en concreto. Así, en aplicaciones donde es necesaria la realimentación es preferible elegir como vector de estados a un conjunto de variables físicas que pueden medirse directamente. Pero también suelen utilizarse representaciones que simplifiquen la estructura de las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$ , tales como las formas canónicas controlable y observable, o la forma canónica de Jordan.

### 1.4.1 Forma canónica controlable

Si se considera un sistema SISO su representación en variables de estado en la forma canónica controlable se puede generar directamente de la función de transferencia (1.2) o de la ecuación diferencial (1.1) y tiene la siguiente expresión:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t); \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.16)$$

$$y(t) = [b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0] \cdot x(t)$$

Cuya representación en diagrama de bloques es la que se muestra en la Figura 1.6

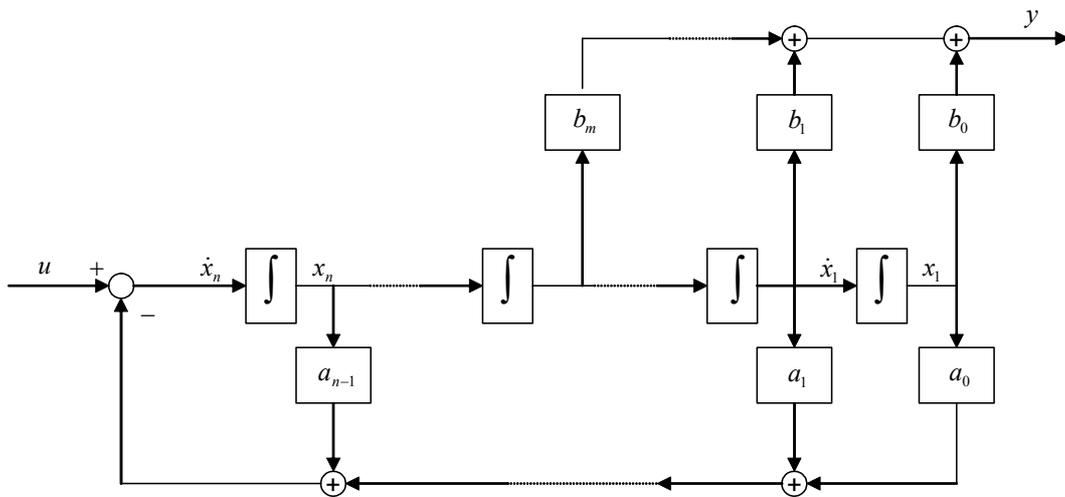


Figura 1.6: Diagrama de bloques de la representación en variables de estado en la forma canónica controlable.

En el caso en que  $m=n$  la ecuación de salida toma la forma:

$$y(t) = [b_0 \quad \dots \quad b_{n-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0] \cdot x(t) + b_n \cdot u(t) \quad (1.17)$$

En este caso el diagrama de bloques de la Figura 1.6 se debe modificar para incluir el término  $b_n \cdot u(t)$ .

El nombre de *forma controlable* corresponde al hecho de que si una representación no-mínima<sup>4</sup> se pone en esta forma entonces la representación será controlable pero no observable.

<sup>4</sup> Representación no-mínima: Representación en variables de estado de orden mayor al orden de la ecuación diferencial que describe al sistema.

◆ **Ejemplo 1.5:**

Para un sistema de segundo orden descrito por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 \cdot y(t) = \alpha \cdot \frac{du(t)}{dt} + \beta \cdot u(t)$$

Cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{\alpha \cdot s + \beta}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

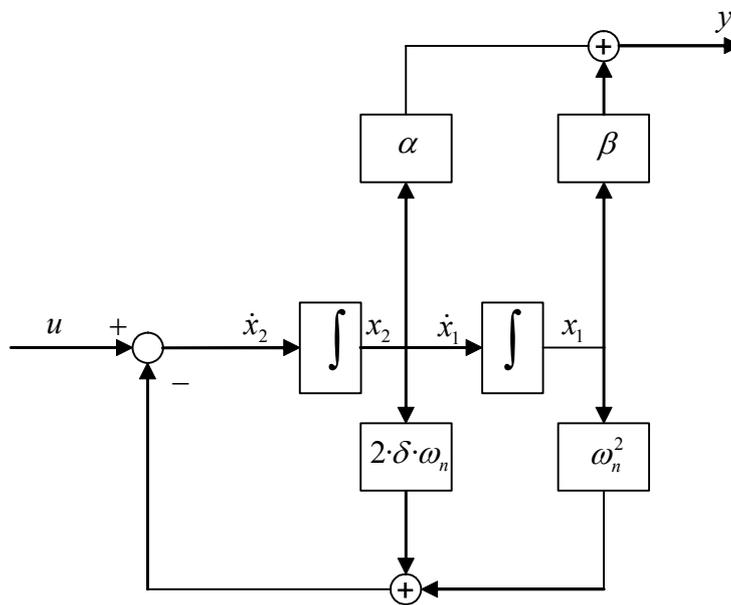


Figura 1.7: Forma canónica controlable para un sistema de segundo orden.

La representación en la forma canónica observable es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2 \cdot \delta \cdot \omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = [\beta \quad \alpha] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

En la Figura 1.7 se muestra el diagrama de bloques para este sistema.

◆

### 1.4.2 Forma canónica observable

La forma canónica observable recibe su nombre por una razón análoga a la de la forma controlable. Para una representación mínima la forma observable tiene la forma:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \cdot u(t); \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.18)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \cdot x(t)$$

En el caso de que  $n=m$  la ecuación de salida toma la forma:

$$y(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \cdot x(t) + g_0 \cdot u(t) \quad (1.19)$$

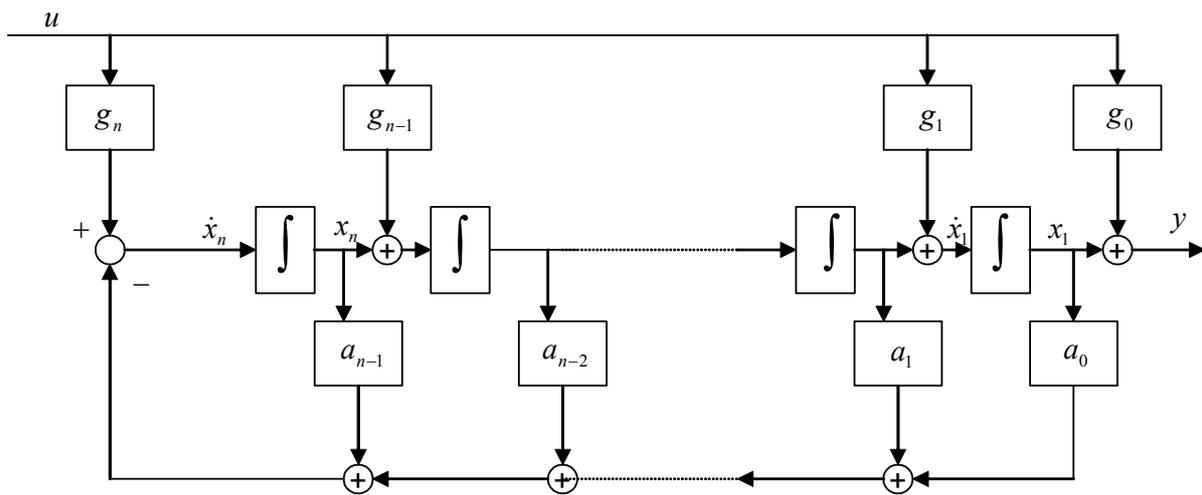


Figura 1.8: Diagrama de bloques de la representación en variables de estado en la forma canónica observable.

En la Figura 1.8 se muestra el diagrama de bloques para la forma canónica observable. Los elementos  $g_i$  de la matriz  $B$  provienen del desarrollo en serie de Laurent<sup>5</sup> en el origen  $s=0$  de  $G(s)$

<sup>5</sup> Las series de Laurent son objeto de estudio en los libros de Variable Compleja, como por ejemplo: *Variable Compleja y aplicaciones*. R. V. Churchill & J. W. Brown. Ed. McGraw-Hill

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \cdot s^{-k} = g_0 + g_1 \cdot s^{-1} + g_2 \cdot s^{-2} + \dots + g_n \cdot s^{-n} + \dots \quad (1.20)$$

y se obtienen resolviendo la siguiente integral compleja (recuérdese que  $s = \sigma + i \cdot \omega_d$  es una variable compleja) sobre cualquier contorno C cerrado simple, orientado en sentido antihorario, en torno del origen:

$$g_k = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int_C G(s) \cdot s^k \quad (1.21)$$

En el caso que  $m < n$  entonces  $g_0 = 0$ , además para una  $G(s)$  dada en la forma (1.2) existe una expresión alternativa<sup>6</sup> para calcular los coeficientes  $g_i$ :

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ \dots \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \dots \\ \dots \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Por otra parte si se compara la forma controlable (1.16) con la forma observable (1.18) se observa que la matriz  $A$  tiene la misma forma, mientras que las matrices  $B$  y  $C$  son distintas. Existe otra variante de la forma canónica observable<sup>7</sup> que se caracteriza porque su matriz  $A$  es distinta a la de (1.16), pero tiene la ventaja de que  $B$  se obtiene de forma directa a partir de los coeficientes de la función de transferencia.

♦ **Ejemplo 1.6:**

La función de transferencia del Ejemplo 1.5, se puede describir de acuerdo con (1.2) como:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Luego  $b_1 = \alpha$ ;  $b_0 = \beta$ ;  $a_1 = 2 \cdot \delta \cdot \omega_n$ ;  $a_0 = \omega_n^2$ .

El desarrollo en serie de Laurent de  $G(s)$  es:

<sup>6</sup> La deducción de esta expresión se puede encontrar en el libro *Linear Systems*. T. Kailath. Ed. Prentice-Hall. (1980)

<sup>7</sup> Como se puede ver por ejemplo en el libro *Ingeniería de Control Moderna* de K. Ogata

$$G(s) = g_0 + g_1 \cdot s^{-1} + g_2 \cdot s^{-2}$$

En este caso  $n=2$  y  $m=1$  luego como  $m < n$   $g_0=0$ . Los coeficientes  $g_1$  y  $g_2$  se pueden calcular a través de (1.22):

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los valores de  $a_1$ ,  $b_0$  y  $b_1$  en la expresión anterior:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cdot \delta \cdot \omega_n & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Operando se obtiene:

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha \\ g_2 &= \beta - 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot \alpha \end{aligned}$$

Luego la forma canónica observable es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2 \cdot \delta \cdot \omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta - 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot \alpha \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En la Figura 1.9 se muestra el diagrama de bloques para este sistema.

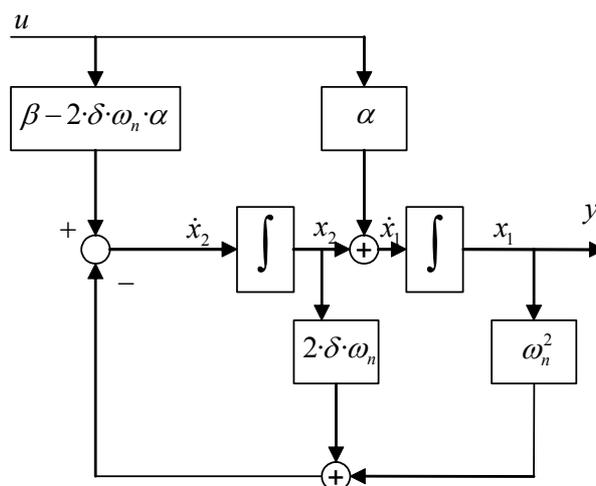


Figura 1.9: Forma canónica observable para un sistema de segundo orden.

♦

### 1.4.3 Forma canónica de Jordan

La forma canónica de Jordan proporciona los modos desacoplados del sistema. En ella la matriz  $A$  es una matriz diagonal cuyos valores son los autovalores  $\lambda_i$  (polos de la función de transferencia) del sistema, si estos son distintos.

En el caso SISO la representación en variables de estado en forma canónica de Jordan toma la siguiente expresión:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t); \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.23)$$

$$y(t) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \cdot x(t) + d \cdot u(t)$$

Los coeficientes  $c_i$  y los autovalores  $\lambda_i$  se obtienen desarrollando en fracciones simples la función de transferencia  $G(s)$ :

$$G(s) = d + \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} \quad (1.24)$$

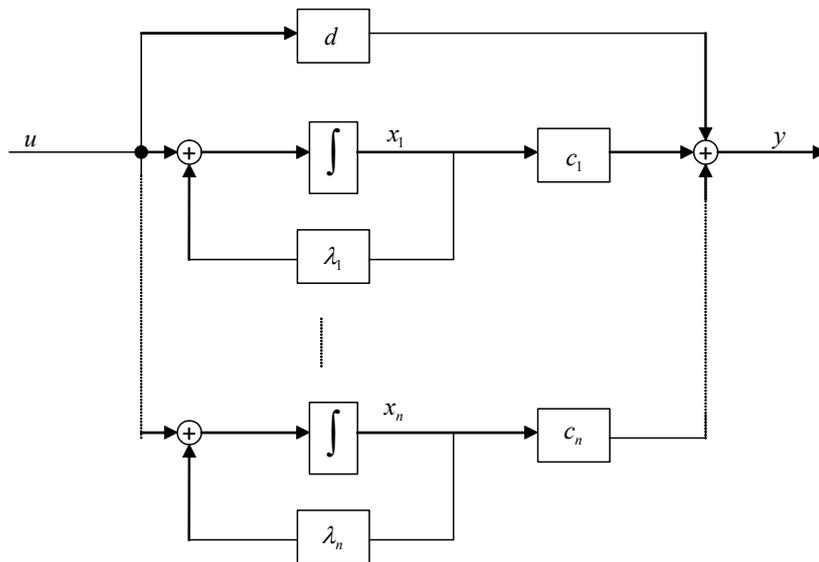


Figura 1.10: Diagrama de bloques de la representación en variables de estado en la forma canónica de Jordan.

En la Figura 1.10 se muestra el diagrama de bloques para la forma canónica de Jordan. Se observa claramente la separación de modos del sistema.

◆ **Ejemplo 1.7:**

Para el sistema de segundo orden del ejemplo 1.5, los autovalores (polos de la función de transferencia) son:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \cdot \omega_n \pm \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}$$

Los correspondientes residuos están dados por:

$$c_{1,2} = \frac{\alpha \cdot (-\delta \cdot \omega_n \pm \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}) + \beta}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}}$$

Luego, la representación en la forma canónica de Jordan es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\delta \cdot \omega_n + \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1} & 0 \\ 0 & -\delta \cdot \omega_n - \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha \cdot (-\delta \cdot \omega_n + \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}) + \beta}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}} & \frac{\alpha \cdot (-\delta \cdot \omega_n - \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}) + \beta}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◆

Si lo que quiere es pasar de una representación en variables de estado cualquiera a la forma canónica de Jordan, existen varios métodos para ello. Un método indirecto sería calcular la función de transferencia del sistema a partir de la representación en variables de estado original y a partir de la función de transferencia obtener la representación canónica de Jordan.

Pero también se puede obtener la matriz de transformación  $T$  entre las dos representaciones, y usar la ecuación (1.10) para la transformación. Para ello hay que tener en cuenta que la matriz  $A'$  en la forma canónica de Jordan es una matriz diagonal formada por los autovalores del sistema, que son invariantes a la representación elegida, con lo que vale con calcular los autovalores de la matriz  $A$  original a partir de la ecuación:

$$|\lambda \cdot I - A| = 0 \quad (1.25)$$

También hay que tener en cuenta que en la forma de Jordan  $B'$  es un vector de unos, de forma que las ecuaciones de transformación son:

$$\begin{aligned} T \cdot A' &= A \cdot T \\ T \cdot B' &= B \end{aligned} \quad (1.26)$$

permiten tener  $n^2+n$  ecuaciones, de las cuales  $n^2$  son independientes, con lo que es posible resolverlas para obtener los coeficientes de la matriz  $T$ . Una vez conocida  $T$ ,  $C'$  se calcula mediante la expresión:

$$C'^T = C^T \cdot T \quad (1.27)$$

◆ **Ejemplo 1.8:**

Para el sistema de segundo orden del ejemplo 1.5, los autovalores son:

$$|\lambda \cdot I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \omega_n^2 & \lambda + 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot \lambda + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\delta \cdot \omega_n \pm \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}$$

Las expresiones (1.26) quedan:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\delta \cdot \omega_n + \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1} & 0 \\ 0 & -\delta \cdot \omega_n - \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2 \cdot \delta \cdot \omega_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}} & T_{12} &= \frac{1}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}} \\ T_{21} &= \frac{-\delta \cdot \omega_n + \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}} & T_{22} &= \frac{\delta \cdot \omega_n + \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}} \end{aligned}$$

Luego:

$$C = (\beta \quad \alpha) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\delta \cdot \omega_n + \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1} & \delta \cdot \omega_n + \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}}$$

◆

Si hay raíces repetidas, la representación canónica de Jordan sufre algunos cambios.

◆ **Ejemplo 1.9:**

Si el autovalor  $\lambda_1$  posee una multiplicidad 3, la ecuación (1.23) toma la forma:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{bmatrix} u(t); \quad x(t_0) = x_0$$

Se observa en  $A$  que el bloque asociado al autovalor  $\lambda_1$  posee unos sobre la diagonal principal. Esto siempre es así para modelos de sistemas SISO de dimensión mínima. No necesitan ser todos unos para sistemas MIMO.

◆

Si algunos de los autovalores son pares complejos conjugados entonces la matriz de Jordan  $A$  tendrá valores complejos en su diagonal y el vector de estados  $x(t)$  tendrá alguna componente compleja. Para evitar esta situación se introduce la forma canónica de Jordan modificada que mantiene la característica de separación de modos sin que aparezcan valores complejos en la matriz  $A$  ni el vector de estados  $x(t)$ .

◆ **Ejemplo 1.10:**

Por ejemplo, si se tiene la siguiente forma canónica:

$$A = \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sigma - j\omega & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Una transformación de la forma:

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & -j/2 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & -j/2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ j & -j & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Lleva a una descripción del sistema mediante únicamente valores reales:

$$A = \begin{bmatrix} \sigma & \omega & 0 & \dots \\ -\omega & \sigma & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

♦

## 1.5 RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE ESTADO

Si se considera un sistema de parámetros constantes (invariante en el tiempo). La solución a la ecuación diferencial (1.7) está dada por la solución a la ecuación diferencial de estados homogénea más una solución particular del sistema completo.

La ecuación diferencial de estados “homogénea” es:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) \quad (1.28)$$

Su solución tiene la siguiente forma:

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot k \quad (1.29)$$

donde k es un vector constante y  $e^{A \cdot t}$  es la función exponencial matricial definida mediante la serie de Taylor:

$$e^{A \cdot t} = I + A \cdot t + A^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + A^3 \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (1.30)$$

### ♦ Demostración:

Para verificar la solución (1.29) se deriva  $x(t)$ :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(e^{A \cdot t})}{dt} \cdot k$$

Considerando el desarrollo en serie (1.30):

$$\frac{de^{A \cdot t}}{dt} = A + A^2 \cdot t + A^3 \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots = A \left( I + A \cdot t + A^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + A^3 \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots \right) A \cdot e^{A \cdot t}$$

Con lo que (1.31) queda:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot e^{At} \cdot k = A \cdot x(t)$$

Con lo que se demuestra que (1.29) es solución de (1.28)

◆

Si se dan una condiciones iniciales,  $x(t_0)=x_0$ , el vector constante  $k$  se puede calcular particularizando (1.29) en el instante  $t_0$ :

$$x(t_0) = e^{A \cdot t_0} \cdot k$$

Despejando  $k$ :

$$k = \left( e^{A \cdot t_0} \right)^{-1} \cdot x(t_0)$$

Por lo tanto la solución (1.29) se puede expresar como:

$$x(t) = e^{At} \cdot \left( e^{A \cdot t_0} \right)^{-1} \cdot x(t_0) = e^{A \cdot (t-t_0)} \cdot x(t_0) \quad (1.31)$$

A la matriz  $e^{A \cdot (t-t_0)}$  se le denomina *matriz de transición de estados* ya que permite calcular el vector de estados en un instante  $t$  conocido el vector de estados en un instante  $t_0$ . La matriz de transición de estados depende únicamente de la matriz  $A$ , es decir, de la dinámica del sistema.

Para calcular una solución “particular” de (1.7) se puede usar el método de variación de la constante. Así dicha solución tendrá la siguiente forma:

$$x(t) = e^{At} \cdot k(t) \quad (1.32)$$

donde  $k(t)$  es un vector función del tiempo que hay que determinar. Si se calcula la derivada de (1.32):

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(e^{At})}{dt} \cdot k(t) + e^{At} \cdot \frac{dk(t)}{dt} = A \cdot e^{At} \cdot k(t) + e^{At} \cdot \dot{k}(t)$$

Sustituyendo la expresión anterior en (1.7) se obtiene:

$$A \cdot e^{A \cdot t} \cdot k(t) + e^{A \cdot t} \cdot \dot{k}(t) = A \cdot e^{A \cdot t} \cdot k(t) + B \cdot u(t) \Rightarrow e^{A \cdot t} \cdot \dot{k}(t) = B \cdot u(t)$$

Multiplicando por la izquierda por  $e^{-A \cdot t}$ :

$$\dot{k}(t) = e^{-A \cdot t} \cdot B \cdot u(t)$$

Luego el vector  $k(t)$  se puede obtener integrando:

$$k(t) = \int_{t_{\text{inf}}}^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

Obsérvese que el límite inferior  $t_{\text{inf}}$  de la integral aún no se puede especificar, puesto que es necesario poner la solución particular junto a la solución de la ecuación homogénea para obtener la solución completa.

La solución particular (1.32) será por tanto:

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot \int_{t_{\text{inf}}}^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau = \int_{t_{\text{inf}}}^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \quad (1.33)$$

La solución completa se obtiene sumando esta solución particular a la solución de la ecuación homogénea (1.31):

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_{\text{inf}}}^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \quad (1.34)$$

Ahora si es posible determinar el valor de  $t_{\text{inf}}$  en la integral. Para ello en la ecuación anterior se toma  $t=t_0$ :

$$x(t_0) = e^{A(t_0-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_{\text{inf}}}^{t_0} e^{A(t_0-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \Rightarrow \int_{t_{\text{inf}}}^{t_0} e^{A(t_0-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau = 0$$

La integral debe ser 0 para cualquier posible valor de  $u(t)$  y ello solo es posible si  $t_{\text{inf}}=t_0$ . Por lo tanto la solución completa de (1.7) es:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \quad (1.35)$$

Esta solución a la que se denomina *integral de superposición matricial*, es suma de dos términos, el primero corresponde al estado inicial  $x(t_0)$  y el segundo a la entrada  $u(\tau)$  en el intervalo de tiempo  $[t_0, t]$ .

Otro hecho a resaltar es que el término integral, debido a la entrada, es una integral de convolución. Es decir, la contribución al estado  $x(t)$  debido a la entrada  $u(t)$  es la convolución de  $u(t)$  con  $e^{A \cdot t} \cdot B$ . En este caso, la función  $e^{A \cdot t} \cdot B$  representa el mismo papel que la respuesta a un impulso del sistema cuando la entrada es  $u(t)$  y la salida es  $x(t)$ .

La salida  $y(t)$  en (1.7) se calcula sustituyendo el vector de estados  $x(t)$  por (1.35)

$$y(t) = C \cdot e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t C \cdot e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau + D \cdot u(t) \quad (1.36)$$

Luego la respuesta a un impulso del sistema es  $C \cdot e^{A(t-\tau)} \cdot B$ .

En todo el desarrollo expuesto hasta aquí no se ha requerido en ningún momento que las matrices  $B$  y  $C$  fuesen constantes. De hecho el desarrollo es válido también si  $B$  y  $C$  son variables con el tiempo. En este caso, que se corresponde con el sistema genérico (1.9), la solución a la ecuación diferencial variante con el tiempo, suponiendo que  $A$  y  $B \cdot u$  son continuos a tramos y con condiciones iniciales  $x(t_0) = x_0$ , es:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau \quad (1.37)$$

donde  $\Phi(t, t_0)$  es la *matriz de transición de estados*. Esta ecuación es la generalización de la *integral de superposición matricial*.

◆ **Demostración:**

Para demostrar que (1.37) satisface la ecuación diferencial (1.9) se diferencia (1.37) utilizando la regla de Leibnitz. Dicha regla tiene la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)}^{B(t)} f(t, \tau) \cdot d\tau = \int_{A(t)}^{B(t)} \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial t} \cdot d\tau + f[t, B(t)] \cdot \frac{dB(t)}{dt} - f[t, A(t)] \cdot \frac{dA(t)}{dt}$$

Luego:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{\Phi}(t, t_0) \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\Phi}(t, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau + \Phi(t, t) \cdot B(t) \cdot u(t)$$

Sustituyendo el valor de la derivada de la matriz de transición de estados:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t) \cdot \Phi(t, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau + B(t) \cdot u(t)$$

Sacando factor común a  $A(t)$ :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t) \cdot \left[ \Phi(t, t_0) \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau \right] + B(t) \cdot u(t)$$

El termino entre corchetes es justo la forma supuesta para el vector de estados  $x(t)$ , luego esta es la solución deseada.

También se puede ver fácilmente que (1.37) satisface la condición inicial  $x(t_0)=x_0$ :

$$x(t_0) = \Phi(t_0, t_0) \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0} \Phi(t_0, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau = I \cdot x_0 + 0 = x_0$$

◆

◆ **Ejemplo 1.11:**

La ecuación diferencial de una masa  $m$  a la cual se le aplica una fuerza externa  $F$  es:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m}$$

En este caso la variable de control  $u$  es la aceleración total  $\ddot{x}$ .

Si se escogen las variables de estado:

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

Se tiene la forma en el espacio de estados:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u$$

Luego para este ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando el desarrollo en serie de Taylor (1.30) se obtiene la matriz de transición de estados:

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La serie termina tras solo dos términos.

La integral en (1.37) con  $t_0=0$  es:

$$\int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} t-\tau \\ 1 \end{pmatrix} u(\tau) \cdot d\tau = \begin{pmatrix} \int_0^t (t-\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau \\ \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau \end{pmatrix}$$

Así, la solución usando (1.37) es:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t (t-\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau \\ \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau \end{pmatrix}$$

Y operando se obtiene:

$$x_1(t) = x_1(0) + t \cdot x_2(0) + \int_0^t (t-\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau$$

Estas soluciones se podrían haber obtenido directamente de la ecuación diferencial que describe al sistema sin usar todo el aparato en el espacio de estados que se ha desarrollado. El interés y la utilidad de este aparato matemático se ponen de manifiesto en los casos en los que los métodos sencillos fallan.

◆

La matriz de transición de estados, que es fundamental en la teoría de sistemas dinámicos, satisface las siguientes propiedades:

- 1) Verifica la misma ecuación diferencial homogénea que el vector de estados:

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t) \cdot \Phi(t, t_0) \quad (1.38)$$

2) Para  $t_0=t$  es igual a la matriz identidad.

$$\Phi(t, t) = I \quad \forall t \quad (1.39)$$

3) *Propiedad del semigrupo:*

$$\Phi(t_3, t_1) = \Phi(t_3, t_2) \cdot \Phi(t_2, t_1) \quad (1.40)$$

Esta propiedad es una consecuencia directa del hecho que para ir de un estado a otro el resultado final es el mismo, se siga el camino que se siga.

4) Es no singular (invertible).

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t) \quad \forall t, t_0 \quad (1.41)$$

◆ **Demostración:**

A continuación se van a demostrar las cuatro propiedades indicadas para la matriz de transición de estados:

• Primera propiedad

La ecuación homogénea para el vector de estados es:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t) \cdot x(t) \quad (d.1)$$

Donde la solución  $x(t)$  está dada por:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \cdot x(t_0) \quad (d.2)$$

La derivada de  $x(t)$ , por supuesto debe satisfacer la ecuación homogénea para cualquier  $t$  y  $x(t)$ .  $x(t_0)$  es un dato inicial y no una función del tiempo. Luego:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} \cdot x(t_0) \quad (d.3)$$

Obsérvese que se utiliza la derivada parcial porque la matriz de transición de estados es función de dos argumentos,  $t$  y  $t_0$ . Sustituyendo (d2) y (d3) en (d1) se obtiene:

$$\frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} \cdot x(t_0) = A(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot x(t_0)$$

Como se debe de verificar para todo  $x(t_0)$ , se puede cancelar  $x(t_0)$  en ambos lados de la ecuación, con lo que se obtiene:

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t) \cdot \Phi(t, t_0)$$

Tal y como se quería demostrar.

- Segunda propiedad

La solución de la ecuación homogénea se verifica para cualquier  $t$  y  $t_0$ , incluyendo  $t=t_0$ . Luego:

$$x(t) = \Phi(t, t) \cdot x(t) \quad \forall x(t)$$

Luego se concluye que:

$$\Phi(t, t) = I \quad \forall t$$

Tal y como se quería demostrar

- Tercera propiedad

La ecuación diferencial homogénea para el vector de estado no solo posee una solución para cualquier estado inicial  $x(t_0)$  y cualquier intervalo de tiempo  $[t, t_0]$  sino que esta solución es única.

Suponiendo la existencia y unicidad de soluciones se puede escribir:

$$x(t_3) = \Phi(t_3, t_1) \cdot x(t_1) \quad \forall t_3, t_1 \tag{d.4}$$

Y también:

$$x(t_3) = \Phi(t_3, t_2) \cdot x(t_2) \quad \forall t_3, t_2 \tag{d.5}$$

$$x(t_2) = \Phi(t_2, t_1) \cdot x(t_1) \quad \forall t_2, t_1 \quad (\text{d.6})$$

Sustituyendo (d.6) en (d.5):

$$x(t_3) = \Phi(t_3, t_2) \cdot \Phi(t_2, t_1) \cdot x(t_1) \quad (\text{d.7})$$

Y comparando (d.7) con (d.6) se obtiene:

$$\Phi(t_3, t_1) = \Phi(t_3, t_2) \cdot \Phi(t_2, t_1)$$

Tal y como se quería demostrar.

- Cuarta propiedad

De la propiedad segunda y tercera se tiene que:

$$\Phi(t, t_0) \cdot \Phi(t_0, t) = \Phi(t, t) = I$$

Luego operando sobre la ecuación anterior se obtiene:

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t) \quad \forall t, t_0$$

Tal y como se quería demostrar.

♦

Para el caso de sistemas invariantes en el tiempo, las cuatro propiedades anteriores toman la siguiente forma:

$$\frac{d\Phi(t-t_0)}{dt} = A \cdot \Phi(t-t_0) \quad (1.42)$$

$$\Phi(0) = I \quad (1.43)$$

$$\Phi(t) \cdot \Phi(t_0) = \Phi(t+t_0) \quad (1.44)$$

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) \quad (1.45)$$

También para sistemas invariantes se define la *matriz resolvente*:

$$\Phi(s) = [s \cdot I - A]^{-1} \quad (1.46)$$

Esta matriz ya se usó en la ecuación (1.6) al relacionar la representación en variables de estado con la función de transferencia.

◆ **Demostración:**

Se va a demostrar la ecuación (1.46). Si se hace  $t_0=0$  y se toman transformadas de Laplace sobre la ecuación:

$$\frac{d\Phi(t-t_0)}{dt} = A \cdot \Phi(t-t_0)$$

Se obtiene:

$$s \cdot \Phi(s) - \Phi(0) = A \cdot \Phi(s) \Rightarrow s \cdot \Phi(s) - I = A \cdot \Phi(s)$$

Y operando:

$$[s \cdot I - A] \cdot \Phi(s) = I \Rightarrow \Phi(s) = [s \cdot I - A]^{-1}$$

Tal y como se quería demostrar.

◆

## 1.6 CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

Muchos de los conceptos en el espacio de estados se pueden ver como reinterpretaciones de conceptos anteriores del dominio frecuencial, pero otros son conceptos nuevos exclusivos de los métodos en el espacio de estados. Éste es el caso de los conceptos de controlabilidad y observabilidad, que son propiedades de la representación específica en el espacio de estados, más que del sistema en si mismo.

Las ideas de controlabilidad y observabilidad fueron introducidas por Kalman, como una forma de explicar porque un método de diseño de compensadores para sistemas inestables mediante cancelación de polos inestables (polos en el semiplano derecho), mediante ceros en el semiplano derecho está condenado a fracasar aunque la cancelación sea perfecta. Kalman demostró que de una cancelación polo-cero perfecta resultaría un sistema inestable con función de transferencia estable. La función de transferencia, sin embargo, es de orden

menor que el sistema, y los modos inestables o no serían afectados por la entrada (incontrolable) o no serían visibles en la salida (inobservables).

### 1.6.1 Controlabilidad del estado

La controlabilidad hace referencia al efecto de las entradas sobre los estados para un modelo del sistema. Formalmente se dice:

**Definición:** Una representación en variables de estado de un sistema continuo es *completamente controlable* si y solo si es posible transferir el sistema desde cualquier estado inicial  $x(t_0)=x_0$  a cualquier estado final  $x(t_1)=x_1$  en un tiempo finito  $t_1 - t_0 > 0$ , mediante la aplicación de señales de control  $u(t)$ ,  $t_0 < t < t_1$ .

Consecuentemente, para que sea completamente controlable, la estructura del modelo debe ser tal que  $u$  pueda afectar a todas las variables de estado. El sistema no es completamente controlable si solo es posible hacer que el sistema vaya de algunos estados (no todos) a otros estados, o si el tiempo requerido para ir de cualquier estado inicial a cualquier estado final es infinito.

El intervalo  $t_1 - t_0$  debe ser finito para que el sistema sea controlable. En sistemas variantes puede ser necesario restringir  $t_1 - t_0$  a ser mayor que algún intervalo fijo  $T$ . En sistemas invariantes, la única restricción es que  $t_1 - t_0$  sea mayor que cero. De hecho, si se permiten entradas impulsivas, entonces es posible, en un sistema controlable, ir instantáneamente (en tiempo cero) de un estado a otro. En la práctica, en un sistema controlable es posible ir de un estado a otro en un tiempo arbitrariamente corto si se permiten entradas suficientemente grandes.

**Teorema de controlabilidad:** El modelo del sistema dado por (1.9) es completamente controlable si y solo si el *grammian de controlabilidad*:

$$W_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \cdot B(\tau) \cdot B^T(\tau) \cdot \Phi^T(t_1, \tau) \cdot d\tau \quad (1.47)$$

cumple para algún  $t_1 > t_0$  alguno de los criterios equivalentes siguientes:

- 1) El dominio de  $W_c(t_0, t_1)$  es  $\mathfrak{R}^n$ .
- 2) El rango de la matriz  $W_c(t_0, t_1)$  es  $n$ .

- 3)  $W_c(t_0, t_1)$  es no singular y por lo tanto invertible.
- 4)  $W_c(t_0, t_1)$  es definida positiva (siempre es semidefinida positiva).
- 5) El determinante de  $W_c(t_0, t_1)$  es distinto de cero.

La equivalencia entre los criterios 2, 3, 4 y 5 es obvia. No resulta tan obvia la equivalencia con el criterio 1. Para poner de manifiesto esta equivalencia hay que considerar la solución de la ecuación diferencial (1.9) dada por (1.37) evaluada en  $t_1$ :

$$x_1 = x(t_1) = \Phi(t_1, t_0) \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

Si el sistema es completamente controlable existe la posibilidad de alcanzar cualquier estado  $x_1$  en el instante  $t_1$  desde el estado inicial  $x_0$ . Esta afirmación es equivalente a decir que  $[x_1 - \Phi(t_1, t_0) \cdot x(t_0)]$  puede ser cualquier vector de  $\mathfrak{R}^n$ . Y en conclusión que el dominio de  $\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau$  es todo  $\mathfrak{R}^n$ . Se puede demostrar que este dominio es equivalente al dominio de la matriz  $W_c(t_0, t_1)$ .

En el caso de sistemas invariantes el gramian de controlabilidad está dado por:

$$W_c(t_1 - t_0) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1 - \tau)} \cdot B \cdot B^T \cdot e^{A^T(t_1 - \tau)} \cdot d\tau = \int_0^{t_1 - t_0} e^{At} \cdot B \cdot B^T \cdot e^{A^T t} \cdot dt \quad (1.48)$$

O de forma equivalente tomando  $T = t_1 - t_0$ :

$$W_c(T) = \int_0^T e^{At} \cdot B \cdot B^T \cdot e^{A^T t} \cdot dt \quad (1.49)$$

Si  $W_c(t_0, t_1)$  es singular y de rango  $k < n$ , entonces hay  $(n - k)$  estados no controlables en la representación. Si se puede obtener un modelo equivalente sin estados no-controlables, ello es preferible para el diseño de controladores. Cuando se introduce ruido dentro del modelo también es conveniente estudiar la controlabilidad con respecto a las entradas de control y de ruido.

Matrices con la forma del gramian de controlabilidad (1.47) o (1.49) para sistemas invariantes, se tienen que calcular algunas veces en problemas de control óptimo y estimación. Sin embargo, calcular estas integrales solamente para verificar la controlabilidad

de un sistema supone un gran esfuerzo para un objetivo simple. Sería, por tanto, conveniente disponer de un test alternativo mucho más simple. Solamente los sistemas invariantes con el tiempo disponen de este test alternativo, que viene definido a través del siguiente teorema:

**Teorema algebraico de controlabilidad.** El sistema invariante (1.7) es completamente controlable si y solo la matriz de controlabilidad definida de la siguiente forma:

$$M_c = [B \mid A \cdot B \mid \dots \mid A^{n-1} \cdot B] \quad (1.50)$$

tiene rango  $n$ , es decir, hay  $n$  columnas linealmente independientes, o equivalentemente, el espacio dominio de  $M_c$  es  $\mathfrak{R}^n$ .

$M_c$  es una matriz con  $n$  filas y  $n \cdot r$  columnas. Cada columna de  $M_c$  representa un vector en el espacio de estados a lo largo del cual es posible el control. Si es posible el control a lo largo de  $n$  direcciones linealmente independientes (por ejemplo, una base de  $\mathfrak{R}^n$ ) entonces es posible el control en todo  $\mathfrak{R}^n$ .

Como  $M_c$  es una matriz constante, tiene rango constante. Así, si  $M_c$  es singular, entonces  $W_c(T)$  es singular para todo  $T$ . Análogamente, si  $W_c(T)$  es no singular para cualquier  $T > 0$ , debe ser no singular para todo  $T > 0$ . Esto significa que si un sistema es controlable, hay una entrada que transfiere el sistema desde cualquier estado inicial a cualquier otro estado en un tiempo arbitrariamente corto. Obviamente, para conseguir un tiempo más corto se necesita una mayor entrada.

#### **1.6.1.1 Controlabilidad de la salida**

En el diseño práctico de un sistema de control, tal vez se desee controlar la salida en lugar del estado del sistema. Una controlabilidad completa del estado no es necesaria ni suficiente para controlar la salida del sistema. Por esta razón, es conveniente definir una controlabilidad completa de la salida por separado.

**Definición:** Una representación en variables de estado de un sistema continuo es de *salida completamente controlable* si es posible construir un vector de control sin restricciones  $u(t)$  que transfiera cualquier salida inicial determinada  $y(t_0)$  a cualquier salida final  $y(t_1)$  en un intervalo de tiempo finito  $t_0 < t < t_1$ .

Teorema algebraico de controlabilidad. El sistema invariante (1.7) es de salida completamente controlable si y solo la matriz de controlabilidad de salida definida de la siguiente forma:

$$M_{cy} = [C \cdot B \mid C \cdot A \cdot B \mid \dots \mid C \cdot A^{n-1} \cdot B \mid D] \quad (1.51)$$

cuya dimensión es  $m \times (n+1) \cdot r$  tiene rango  $m$ .

Obsérvese que la presencia del término  $D \cdot u$  en el sistema (1.7) siempre ayuda a establecer la controlabilidad de la salida.

### 1.6.1.2 Alcanzabilidad

En algunos libros se usa el concepto de alcanzabilidad (reachability) que es similar al de controlabilidad, su definición es la siguiente:

Definición: Un sistema de control se define como *alcanzable* si, al empezar desde el origen del espacio de estados, el estado puede ser llevado a un punto arbitrario en el espacio respectivo en un periodo finito, siempre que el vector de control no esté restringido (no acotado).

## 1.6.2 Observabilidad

La observabilidad hace referencia al efecto de los estados sobre las salidas. Así, se puede dar la siguiente definición:

Definición: Una representación en variables de estado de un sistema continuo es *completamente observable* si y solo si dadas las entradas  $u(t)$  y las salidas  $y(t)$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ , es posible deducir  $x(t)$  para  $t \in [t_0, t_1]$ .

Para que una representación en variables de estado sea completamente observable, su estructura debe ser tal que un cambio en cualquier variable de estado afecte, de alguna manera, a la salida  $y(t)$ . Además el efecto de una variable de estado sobre la salida se debe distinguir del efecto de cualquier otra variable de estado.

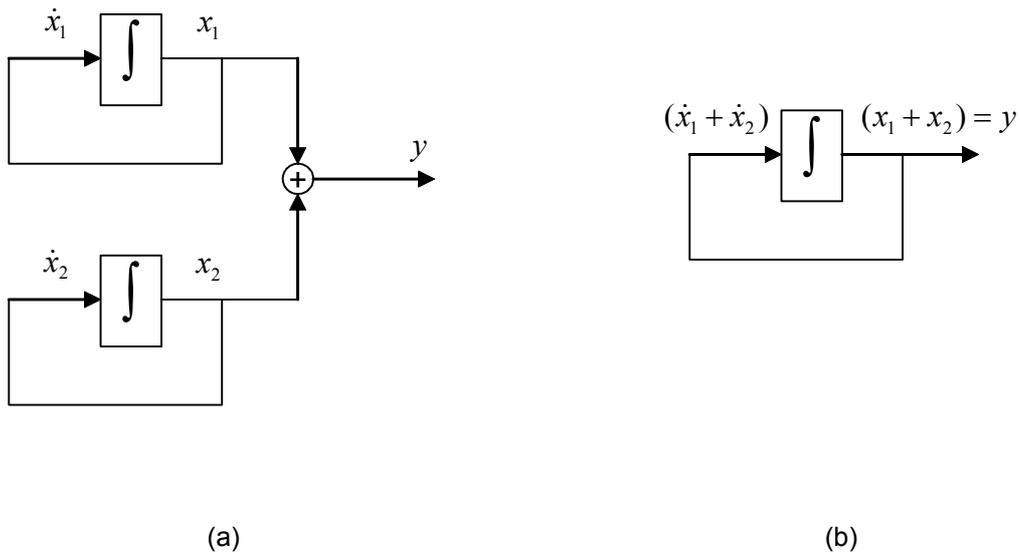


Figura 1.11: Modelo homogéneo de dos estados: a) Modelo original. b) Modelo equivalente.

Así en el modelo homogéneo de la Figura 1.11a, las dos variables de estado  $x_1$  y  $x_2$  afectan a la salida  $y$ , pero no hay forma de obtener información separada sobre  $x_1$  y  $x_2$  a partir sólo de la observación de  $y$ . De hecho, desde el punto de vista de las observaciones de  $y$ , este modelo es equivalente al de la Figura 1.11b.

**Teorema de observabilidad:** El modelo del sistema dado por (1.9) es completamente observable si y solo si el *grammian de observabilidad*:

$$W_o(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t_1, \tau) \cdot C^T(\tau) \cdot C(\tau) \cdot \Phi(t_1, \tau) \cdot d\tau \quad (1.52)$$

cumple para algún  $t_1 > t_0$  alguno de los criterios equivalentes siguientes:

- 1) El espacio nulo de  $W_o(t_0, t_1)$  es  $0 \in \mathfrak{R}^n$ .
- 2)  $W_o(t_0, t_1)$  es no singular y por lo tanto invertible.
- 3)  $W_o(t_0, t_1)$  es definida positiva.
- 4) El determinante de  $W_o(t_0, t_1)$  es distinto de cero.

Como se puede observar el grammian de observabilidad (1.52) mantiene una fuerte semejanza con el grammian de controlabilidad (1.47). Así en (1.52), en lugar de la matriz de transición de estados  $\Phi(t_1, \tau)$  aparece su transpuesta y en lugar de la matriz de control  $B$

aparece la matriz de observación  $C$ . Debido a esta semejanza se suele decir que controlabilidad y observabilidad son conceptos duales.

Análogamente a como se hizo para la controlabilidad, para modelos invariantes se puede considerar un procedimiento más práctico para determinar la observabilidad:

**Teorema algebraico de observabilidad.** El sistema invariante (1.7) es completamente observable si y solo la matriz de observabilidad definida de la siguiente forma:

$$M_o = \left[ C^T \mid A^T \cdot C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} \cdot C^T \right] \quad (1.53)$$

tiene rango  $n$ , es decir, hay  $n$  columnas linealmente independientes, o equivalentemente, el espacio dominio de  $M_o$  es  $\mathfrak{R}^n$ .

Para sistema de una sola salida, la matriz  $M_o$  es de dimensión  $n \times n$ , y la condición anterior corresponde a decir que su determinante sea distinto de cero. Esto es equivalente a decir que la función de transferencia dada por (1.8) no tenga cancelaciones polo-cero.

♦ **Ejemplo 1.12:**

Considérese el sistema de segundo orden ( $n=2$ ) descrito mediante la siguiente representación en variables de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para estudiar su controlabilidad, puesto que es un sistema invariante, se puede calcular su matriz de controlabilidad  $M_c$ :

$$M_c = [B \mid A \cdot B] = \left[ 1 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dado que el rango de  $M_c$  es 2, el sistema es completamente controlable.

Análogamente, para estudiar su observabilidad, se puede calcular su matriz de observabilidad  $M_o$ .

$$M_o = [C^T \mid A^T \cdot C^T] = \left[ 1 \mid \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado que el rango  $M_o$  es 2, el sistema es completamente observable.

♦

♦ **Ejemplo 1.13:**

Considérese el sistema de tercer orden ( $n=3$ ) descrito mediante la siguiente representación en variables de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [4 \quad 5 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Se desea saber si es completamente observable. Para ello se calcula su matriz  $M_o$ :

$$M_o = [C^T \mid A^T \cdot C^T \mid (A^2)^T \cdot C^T] = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como:

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

el rango de  $M_o$  es menor que 3. Y en consecuencia el sistema no es completamente observable.

La función de transferencia entre la entrada y la salida se puede calcular con la ecuación (1.8)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [4 \quad 5 \quad 1] \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s^2 + 5s + 4}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Factorizando la expresión anterior:

$$G(s) = \frac{(s+1) \cdot (s+4)}{(s+1) \cdot (s+2) \cdot (s+3)}$$

Se observa que los dos factores  $(s+1)$  se cancelan el uno al otro, debido a esta cancelación el sistema no es completamente observable.

♦

## 1.7 DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADOS

### 1.7.1 Diseño mediante la ubicación de polos

Supóngase que todas las variables de estado son medibles y que están disponibles para la realimentación. Se demuestra que, si el sistema considerado es de estado completamente controlable, los polos del sistema en lazo cerrado se pueden ubicar en cualquier posición deseada mediante una matriz de ganancias de realimentación del estado.

Supongamos que se decide que los polos en lazo cerrado deseados estén en  $s=\mu_1, s=\mu_2, \dots, s=\mu_n$ . Seleccionando una matriz de ganancias apropiada para una realimentación del estado, es posible forzar al sistema para que tenga los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas, siempre y cuando el sistema original sea de estado completamente controlable.

Con el objetivo de simplificar los aspectos matemáticos del esquema de ubicación de polos, se va a considerar el caso en que la señal de control es un escalón. Considérese el sistema de control:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \quad (1.54)$$

Se supone que la señal de control  $u$  es un escalón, se selecciona como:

$$u = -K \cdot x \quad (1.55)$$

A este esquema de control (ver Figura 1.12) se le denomina *realimentación del estado*, se trata de un esquema de control en lazo cerrado.

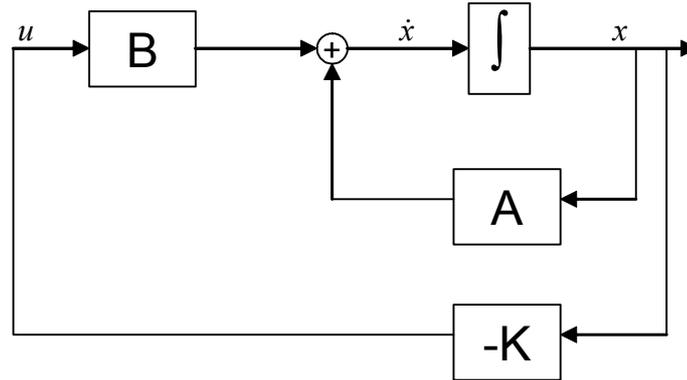


Figura 1.12: Sistema de control en lazo cerrado mediante realimentación del estado.

Puesto que  $u$  es un escalar, la matriz  $K$  es de dimensión  $1 \times n$ , a dicha matriz se le denomina *matriz de ganancias de realimentación del estado*.

Si se sustituye (1.55) en (1.54) se obtiene la expresión:

$$\dot{x} = (A - B \cdot K) \cdot u \quad (1.56)$$

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado viene dada por la expresión:

$$\Delta^c(s) = |s \cdot I - (A - B \cdot K)| = 0 \quad (1.57)$$

Que puede expresarse en función de los valores deseados para los polos  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  de la siguiente forma:

$$\Delta^c(s) = (s + \mu_1) \cdot (s + \mu_2) \cdot \dots \cdot (s + \mu_n) = s^n + \alpha_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + \alpha_0 \quad (1.58)$$

La matriz de ganancias de realimentación de estado  $K$  que obliga a los valores característicos de (1.56) a ser  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  (valores deseados), es decir, a poseer una ecuación característica de la forma (1.57) se demuestra que entre otros métodos se puede determinar mediante la *fórmula de Ackermann*:

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [B \ | \ A \cdot B \ | \ \dots \ | \ A^{n-1} \cdot B]^{-1} \cdot [A^n + \alpha_{n-1} \cdot A^{n-1} + \dots + \alpha_0 \cdot I] \quad (1.59)$$

Se observa en (1.59) que el vector fila de dimensión  $1 \times n$  es la última fila de una matriz identidad de dimensión  $n \times n$ , a dicho vector se le puede denotar por  $e_n$ . A continuación, de acuerdo con (1.50), se tiene a la inversa de la matriz de controlabilidad  $M_c$ . Finalmente, se

tiene la ecuación característica  $\phi(A)$  que satisface la matriz A de acuerdo con el teorema de Caley-Hamilton:

$$\phi(A) = A^n + \alpha_{n-1} \cdot A^{n-1} + \dots + \alpha_0 \cdot I$$

Luego la fórmula de Ackermann se puede expresar en la forma:

$$K = e_n \cdot M_c^{-1} \cdot \phi(A) \quad (1.60)$$

◆ **Obtención de la ecuación de Ackermann:**

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado viene dada por la expresión (1.57). Esta ecuación puede expresarse en función de los valores deseados para los polos  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  en lazo cerrado según la forma (1.58).

Defínase:

$$\tilde{A} = (A - B \cdot K)$$

Por el teorema de Caley-Hamilton se sabe que la matriz  $\tilde{A}$  satisface su propia ecuación característica:

$$\phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + \alpha_{n-1} \cdot \tilde{A}^{n-1} + \dots + \alpha_0 \cdot I = 0$$

Para obtener la fórmula de Ackermann se va a suponer por simplicidad que  $n=3$ . Luego:

$$\phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^3 + \alpha_2 \cdot \tilde{A}^2 + \alpha_1 \cdot \tilde{A} + \alpha_0 \cdot I = 0 \quad (d.1)$$

Calculando las potencias de segundo y tercer orden:

$$\tilde{A}^2 = (A - B \cdot K)^2 = A^2 - A \cdot B \cdot K - B \cdot K \cdot \tilde{A} \quad (d.2)$$

$$\tilde{A}^3 = (A - B \cdot K)^3 = A^3 - A^2 \cdot B \cdot K - A \cdot B \cdot K \cdot \tilde{A} - B \cdot K \cdot \tilde{A}^2 \quad (d.3)$$

Y sustituyendo (d.2) y (d.3) en (d.1):

$$(A^3 - A^2 \cdot B \cdot K - A \cdot B \cdot K \cdot \tilde{A} - B \cdot K \cdot \tilde{A}^2) + \alpha_2 \cdot (A^2 - A \cdot B \cdot K - B \cdot K \cdot \tilde{A}) + \alpha_1 \cdot (A - B \cdot K) + \alpha_0 \cdot I = 0$$

Reordenando términos:

$$(A^3 + \alpha_2 \cdot A^2 + \alpha_1 \cdot A + \alpha_0 \cdot I) - \alpha_2 \cdot A \cdot B \cdot K - \alpha_2 \cdot B \cdot K \cdot \tilde{A} - \alpha_1 \cdot B \cdot K - A^2 \cdot B \cdot K - A \cdot B \cdot K \cdot \tilde{A} - B \cdot K \cdot \tilde{A}^2 = 0$$

Como:

$$A^3 + \alpha_2 \cdot A^2 + \alpha_1 \cdot A + \alpha_0 \cdot I = \phi(A)$$

Entonces:

$$\phi(A) - \alpha_2 \cdot A \cdot B \cdot K - \alpha_2 \cdot B \cdot K \cdot \tilde{A} - \alpha_1 \cdot B \cdot K - A^2 \cdot B \cdot K - A \cdot B \cdot K \cdot \tilde{A} - B \cdot K \cdot \tilde{A}^2 = 0$$

Y despejando  $\phi(A)$ :

$$\phi(A) = \alpha_2 \cdot A \cdot B \cdot K + \alpha_2 \cdot B \cdot K \cdot \tilde{A} + \alpha_1 \cdot B \cdot K + A^2 \cdot B \cdot K + A \cdot B \cdot K \cdot \tilde{A} + B \cdot K \cdot \tilde{A}^2$$

Reordenando términos

$$\phi(A) = B \cdot (K \cdot \tilde{A}^2 + \alpha_2 \cdot K \cdot \tilde{A} + K \cdot \alpha_1) + A \cdot B \cdot (K \cdot \tilde{A} + \alpha_2 \cdot K) + A^2 \cdot B \cdot K$$

Que se puede expresar equivalentemente de la siguiente forma:

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} B & A \cdot B & A^2 \cdot B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K \cdot \tilde{A}^2 + \alpha_2 \cdot K \cdot \tilde{A} + K \cdot \alpha_1 \\ K \cdot \tilde{A} + \alpha_2 \cdot K \\ K \end{bmatrix} = M_c \cdot \begin{bmatrix} K \cdot \tilde{A}^2 + \alpha_2 \cdot K \cdot \tilde{A} + K \cdot \alpha_1 \\ K \cdot \tilde{A} + \alpha_2 \cdot K \\ K \end{bmatrix}$$

Se supone que el sistema es de estado completamente controlable, luego la inversa de la matriz de controlabilidad  $M_c$  existe. Luego:

$$M_c^{-1} \cdot \phi(A) = \begin{bmatrix} K \cdot \tilde{A}^2 + \alpha_2 \cdot K \cdot \tilde{A} + K \cdot \alpha_1 \\ K \cdot \tilde{A} + \alpha_2 \cdot K \\ K \end{bmatrix}$$

Multiplicando por el vector  $e_3 = [0 \ 0 \ 1]$  ambos miembros de esta ecuación:

$$[0 \ 0 \ 1] \cdot M_c^{-1} \cdot \phi(A) = [0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} K \cdot \tilde{A}^2 + \alpha_2 \cdot K \cdot \tilde{A} + K \cdot \alpha_1 \\ K \cdot \tilde{A} + \alpha_2 \cdot K \\ K \end{bmatrix}$$

Operando se obtiene:

$$K = [0 \ 0 \ 1] \cdot M_c^{-1} \cdot \phi(A) = e_3 \cdot M_c^{-1} \cdot \phi(A)$$

Que es precisamente la ecuación de Ackermann para el caso  $n=3$ .

♦

Un resultado fundamental obtenido por W.M. Wonham es el siguiente: “Todos los polos de un sistema en lazo cerrado puede ser arbitrariamente asignados mediante el método de realimentación de variables de estados si y solo si el sistema es completamente controlable”.

Obsérvese que la controlabilidad del sistema es fundamental para poder aplicar la fórmula de Ackermann ya que si no existiría la inversa de la matriz de controlabilidad.

Es importante señalar que la matriz  $K$  para un sistema SISO determinado no es única, sino que depende de las ubicaciones de los polos en lazo cerrado deseados (los cuales determinan la velocidad y el amortiguamiento) seleccionados. Obsérvese que la selección de los polos en lazo cerrado deseados, o de la ecuación característica deseada, es un compromiso entre la rapidez de la respuesta del vector de error y la sensibilidad ante perturbaciones y el ruido de medición. Es decir, si se incrementan la velocidad de respuesta de error, por lo general se incrementan los efectos adversos de las perturbaciones y el ruido en la medición.

Por lo tanto, al determinar la matriz de ganancias de realimentación del estado  $K$ , para un sistema determinado, es conveniente examinar mediante simulaciones por computador las características de respuesta del sistema para varias matrices  $K$  diferentes y elegir aquella que ofrezca el mejor comportamiento del sistema.

♦ **Ejemplo 1.14:**

Considérese el sistema de tercer orden ( $n=3$ ) descrito mediante la siguiente representación en variables de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Usando el control mediante la realimentación del estado  $u=-K \cdot x$ , se quiere que los polos en lazo cerrado se ubiquen en  $s=-2 \pm j4$  y  $s=-10$ . Para ello hay que calcular la matriz de ganancias de realimentación del estado  $K$ .

En primer lugar hay que comprobar si el sistema es de estado completamente controlable, ya que sólo en dicho caso será posible realizar una ubicación arbitraria de polos. La matriz de controlabilidad para este sistema es:

$$M_c = [B \mid A \cdot B \mid A^2 \cdot B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

Puesto que  $|M_c| = -1$ , el rango de  $M_c$  es 3 y el sistema es de estado completamente controlable. Por tanto, es posible la ubicación arbitraria de polos.

#### Método 1:

Para calcular la matriz de ganancias de realimentación  $K$  mediante la fórmula de Ackermann (1.60) es necesario calcular la inversa de la matriz de controlabilidad y la ecuación característica que satisface la matriz  $A$  de acuerdo con el teorema de Caley-Hamilton:

$$M_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^c(s) = |s \cdot I - (A - B \cdot K)| = (s + (2 + j \cdot 4)) \cdot (s + (2 - j \cdot 4)) \cdot (s + 10) = s^3 + 14 \cdot s^2 + 60 \cdot s + 200$$

$$\phi(A) = A^3 + 14 \cdot A^2 + 60 \cdot A + 200 \cdot I = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix}$$

Luego sustituyendo los valores calculados en (1.60) y operando se obtiene la ganancia  $K$  de realimentación de estado:

$$K = e_n \cdot M_c^{-1} \cdot \phi(A) = [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} = [199 \quad 55 \quad 8]$$

Con esta realimentación de estado los polos se ubican en las posiciones deseadas.

#### Método 2:

Para sistema de ordenes pequeños ( $n \leq 3$ ) otra forma alternativa usualmente más sencilla de calcular  $K$  es igualando la ecuación característica en lazo cerrado  $|s \cdot I - (A - B \cdot K)|$ ,

$$|s \cdot I - (A - B \cdot K)| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1+k_1 & 5+k_2 & s+6+k_3 \end{vmatrix} = s^3 + (6+k_3) \cdot s^2 + (5+k_2) \cdot s + (1+k_1)$$

con la ecuación característica deseada:

$$s^3 + 14 \cdot s^2 + 60 \cdot s + 200$$

Por tanto,

$$6 + k_3 = 14$$

$$5 + k_2 = 60$$

$$1 + k_1 = 200$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores se obtienen los elementos del vector de ganancias  $K$

$$k_1 = 199, \quad k_2 = 55, \quad k_3 = 8$$

### Método 3:

Si la representación en variables de estado del sistema viene dada en su forma canónica controlable, como sucede en este caso, entonces la matriz de ganancias se puede calcular a través de la siguiente fórmula:

$$K = [\alpha_n - a_n \mid \dots \mid \alpha_1 - a_1]$$

Donde los  $a_i$   $i=1, \dots, n$  son los coeficientes de la ecuación característica del sistema  $|s \cdot I - A|=0$ , y los  $\alpha_i$  son los coeficientes de la ecuación característica deseada.

$$|s \cdot I - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 5 & s+6 \end{vmatrix} = s^3 + 6 \cdot s^2 + 5 \cdot s + 1 = s^3 + a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + a_3$$

Luego:  $a_1=6$ ,  $a_2=5$  y  $a_3=1$ .

La ecuación característica deseada es:

$$s^3 + 14 \cdot s^2 + 60 \cdot s + 200 = s^3 + \alpha_1 \cdot s^2 + \alpha_2 \cdot s + \alpha_3$$

Luego:  $\alpha_1=14$ ,  $\alpha_2=60$  y  $\alpha_3=200$ .

Por lo tanto:

$$K = [200 - 1 \quad 60 - 5 \quad 14 - 6] = [199 \quad 55 \quad 8]$$

♦

## 1.7.2 Observadores de estado

Ocurre muchas veces en la práctica que no todas las variables de estado se encuentran disponibles para su realimentación. En dicho caso, es necesario estimar las variables de estado que no están disponibles. La estimación de dichas variables de estado se suele denominar *observación*.

Un dispositivo o un programa de computadora que estima u observa las variables de estado se denomina *observador de estado*, o, simplemente, *observador*. Si el observador de estado estima todas las variables de estado del sistema, sin importar si algunas de las variables puede ser medida directamente, entonces se denomina *observador de estado de orden completo*. Asimismo un observador que estima menos de  $n$  variables de estado, siendo  $n$  la dimensión del vector de estado, se denomina *observador de estado de orden reducido*. Si el observador de estado reducido tiene el orden mínimo posible, se denomina *observador de estado de orden mínimo*.

Un observador de estado estima las variables de estado a partir de las mediciones de las variables de salida y de control. Sólo pueden diseñarse si y sólo si se satisface la condición de observabilidad.

Se denotará por  $\hat{x}$  al vector de estado estimado u observado. En muchos casos prácticos,  $\hat{x}$  se usa en la realimentación de estado en lugar de  $x$  para generar el vector de control deseado.

Considérese el sistema real definido mediante:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \tag{1.61}$$

$$y = C \cdot x \tag{1.62}$$

Supóngase que el estado  $x$  se aproximará mediante el estado  $\hat{x}$  del siguiente modelo dinámico:

$$\dot{\hat{x}} = A \cdot \hat{x} + B \cdot u + K_e \cdot (y - C \cdot \hat{x}) = (A - K_e \cdot C) \cdot \hat{x} + B \cdot u + K_e \cdot y \quad (1.63)$$

que representa al observador de estado.

Obsérvese que el observador de estado tiene como entradas a  $y$  e  $u$ , y como salida a  $\hat{x}$ . Además el último término del segundo miembro del modelo, es un término de corrección que contiene la diferencia entre la salida y medida y la salida  $C \cdot \hat{x}$  estimada. La matriz  $K_e$  funciona como una matriz de ponderación. El término de corrección vigila al estado  $\hat{x}$ .

La dinámica del observador se caracteriza mediante las matrices  $A$  y  $B$  y mediante el término de corrección adicional, que contiene la diferencia entre la salida medida y la estimada. Para el siguiente análisis se supone que las matrices  $A$  y  $B$  usadas en el modelo son iguales a las del sistema real.

### 1.7.2.1 Observador de estado de orden completo

En este caso el orden del observador es igual al del sistema. Para obtener la ecuación de error del observador, se resta (1.63) de (1.61).

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = A \cdot x - A \cdot \hat{x} - K_e \cdot (C \cdot x - C \cdot \hat{x}) = (A - K_e \cdot C) \cdot (x - \hat{x}) \quad (1.64)$$

Si se define el vector de error  $e$  como:

$$e = (x - \hat{x})$$

entonces la ecuación (1.64) se convierte en

$$\dot{e} = (A - K_e \cdot C) \cdot e \quad (1.65)$$

El comportamiento dinámico del vector de error se determina mediante los valores característicos de la matriz  $A - K_e \cdot C$ . Si esta matriz es estable, el vector de error convergerá a cero para cualquier vector de error inicial  $e(0)$ . Es decir, que  $\hat{x}$  convergerá a  $x$  independientemente de cuales sean sus valores iniciales.

Si el sistema es completamente observable, se demuestra que es posible seleccionar una matriz  $K_e$  tal que  $A - K_e \cdot C$  tenga los valores característicos arbitrariamente deseados.

El problema de diseñar un observador de orden completo se convierte en determinar la matriz de ganancias del observador  $K_e$  tal que la dinámica de error definida mediante (1.65)

sea asintóticamente estable con una velocidad de respuesta suficiente, es decir, los valores característicos de  $A-K_e \cdot C$  tomen unos determinados valores deseados.

Una forma de abordar este problema es considerar el problema dual, es decir, resolviendo el problema de ubicación de polos para el siguiente sistema dual:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A^T \cdot z + C^T \cdot v \\ \eta &= B^T \cdot z\end{aligned}$$

Se supone que la señal de control  $v$  es:

$$v = -K \cdot z$$

Si el sistema dual es de estado completamente controlable, la matriz de ganancias de realimentación del estado  $K$  se determina de tal modo que la matriz  $A^T - C^T \cdot K$  produzca un conjunto de valores característicos deseados.

Si  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  son los valores característicos de la matriz del observador de estado, tomando los mismos  $\mu_i$  que los valores característicos deseados de la matriz de ganancias de realimentación del estado del sistema dual, se obtiene la ecuación característica del sistema en lazo cerrado para el sistema dual

$$\Delta^c(s) = |s \cdot I - (A^T - C^T \cdot K)| = (s + \mu_1) \cdot (s + \mu_2) \cdot \dots \cdot (s + \mu_n)$$

Considerando que los valores característicos de  $A^T - C^T \cdot K$  y  $A - K^T \cdot C$  son iguales se tiene que:

$$|s \cdot I - (A^T - C^T \cdot K)| = |s \cdot I - (A - K^T \cdot C)|$$

Comparando estos polinomios característicos con la ecuación (1.65) se observa que:

$$K_e = K^T \tag{1.66}$$

Por lo tanto esta relación, permite calcular la matriz de ganancias del observador  $K_e$  a partir de la matriz  $K$  determinada mediante el enfoque de ubicación de polos en el sistema dual.

Para la resolución de este problema de ubicación de polos el sistema dual debe ser de estado completamente controlable. Luego el rango de la matriz de controlabilidad del sistema dual

$$[C^T \mid A^T \cdot C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} \cdot C^T]$$

debe ser  $n$ .

Obsérvese que la matriz de controlabilidad del sistema dual es a su vez la matriz de observabilidad del sistema original. Esto significa que una condición necesaria y suficiente para la observación del estado del sistema definido mediante las ecuaciones (1.61) y (1.62) es que el sistema sea completamente observable.

La resolución del este problema de ubicación de polos en el sistema dual se puede resolver aplicando la ecuación de Ackermann (1.60) al mismo. En este caso toma la forma:

$$K = e_n \cdot M_o^{-1} \cdot \phi(A^T) \quad (1.67)$$

Luego de acuerdo con (1.66) se tiene que:

$$K_e = (e_n \cdot M_o^{-1} \cdot \phi(A^T))^T \quad (1.68)$$

♦ **Ejemplo 1.15:**

Considérese el diseño de un sistema regulador para la planta siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

Diseñar un observador de estado de orden completo, suponga que los valores característicos deseados de la matriz del observador son:

$$\mu_1 = -1.8 + j \cdot 2.4 \quad \mu_2 = -1.8 - j \cdot 2.4$$

El diseño del observador se reduce a la determinación de la matriz de ganancias del observador  $K_e$  apropiada.

En primer lugar hay que comprobar la observabilidad del sistema, para ello se calcula la matriz de observabilidad:

$$M_o = [C^T \mid A^T \cdot C^T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como  $|M_o| = -1$  su rango es 2, y por lo tanto el sistema es de estado completamente observable y es posible la determinación de la matriz de ganancias del observador  $K_e$ .

Una posible forma de calcular  $K_e$  es usando la ecuación (1.68). Para aplicarla hay que calcular en primer lugar la inversa de la matriz de observabilidad:

$$M_o^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Además hay que calcular la ecuación característica deseada para el observador:

$$\Delta^c(s) = (s + 1.8 - j \cdot 2.4) \cdot (s + 1.8 + j \cdot 2.4) = s^2 + 3.6 \cdot s + 9$$

Por el Teorema de Caley-Hamilton se obtiene  $\phi(A)$ :

$$\phi(A) = A^2 + 3.6 \cdot A + 9 \cdot I$$

Y evaluándola en  $A^T$ :

$$\phi(A^T) = (A^T)^2 + 3.6 \cdot A^T + 9 \cdot I = \begin{bmatrix} 20.6 & 0 \\ 0 & 20.6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3.6 \\ 74.16 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \\ 74.16 & 29.6 \end{bmatrix}$$

Luego aplicando (1.68) se obtiene:

$$K_e = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \\ 74.16 & 29.6 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 29.6 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

Para sistemas de orden pequeño ( $n \leq 3$ ) otra forma alternativa de calcular  $K_e$  es igualando la ecuación característica del observador con la ecuación característica deseada. Para este sistema se tendría:

$$|s \cdot I - A + K_e \cdot C| = (s + \mu_1) \cdot (s + \mu_2) = s^2 + 3.6 \cdot s + 9$$

Desarrollando el lado izquierdo de la ecuación anterior se obtiene:

$$\left[ \begin{array}{cc} s & 0 \\ 0 & s \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} k_{e1} \\ k_{e2} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} s & -20.6 + k_{e1} \\ -1 & s + k_{e2} \end{array} \right] = s^2 + k_{e2} \cdot s - 20.6 + k_{e1}$$

Luego:

$$s^2 + k_{e2} \cdot s - 20.6 + k_{e1} = s^2 + 3.6 \cdot s + 9$$

Por lo tanto,  $k_{e1}=29.6$  y  $k_{e2}=3.6$ .

La ecuación para el observador de orden completo se obtiene a partir de la ecuación (1.63)

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -3.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 29.6 \\ 3.6 \end{bmatrix} \cdot y$$

### 1.7.2.2 Algunos comentarios sobre la selección de la mejor $K_e$

Si en el sistema están implícitos factores desconocidos significativos la señal de realimentación a través de la matriz  $K_e$  debe ser relativamente grande. Sin embargo, si la señal de salida se contamina en forma significativa con perturbaciones y ruido en la medición, la salida y no es de fiar. Por lo tanto la señal de realimentación a través de la matriz  $K_e$  debe ser relativamente pequeña.

En consecuencia al determinar la matriz  $K_e$  se debe examinar con cuidado los efectos de las perturbaciones y el ruido implícito en la salida  $y$ . En general la elección de la mejor matriz  $K_e$  debe ser un compromiso entre la respuesta rápida y la sensibilidad ante perturbaciones y ruidos.

### 1.7.2.3 Efectos de la adición del observador en un sistema en lazo cerrado

En el proceso de diseño mediante la ubicación de polo descrito en la sección 1.7.1 se supuso que el estado real  $x(t)$  se encontraba disponible para su realimentación. Sin embargo, en la práctica tal vez no puedan medirse el estado real  $x(t)$ , por lo que se necesitará diseñar un observador y usar el estado observado  $\hat{x}(t)$  para la realimentación, tal y como se aprecia en la Figura 1.13.

Por lo tanto, el proceso de diseño tiene ahora dos etapas:

- 1) Determinar la matriz de ganancias de realimentación  $K$  para producir la ecuación característica deseada.
- 2) Determinar la matriz de ganancias del observador  $K_e$  para obtener la ecuación característica deseada del observador

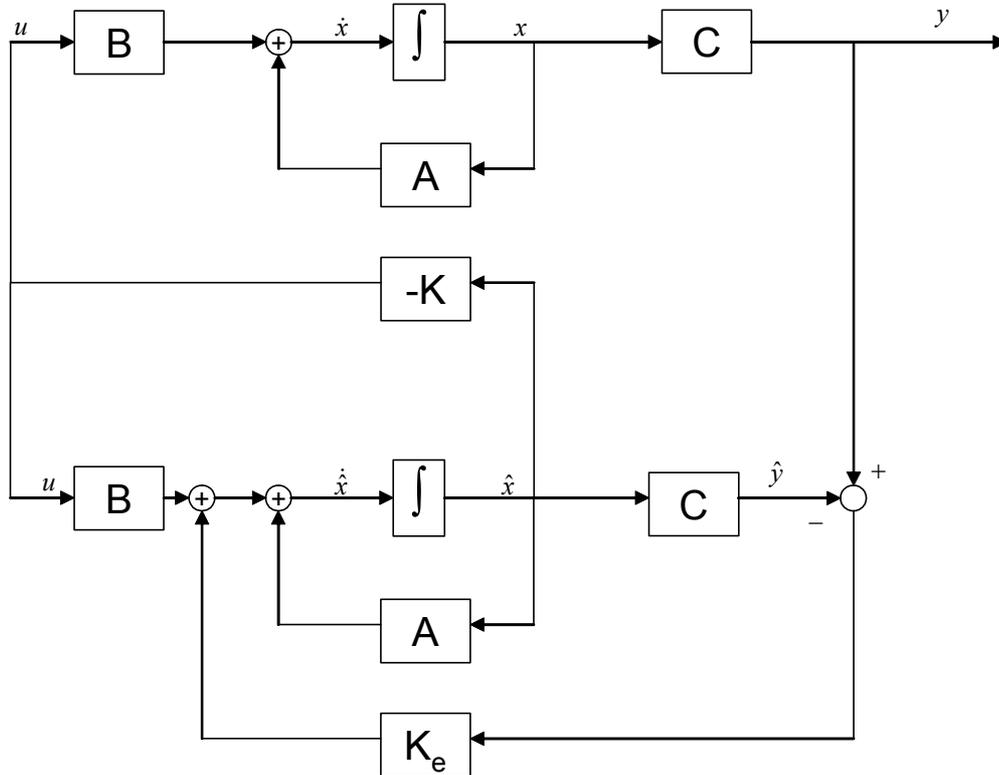


Figura 1.13: Sistema de control mediante la realimentación del estado observado.

Se van analizar, a continuación, los efectos del uso del estado observado en lugar del estado real en la ecuación característica de un sistema en lazo cerrado. Considérese el sistema definido por (1.61) con el control mediante la realimentación del estado observado

$$u = -K \cdot \hat{x} \tag{1.69}$$

Con este control la ecuación de estado toma la siguiente forma:

$$\dot{x} = A \cdot x - BK \cdot \hat{x}$$

Que se puede escribir equivalentemente en la forma:

$$\dot{x} = (A - B \cdot K) \cdot x + B \cdot K \cdot (x - \hat{x}) \tag{1.70}$$

La sustitución del vector de error produce

$$\dot{x} = (A - B \cdot K) \cdot x + B \cdot K \cdot e \quad (1.71)$$

Combinando esta ecuación con la ecuación (1.65) del observador de estado se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B \cdot K & B \cdot K \\ 0 & A - K_e \cdot C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (1.72)$$

Esta ecuación describe la dinámica del sistema de control mediante la realimentación del estado observado. La ecuación característica par este sistema es:

$$\begin{vmatrix} s \cdot I - A + B \cdot K & -B \cdot K \\ 0 & s \cdot I - A + K_e \cdot C \end{vmatrix} = 0 \quad (1.73)$$

O equivalentemente:

$$|s \cdot I - A + B \cdot K| \cdot |s \cdot I - A + K_e \cdot C| = 0 \quad (1.74)$$

Se pone de manifiesto que los polos en lazo cerrado del sistema de control mediante la realimentación del estado observado consisten en los polos producidos sólo por el diseño mediante ubicación de polos y los polos producidos sólo por el diseño del observador. En conclusión el diseño mediante la ubicación de los polos y el diseño del observador son independientes uno del otro.

En general los polos del observador se seleccionan para que la respuesta del observador sea mucho más rápida que la respuesta del sistema. Una regla práctica es elegir una respuesta del observador al menos de 2 a 5 veces más rápida que la respuesta del sistema. Por lo general la velocidad de respuesta máxima del observador se limita sólo mediante el problema de sensibilidad y el ruido implícitos en el sistema de control. Puesto que los polos del observador se ubican a la izquierda de los polos en lazo cerrado deseados en el proceso de ubicación de polos, estos últimos dominarán en la respuesta.

#### 1.7.2.4 Función de transferencia para el controlador-observador

La ecuación del observador (1.63) dado que se realimenta al sistema el estado observado (1.69) se convierte en:

$$\hat{x} = (A - K_e \cdot C - B \cdot K) \hat{x} + K_e \cdot y \quad (1.75)$$

Si se toma la transformada de Laplace de esta ecuación, supuesto condiciones iniciales nulas, se obtiene:

$$s \cdot \hat{X}(s) = (A - K_e \cdot C - B \cdot K) \cdot \hat{X}(s) + K_e \cdot Y(s) \quad (1.76)$$

Despejando  $\hat{X}(s)$  se obtiene:

$$\hat{X}(s) = (s \cdot I - A + K_e \cdot C + B \cdot K)^{-1} \cdot K_e \cdot Y(s) \quad (1.77)$$

Si se toma la transformada de Laplace de la ecuación (1.69) y se sustituye en ella (1.77) se obtiene:

$$U(s) = -K \cdot (s \cdot I - A + K_e \cdot C + B \cdot K)^{-1} \cdot K_e \cdot Y(s) \quad (1.78)$$

Se define la función de transferencia del controlador-observador como:

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = K \cdot (s \cdot I - A + K_e \cdot C + B \cdot K)^{-1} \cdot K_e \quad (1.79)$$

En la Figura 1.14 se muestra la representación del sistema en diagrama de bloques:

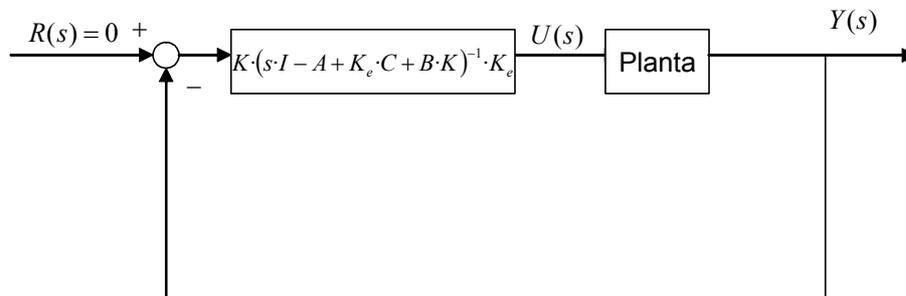


Figura 1.14: Representación en diagrama de bloques del sistema con un controlador-observador.

♦ **Ejemplo 1.16:**

Considérese el diseño de un sistema regulador para la planta siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Supóngase que se ha utilizado el enfoque de ubicación de polos para el diseño del sistema y que los polos en lazo cerrado deseados para este sistema están en  $s=-1.8+j\cdot 2.4$  y  $s=-1.8-j\cdot 2.4$ . La matriz de ganancias de realimentación del estado  $K$  para este caso es:

$$K = [29.6 \quad 3.6]$$

Supóngase además que se usa un control mediante realimentación del estado observado:

$$u = -[29.6 \quad 3.6] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

Se elige que los valores característicos de la matriz de ganancias del observador sean:

$$\mu_1 = \mu_2 = -8$$

Hay que determinar la matriz de ganancias del observador  $K_e$ .

En primer lugar hay que comprobar la observabilidad del sistema, para ello se calcula la matriz de observabilidad:

$$M_o = [C^T \mid A^T \cdot C^T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como  $|M_o|=-1$  su rango es 2, y por lo tanto el sistema es de estado completamente observable y es posible la determinación de la matriz de ganancias del observador  $K_e$ .

Una posible forma de calcular  $K_e$  es calculando la ecuación característica deseada para el observador,

$$(s + 8) \cdot (s + 8) = s^2 + 16 \cdot s + 64$$

Calculando la ecuación característica del observador,

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \end{bmatrix} \cdot [0] \right| = \begin{vmatrix} s + k_{e1} & -1 \\ -20.6 + k_{e2} & s \end{vmatrix} = s^2 + k_{e1} \cdot s - 20.6 + k_{e2}$$

e igualando ambas ecuaciones:

$$s^2 + k_{e1} \cdot s - 20.6 + k_{e2} = s^2 + 16 \cdot s + 64$$

se obtiene,  $k_{e1}=16$  y  $k_{e2}=84.6$ . Es decir,

$$K_e = \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix}$$

La ecuación del observador (1.63) dado que se realimenta al sistema el estado observado (1.69) se convierte en:

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_e \cdot C - B \cdot K) \tilde{x} + K_e \cdot y$$

Sustituyendo valores se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93.6 & -3.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} \cdot y$$

Por otra parte, la función de transferencia del controlador-observador viene dada por (1.79), sustituyendo valores se obtiene:

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = [29.6 \quad 3.6] \begin{bmatrix} s+16 & -1 \\ 93.6 & s+3.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} = \frac{778.16 \cdot s + 3690.72}{s^2 + 19.6 \cdot s + 151.2}$$

Su diagrama de bloques sería el dado en la Figura 1.15:

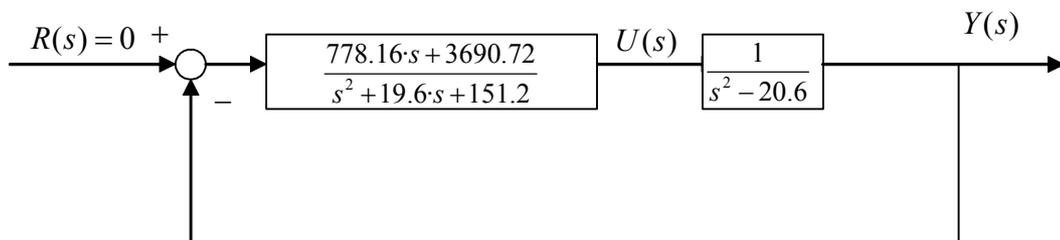


Figura 1.15

El sistema, como un todo, es de cuarto orden y su ecuación característica sería:

$$|s \cdot I - A + B \cdot K| \cdot |s \cdot I - A + K_e \cdot C| = (s^2 + 3.6 \cdot s + 9) \cdot (s^2 + 16 \cdot s + 64) = 0$$

Operando:

$$s^4 + 19.6 \cdot s^3 + 130.6 \cdot s^2 + 374.4 \cdot s + 576 = 0$$

Obsérvese que esta ecuación característica también se puede obtener calculando la función de transferencia en lazo cerrado  $Y(s)/R(s)$ , su denominador igualado a cero sería precisamente dicha ecuación característica.



### 1.7.2.5 Observador de orden mínimo

En la práctica algunas variables de estado se miden con precisión y no necesitan estimarse. Supóngase que el vector de estados  $x$  es de dimensión  $n$  y que el vector de salida  $y$  es un vector de dimensión  $m$  medible. Dado que las  $m$  variables de salida son combinaciones lineales de las variables de estado, sólo necesitan estimarse  $n-m$  variables de estado. Así, el observador de estado de orden reducido será de orden  $n-m$ .

Para establecer la idea básica del observador de orden mínimo, sin complicaciones matemáticas innecesarias, se va a presentar el caso en el que la salida es un escalar ( $m=1$ ) y se obtendrá la ecuación de estado para el observador de orden mínimo.

Supóngase que el vector de estado  $x$  se divide en dos partes  $x_a$  (un escalar) y  $x_b$  (un vector de dimensión  $n-1$ ). Aquí la variable de estado  $x_a$  es igual a la salida  $y$  que se mide directamente. Mientras que  $x_b$  es la parte que no se puede medir del vector de estado. Teniendo en cuenta esta distinción las ecuaciones de estado y de salida toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} \cdot u \\ y &= [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.80)$$

En donde:

$A_{aa}$  es un escalar.

$A_{ab}$  es una matriz de dimensión  $1 \times (n-1)$ .

$A_{ba}$  es una matriz de dimensión  $(n-1) \times 1$ .

$A_{bb}$  es una matriz de dimensión  $(n-1) \times (n-1)$ .

$B_a$  es un escalar.

$B_b$  es una matriz de dimensión  $(n-1) \times 1$

A partir de (1.80), la ecuación para la parte medida del estado es:

$$\dot{x}_a = A_{aa} \cdot x_a + A_{ab} \cdot x_b + B_a \cdot u$$

O equivalentemente:

$$\dot{x}_a - A_{aa} \cdot x_a - B_a \cdot u = A_{ab} \cdot x_b \quad (1.81)$$

Esta ecuación relaciona las cantidades medibles y no medibles del estado, y funciona como la ecuación de salida

Por otra parte, a partir de (1.80), la ecuación para la dinámica de la parte no medida del estado es:

$$\dot{x}_b = A_{ba} \cdot x_a + A_{bb} \cdot x_b + B_b \cdot u \quad (1.82)$$

	Observador de estado de orden completo	Observador de estado de orden mínimo
Ecuación de estado	$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$	$\dot{x}_b = A_{ba} \cdot x_a + A_{bb} \cdot x_b + B_b \cdot u$
Ecuación de salida	$y = C \cdot x$	$\dot{x}_a - A_{aa} \cdot x_a - B_a \cdot u = A_{ab} \cdot x_b$

Tabla 1.1

Observador de estado de orden completo	Observador de estado de orden mínimo
$\hat{x}$	$x_b$
$A$	$A_{bb}$
$B \cdot u$	$A_{ba} \cdot x_a + B_b \cdot u$
$y$	$\dot{x}_a - A_{aa} \cdot x_a - B_a \cdot u$
$C$	$A_{ab}$
$K_e$ (matriz de $n \times 1$ )	$K_e$ (matriz de $(n-1) \times 1$ )

Tabla 1.2

Si se comparan las ecuaciones de estado y de salida para el observador de orden completo con la del observador de orden mínimo (Ver Tabla 1.1) se pueden generar una lista de las sustituciones necesarias para escribir la ecuación para el observador de estado de orden mínimo (ver Tabla 1.2)

La ecuación del observador de estado de orden completo es (ver sección 1.7.2.1)

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_e \cdot C)\hat{x} + B \cdot u + K_e \cdot y \quad (1.83)$$

Realizando en esta ecuación las sustituciones indicadas en la Tabla 1.2, reordenando términos y definiendo:

$$x_b - K_e \cdot y = x_b - K_e \cdot x_a = \eta \quad (1.84)$$

y

$$\hat{x}_b - K_e \cdot y = \hat{x}_b - K_e \cdot x_a = \hat{\eta} \quad (1.85)$$

entonces la ecuación del observador de orden mínimo es:

$$\dot{\hat{\eta}} = (A_{bb} - K_e \cdot A_{ab})\hat{\eta} + [(A_{bb} - K_e \cdot A_{ab})K_e + A_{ba} - K_e \cdot A_{aa}]y + (B_b - K_e \cdot B_a)u \quad (1.86)$$

Además la ecuación de error para el observador de orden mínimo es:

$$\dot{e} = (A_{bb} - K_e \cdot A_{ab})e \quad (1.87)$$

La dimensión del vector de error  $e$  es  $(n-1) \times 1$ .

Para que sea posible la determinación de la matriz de ganancias del observador  $K_e$  y poder diseñar el observador de orden mínimo, la condición de observabilidad que se debe cumplir es que:

$$M_o^{\min} = \begin{bmatrix} A_{ab} \\ A_{ab} \cdot A_{bb} \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{ab} \cdot A_{bb}^{n-2} \end{bmatrix} \quad (1.88)$$

sea de rango  $n-1$ .

La ecuación característica para el observador de orden mínimo se obtiene a partir de la ecuación de error de la siguiente forma:

$$\Delta_{\min}^c(s) = |s \cdot I - A_{bb} + K_e \cdot A_{ab}| = s^{n-1} + \hat{a}_{n-2}s^{n-2} + \dots + \hat{a}_1s + \hat{a}_0 = 0 \quad (1.89)$$

Si los valores característicos deseados para el observador de orden mínimo son  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ , entonces la ecuación característica deseada sería:

$$\Delta_{\min}^c(s) = (s - \mu_1) \cdot (s - \mu_2) \cdot \dots \cdot (s - \mu_{n-1}) = 0 \quad (1.90)$$

La constante de error  $K_e$  puede obtenerse a partir de la ecuación (1.68) modificándola de la siguiente forma:

$$K_e = \phi(A_{bb}) \cdot (M_o^{\min})^{-1} \cdot e_{n-1}^T \quad (1.91)$$

en donde:

$$\phi(A_{bb}) = A_{bb}^{n-1} + \hat{a}_{n-2}A_{bb}^{n-2} + \dots + \hat{a}_1A_{bb} + \hat{a}_0 \cdot I$$

◆ **Ejemplo 1.17:**

Considérese el sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Suponga que la salida  $y$  se puede medir con precisión, con lo cual no necesita estimarse la variable de estado  $x_1$  (ya que es igual a  $y$ ). Diseñar un observador de orden mínimo (que será de segundo orden) supuesto que los valores característicos deseados para dicho observador son:

$$\mu_1 = -2 + j \cdot 2\sqrt{3}$$

$$\mu_2 = -2 - j \cdot 2\sqrt{3}$$

El vector de estado y las matrices A y B se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \text{---} \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a \\ \text{---} \\ x_b \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & | & 1 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & | & 0 & 1 \\ -6 & | & -11 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & | & A_{ab} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ A_{ba} & | & A_{bb} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{---} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_a \\ \text{---} \\ B_b \end{bmatrix}$$

Luego se tiene:

$$x_a = x_1 \quad x_b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A_{aa} = 0 \quad A_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{ba} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} \quad A_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B_a = 0 \quad B_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para que sea posible la determinación de la matriz de ganancias del observador  $K_e$  y poder diseñar el observador de orden mínimo, la condición de observabilidad que se debe cumplir es que:

$$M_0^{\min} = \begin{bmatrix} A_{ab} \\ A_{ab} \cdot A_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sea de rango  $n-1=3-1=2$ . Efectivamente esto es así.

De acuerdo con la ecuación (1.90), la ecuación característica deseada para el observador de orden mínimo es:

$$\Delta_{\min}^c(s) = (s + 2 - j \cdot 2\sqrt{3}) \cdot (s + 2 + j \cdot 2\sqrt{3}) = s^2 + 4 \cdot s + 16 = 0 \quad (1.92)$$

Luego  $\phi(A_{bb})$  es:

$$\phi(A_{bb}) = A_{bb}^2 + 4 \cdot A_{bb} + 16 \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}^2 + 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} + 16 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 22 & 17 \end{bmatrix}$$

La constante de error  $K_e$  se va a obtener a través de la ecuación (1.91):

$$K_e = \phi(A_{bb}) \cdot (M_o^{\min})^{-1} \cdot e_{n-1}^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 22 & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Puesto que:

$$A_{bb} - K_e \cdot A_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -28 & -6 \end{bmatrix}$$

La ecuación para el observador de estado de orden mínimo, de acuerdo con (1.86) es:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\eta}}_2 \\ \dot{\hat{\eta}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -28 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\eta}_2 \\ \hat{\eta}_3 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -28 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} \cdot 0 \right\} \cdot y + \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} \cdot 0 \right\} \cdot u$$

Operando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\eta}}_2 \\ \dot{\hat{\eta}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -28 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\eta}_2 \\ \hat{\eta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -52 \end{bmatrix} \cdot y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

En donde:

$$\begin{bmatrix} \hat{\eta}_2 \\ \hat{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - K_e \cdot y$$

O equivalentemente:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\eta}_2 \\ \hat{\eta}_3 \end{bmatrix} + K_e \cdot x_1$$

Si se usa la realimentación del estado observado, la señal de control  $u$  se convierte en:

$$u = -K \cdot \hat{x} = -K \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix}$$

en donde  $K$  es la matriz de ganancias de realimentación del estado (que no se ha determinado en este ejemplo).

◆

# TEMA 2

## MODELOS DE SISTEMAS DISCRETOS

### 2.1 INTRODUCCION

En las últimas décadas se ha incrementado el uso de controladores digitales en sistemas de control. Los controladores digitales se utilizan para alcanzar el desempeño óptimo, por ejemplo, en la forma de productividad máxima, beneficio máximo, costo mínimo o la utilización mínima de energía. La capacidad en la toma de decisiones y la flexibilidad en los programas de control son las mayores ventajas de los sistemas de control digital.

La tendencia actual de controlar los sistemas dinámicos en forma digital en lugar de analógica, se debe principalmente a la disponibilidad de computadores digitales de bajo costo y a las ventajas de trabajar con señales digitales en lugar de señales en tiempo continuo.

Los sistemas de control en tiempo discreto son aquellos sistemas en los cuales una o más variables pueden cambiar sólo en valores discretos de tiempo. Estos instantes, pueden especificar los tiempos en los que se lleva a cabo alguna medición de tipo físico o los tiempos en los que se extraen los datos de la memoria de un computador digital. El intervalo de tiempo entre estos dos instantes discretos se supone que es lo suficientemente corto de modo que el dato para el tiempo entre éstos se pueda aproximar mediante una interpolación sencilla.

Los sistemas en tiempo discreto, los cuales involucran señales de datos muestreados o señales digitales y posiblemente señales en tiempo continuo, se pueden describir mediante ecuaciones en diferencias después de la apropiada discretización de las señales en tiempo continuo.

En este tema se extienden al caso de los sistemas discretos los conceptos estudiados en el tema anterior. Además se estudia el enfoque de ecuaciones polinomiales para el

diseño de sistemas de control, que es una técnica alternativa al diseño mediante ubicación de polos cuyo estudio resulta útil de cara a comprender mejor el control estocástico (Tema-9).

## 2.2 MODELADO DE SEÑALES DISCRETAS

### 2.2.1 Secuencias

Las señales que maneja un computador se pueden modelar como secuencias, que son conjuntos ordenados de valores. El orden se indica mediante un número entero y se representan por:  $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ , o de forma abreviada por  $\{y_k\}$ .

Una forma alternativa de definir una señal es mediante la posible función que define el término genérico de la secuencia. Por ejemplo:  $y_k = 1 + 0.5^k - 0.3^{2k}$  define la secuencia  $\{1, 1.41, 1.242, \dots\}$ .

Las operaciones básicas que se pueden realizar con una secuencia son:

- Suma o resta:

$$\{x_k\} = \{y_k\} + \{u_k\} = \{y_0 + u_0, y_1 + u_1, y_2 + u_2, \dots\}$$

- Multiplicación por un escalar:

$$\{x_k\} = \alpha \cdot \{y_k\} = \{\alpha \cdot y_0, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot y_2, \dots\}$$

- Retraso de una secuencia:

$$\{x_k\} = \{y_{k-d}\} = \{0_0, 0_1, \dots, 0_d, y_0, y_1, y_2, \dots\}$$

Estas secuencias se pueden obtener como valores que, a lo largo del tiempo y normalmente en instantes de tiempo igualmente espaciados por un periodo  $T$ , va tomando una variable determinada. Para estos tipos de secuencia obtenidas a partir del muestreo con periodo  $T$  de una señal continua es corriente usar la siguiente notación:

$$y(k \cdot T) = \{y(0), y(T), y(2 \cdot T), \dots\} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Si el periodo es  $T=1$  s, entonces:

$$y(k) = \{y(0), y(1), y(2), \dots\} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

que es equivalente a la notación:

$$y(k) \equiv \{y_k\} = \{y_0, y_1, y_2, \dots\} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

◆ **Ejemplo 2.1:**

Considérese la planta

$$P(s) = \frac{1}{s+1}$$

En la Figura 2.1 se muestra en línea continua la respuesta  $y(t)$  de la planta al ser excitada por una entrada escalón. Además se representa con círculos la respuesta muestreada con un periodo  $T=0.25$  s. Los puntos muestreados forman la secuencia:

$$y(k \cdot 0.25) \equiv \{y(0), y(0.25), y(0.50), \dots\} = (0, 0.2212, 0.3934, \dots) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

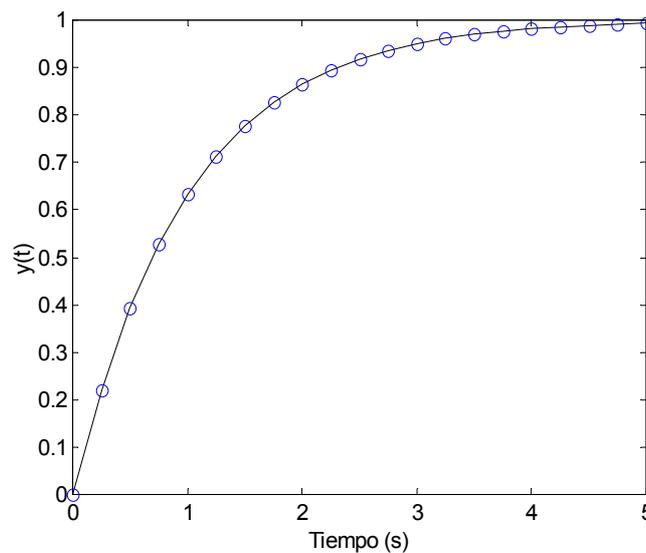


Figura 2.1: Respuesta  $y(t)$  (línea continua) a un escalón de la planta  $P(s)$  y puntos muestreados (círculos) con  $T=0.25$  s.

◆

## 2.2.2 La transformada Z de una secuencia

Trabajar con secuencias no parece lo más apropiado para obtener las características dinámicas y estáticas de los sistemas discretos. Por este motivo, se introduce la transformada Z que facilita el análisis matemático de las secuencias. La transformada Z en

sistemas de control en tiempo discreto juega el mismo papel que la transformada de Laplace en los sistemas de control en tiempo continuo.

Dada una secuencia  $\{y_k\}$  su transformada Z se define mediante la siguiente ecuación:

$$Y(z) = Z[\{y_k\}] = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \cdot z^{-i} = y_0 + y_1 \cdot z^{-1} + y_2 \cdot z^{-2} + \dots \quad (2.1)$$

La transformada Z de una función del tiempo  $y(t)$  que ha sido muestreada con un periodo  $T$ , obteniéndose la secuencia de valores  $y(k \cdot T)$  con  $k=0,1,2,\dots$  se define mediante la siguiente ecuación:

$$Y(z) = Z[y(t)] = Z[y(k \cdot T)] = \sum_{k=0}^{\infty} y(k \cdot T) \cdot z^{-k} = y(0) + y(T) \cdot z^{-1} + y(2 \cdot T) \cdot z^{-2} + \dots \quad (2.2)$$

Algunas de sus propiedades más importantes son:

- Multiplicación por una constante.

$$Z[a \cdot \{y_k\}] = a \cdot Z[\{y_k\}] = a \cdot Y(z)$$

- Carácter lineal de la transformación.

$$Z[a \cdot \{y_k\} + b \cdot \{u_k\}] = a \cdot Z[\{y_k\}] + b \cdot Z[\{u_k\}] = a \cdot Y(z) + b \cdot U(z)$$

- Desplazamiento temporal:

$$Z\{y_{k-d}\} = z^{-d} \cdot Y(z) \quad (2.3)$$

$$Z\{y_{k+d}\} = z^d \cdot Y(z) - z^d \cdot y_0 - z^{d-1} \cdot y_1 - \dots - z \cdot y_{d-1} \quad (2.4)$$

- Teorema del valor final. Permite el cálculo del valor límite de la secuencia, si éste existe (todos los polos de  $X(z)$  se encuentran dentro del círculo unitario con la posible excepción de un solo polo en  $z=1$ ), a partir del conocimiento de la función transformada, según la expresión:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{y_k\} = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1}) \cdot Y(z)] \quad (2.5)$$

◆ **Ejemplo 2.2:**

Sea la función escalón unitario:

$$y(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Se trata de un función continua en el tiempo. Si dicha señal se muestrea con un periodo  $T$  se obtendría la siguiente secuencia:

$$\{y_k\} = \{1, 1, 1, \dots\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

La transformada Z se calcula aplicando la ecuación (2.1):

$$Y(z) = Z[\{y_k\}] = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \cdot z^{-i} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

◆

◆ **Ejemplo 2.3:**

Sea la función rampa unitaria:

$$y(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Se trata de un función continua en el tiempo. Si dicha señal se muestrea con un periodo  $T$  se obtendría la siguiente secuencia:

$$\{y_k\} = \{0, T, 2T, \dots\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

La transformada Z se calcula aplicando la ecuación (2.1):

$$\begin{aligned} Y(z) &= Z[\{y_k\}] = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \cdot z^{-i} = 0 + T \cdot z^{-1} + 2T \cdot z^{-2} + 3T \cdot z^{-3} + \dots = T \cdot (z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + 3 \cdot z^{-3}) \\ &= T \cdot \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{T \cdot z}{(z - 1)^2} \end{aligned}$$

◆

La transformación en Z es biunívoca, pudiendo pasar a su secuencia asociada de forma inmediata. Así dada la transformada Z de una secuencia es posible obtener la secuencia original aplicando la transformada Z inversa, que se denota mediante  $Z^{-1}$ . Es decir,

$$Z^{-1}[Y(z)] = y(k) = \{y_k\} \quad (2.6)$$

Si  $Y(z)$  viene expresada de forma racional existen diferentes métodos para obtener la transformada Z inversa, por ejemplo:

- 1) *Método de expansión en fracciones simples.* Se descompone en fracciones simples a  $Y(z)$  y se utiliza una tabla de transformadas elementales para obtener la transformada Z inversa de cada uno de las fracciones.
- 2) *Método de la división directa.* Se divide el numerador de  $Y(z)$  entre el denominador de  $Y(z)$ , el cociente que se va obteniendo es la expansión de  $Y(z)$  en una serie infinita de potencias de  $z^{-1}$ . Los coeficientes de cada una de las potencias  $z^{-i}$  son de acuerdo con (2.1) los elementos de la secuencia  $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ . Con este método rara vez es posible obtener la expresión para el término general  $\{y_k\}$ .

## 2.3 MODELADO DE SISTEMAS DISCRETOS

Existen tres formas de modelar los sistemas discretos: ecuación en diferencia, ecuación de estado y función de transferencia.

### 2.3.1 Ecuación en diferencias

Una ecuación en diferencias da el valor de la salida actual  $y_k$  en función de los valores de las salidas anteriores  $y_{k-1}, y_{k-2}, \dots$  y de las entradas actual  $u_k$  y anteriores  $u_{k-1}, u_{k-2}, \dots$

$$y_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-m}, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n})$$

La ecuación en diferencias permite representar el modelo con un número finito de términos. Si la función  $f$  es no lineal el proceso será discreto no lineal y si la ecuación es lineal pero sus coeficientes varían con el tiempo, el proceso es lineal y variable con el tiempo. De la misma forma, si la función que representa el modelo es lineal y sus coeficientes son constantes el proceso discreto es lineal e invariante. Para este último caso la ecuación en diferencias queda:

$$y_k = \sum_{i=0}^m b_i \cdot u_{k-i} - \sum_{i=1}^n a_i \cdot y_{k-i} \quad (2.7)$$

O de forma equivalente:

$$y(k) + a_1 \cdot y(k-1) + \dots + a_n \cdot y(k-n) = b_0 \cdot u(k) + b_1 \cdot u(k-1) + \dots + b_m \cdot u(k-m) \quad (2.8)$$

Si se define el operador retardo  $q^{-1}$  como

$$\begin{aligned} q^{-1} \cdot y(k) &= y(k-1) \\ q \cdot y(k) &= y(k+1) \end{aligned}$$

entonces la ecuación (2.8) se puede expresar como:

$$A(q^{-1}) \cdot y(k) = B(q^{-1}) \cdot u(k)$$

donde

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 \cdot q^{-1} + \dots + a_n \cdot q^{-n} \\ B(q^{-1}) &= 1 + b_1 \cdot q^{-1} + \dots + b_m \cdot q^{-m} \end{aligned}$$

◆ **Ejemplo 2.4:**

Se desea resolver la siguiente ecuación en diferencias:

$$2 \cdot y(k) - 2 \cdot y(k-1) + y(k-2) = u(k)$$

donde  $y(k)=0$  para  $k < 0$  y

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Los valores de la secuencia  $y(k)$  se obtienen a partir de la ecuación en diferencias:

$$y(k) = \frac{2 \cdot y(k-1) - y(k-2) + u(k)}{2}$$

Los primeros valores de la secuencia son:

$$y(0) = \frac{2 \cdot y(-1) - y(-2) + u(0)}{2} = 0.5$$

$$y(1) = \frac{2 \cdot y(0) - y(-1) + u(1)}{2} = \frac{2 \cdot 0.5 - 0 + 1}{2} = 1$$

$$y(2) = \frac{2 \cdot y(1) - y(0) + u(2)}{2} = \frac{2 \cdot 1 - 0.5 + 1}{2} = 1.25$$

Se va a resolver la ecuación en diferencias tomando la transformada Z:

$$2Y(z) - 2z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Despejando Y(z):

$$Y(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})} \cdot \frac{1}{(2-2z^{-1}+z^{-2})} = \frac{z^3}{(z-1)(2z^2-2z+1)}$$

Expandiendo Y(z) en fracciones simples:

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{-z^2+z}{2z^2-2z+1} = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{-1+z^{-1}}{2-2z^{-1}+z^{-2}}$$

Nótese que los polos involucrados en el último término cuadrático de Y(z) son complejos conjugados.

Por lo tanto Y(z) se puede describir de la siguiente forma:

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-0.5z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{0.5z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

Si se acude a una Tabla de transformadas z (ver Apéndice A), se encuentra que:

$$X(z) = \frac{e^{-aT} \cdot z^{-1} \cdot \text{sen}(\omega T)}{1 - 2e^{-aT} \cdot \cos(\omega T) \cdot z^{-1} + e^{-2aT} \cdot z^{-2}} \Rightarrow x(k) = e^{-a \cdot k \cdot T} \cdot \text{sen}(\omega \cdot k \cdot T)$$

y que

$$X(z) = \frac{1 - e^{-aT} \cdot z^{-1} \cdot \cos(\omega T)}{1 - 2e^{-aT} \cdot \cos(\omega T) \cdot z^{-1} + e^{-2aT} \cdot z^{-2}} \Rightarrow x(k) = e^{-a \cdot k \cdot T} \cdot \cos(\omega \cdot k \cdot T)$$

Para  $Y(z)$  se identifica que

$$e^{-2 \cdot a \cdot T} = 0.5$$

$$\cos(\omega T) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego, se obtiene que

$$\omega T = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{sen}(\omega T) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Entonces la transformada Z inversa de  $Y(z)$  se puede escribir como:

$$y(k) = 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-a \cdot k \cdot T} \cdot \cos(\omega \cdot k \cdot T) + \frac{1}{2} \cdot e^{-a \cdot k \cdot T} \cdot \text{sen}(\omega \cdot k \cdot T)$$

Y sustituyendo valores:

$$y(k) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \cdot \text{sen}\left(\frac{k \cdot \pi}{4}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Conviene comprobar que el término general obtenido es el correcto, para ello se van calcular los primeros valores de la secuencia:

$$y(0) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 \cdot \cos(0) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 \cdot \text{sen}(0) = 0.5$$

$$y(1) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$y(2) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.25$$

◆

### 2.3.2 Ecuación de estado

Para sistemas (lineales o no lineales) de tiempo discreto variantes en el tiempo, la ecuación de estado se puede escribir como:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, k)$$

Y la ecuación de salida como:

$$y_k = g(x_k, u_k, k)$$

Para los sistemas lineales de tiempo discreto variantes en el tiempo, la ecuación de estado y la ecuación de salida se pueden simplificar a la forma:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= F_k \cdot x_k + G_k \cdot u_k \\y_k &= C_k \cdot x_k + D_k \cdot u_k\end{aligned}$$

donde:

$x_k$  es el vector de estado de dimensión  $n \times 1$

$y_k$  es el vector de salida de dimensión  $m \times 1$

$u_k$  es el vector de entrada de dimensión  $r \times 1$

$F_k$  es la matriz de estado de dimensión  $n \times n$

$G_k$  es la matriz de entrada de dimensión  $n \times r$

$C_k$  es la matriz de salida de dimensión  $m \times n$

$D_k$  es la matriz de transmisión directa  $m \times r$

La presencia del subíndice  $k$  implica que tanto los vectores como las matrices varían con el tiempo. Si dicho subíndice no aparece se supone que son invariables en el tiempo, es decir, constantes. Luego si el sistema lineal es invariante en el tiempo entonces las ecuaciones toman la forma:

$$x_{k+1} = F \cdot x_k + G \cdot u_k \quad (2.9)$$

$$y_k = C \cdot x_k + D \cdot u_k \quad (2.10)$$

En la Figura 2.2 aparece representado el diagrama de bloques asociado a las ecuaciones (2.9).

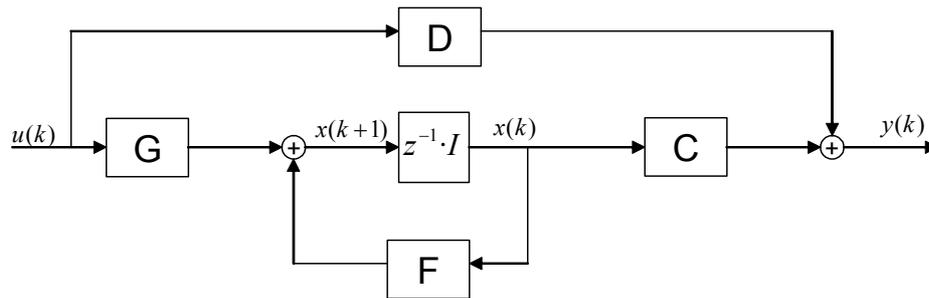


Figura 2.2: Diagrama de bloques de un sistema de control lineal en tiempo discreto invariante en el tiempo representado en el espacio de estados.

### 2.3.3 Función de transferencia

Si se toma la transformada Z sobre la ecuación en diferencias que representa a una sistema lineal e invariante en el tiempo (2.8)

$$Y(z) + a_1 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + \dots + a_n \cdot z^{-n} \cdot Y(z) = b_0 \cdot U(z) + b_1 \cdot z^{-1} \cdot U(z) + \dots + b_m \cdot z^{-m} \cdot U(z) \quad (2.11)$$

La ecuación anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-(n-m)} \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_m \cdot z^{-m}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_n \cdot z^{-n}} = \frac{b_0 \cdot z^m + b_1 \cdot z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (2.12)$$

A  $H(z)$  se le conoce como *función de transferencia discreta*.

También es posible obtener  $H(z)$  a partir de las ecuaciones de estado y de salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo. Si se toma la transformada Z en (2.9) y (2.10) y supuesto  $x_0=0$ :

$$\begin{aligned} z \cdot X(z) &= F \cdot X(z) + G \cdot U(z) \\ Y(z) &= C \cdot X(z) + D \cdot U(z) \end{aligned}$$

Operando se obtiene:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C \cdot (z \cdot I - F)^{-1} \cdot G + D \quad (2.13)$$

$H(z)$  es una matriz de  $m \times r$ , y se le denomina como *matriz de transferencia pulso*. En el caso SISO ( $m=1, r=1$ ),  $H(z)$  es un escalar y se le denomina *función de transferencia pulso*.

La relación entre la ecuación en diferencias (2.8) y la función de transferencia discreta (2.12) es directa y biunívoca. Sin embargo dada la función de transferencia discreta (2.12) pueden existir distintas representaciones (formas canónicas) en variables de estado (2.9) asociadas.

### 2.3.4 Formas canónicas

La función de transferencia discreta (2.12) de un sistema de orden  $n$  contiene  $n+m+1$  parámetros: los coeficientes del numerador  $b_0, b_1, \dots, b_m$  y los coeficientes del denominador  $a_1, \dots, a_n$ . Un modelo en el espacio de estados se dice que está en *forma canónica* si se escribe en términos de  $n+m+1$  parámetros y puede representar a una función de transferencia arbitraria de  $m$  ceros y  $n$  polos.

Al igual que sucede con los sistemas continuos (ver sección 1.4), existen principalmente tres formas canónicas para la representación en variables de estado de un sistema discreto:

1) *Forma canónica controlable* (si  $m < n$ ):

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \cdot x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u_k \\
 y_k &= [b_m \quad \dots \quad b_0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \cdot x_k
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

En el caso en que  $n=m$  entonces la ecuación de salida es:

$$y_k = [b_m \quad \dots \quad b_0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \cdot x_k + b_0 \cdot u_k \tag{2.15}$$

2) *Forma canónica observable*<sup>1</sup> (si  $m < n$ ):

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \cdot x_k + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \cdot u_k \\
 y_k &= [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \cdot x_k
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

<sup>1</sup> Existe otra expresión equivalente para la forma canónica observable como se puede comprobar en el libro *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. K. Ogata

En el caso de que  $n=m$  la ecuación de salida toma la forma:

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \cdot x(t) + g_0 \cdot u(t) \quad (2.17)$$

Los elementos  $g_i$  provienen del desarrollo en serie de Laurent en el origen  $z=0$  de  $H(z)$ . Es decir,

$$H(z) = \frac{\text{num}H(z^{-1})}{\text{den}H(z^{-1})} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \cdot z^{-k} = g_0 + g_1 \cdot z^{-1} + g_2 \cdot z^{-2} + \dots + g_n \cdot z^{-n} + \dots \quad (2.18)$$

En el caso de sistemas discretos el desarrollo en serie de Laurent se obtiene dividiendo de forma directa el numerador de la función de transferencia  $\text{num}H(z^{-1})$  entre su denominador  $\text{den}H(z^{-1})$ .

### 3) Forma canónica de Jordan

En el caso SISO la representación en variables de estado en forma canónica de Jordan toma la siguiente expresión:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u_k \quad (2.19)$$

$$y_k = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \cdot x_k + d \cdot u_k$$

Los coeficientes  $c_i$  y los autovalores  $\lambda_i$  se obtienen desarrollando en fracciones simples la función de transferencia  $H(z)$ :

$$H(z) = d + \frac{c_1}{z - \lambda_1} + \frac{c_2}{z - \lambda_2} + \dots + \frac{c_n}{z - \lambda_n} \quad (2.20)$$

## 2.4 RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE ESTADO

### 2.4.1 Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Considérense las ecuaciones de estado (2.9) y de salida (2.10) para un determinado sistema discreto lineal e invariante en el tiempo. La solución de la ecuación (2.9) para cualquier entero positivo  $k$  se puede obtener directamente por recursión, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
x_1 &= F \cdot x_0 + G u_0 \\
x_2 &= F \cdot x_1 + G u_1 = F^2 \cdot x_0 + F \cdot G u_0 + G u_1 \\
x_3 &= F \cdot x_2 + G u_2 = F^3 \cdot x_0 + F^2 \cdot G u_0 + F \cdot G u_1 + G u_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Luego mediante la repetición de este procedimiento, se obtiene:

$$x_k = F^k \cdot x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} F^{k-i-1} \cdot G u_i \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.21)$$

Se observa que la solución  $x_k$  está formada por dos partes, una que representa la contribución del estado inicial  $x_0$  y otra que representa la contribución de la entrada  $u_i$   $i=0, 1, 2, \dots, k-1$ . Conocido  $x_k$  entonces de acuerdo con (2.10) la salida está dada por la expresión:

$$y_k = C \cdot F^k \cdot x_0 + C \cdot \sum_{i=0}^{k-1} F^{k-i-1} \cdot G u_i + D \cdot u_k \quad (2.22)$$

La matriz de transición de estados (matriz fundamental)  $\Psi_k$  para el sistema definido por (2.9), es la solución de la ecuación homogénea:

$$x_{k+1} = F x_k \quad (2.23)$$

Luego:

$$x_k = \Psi_k \cdot x_0 \quad (2.24)$$

Donde  $\Psi_k$  es una matriz única de dimensión  $n \times n$  que satisface la condición:

$$\begin{aligned}
\Psi_{k+1} &= F \cdot \Psi_k \\
\Psi_0 &= I
\end{aligned} \quad (2.25)$$

Por lo tanto  $\Psi_k$  puede estar dada por:

$$\Psi_k = F^k \quad (2.26)$$

Se observa que la solución (2.24) es simplemente una transformación del estado inicial. La matriz de transición de estados  $\Psi_k$  contiene toda la información sobre los movimientos libres del sistema homogéneo.

Considerando la matriz de transición de estados  $\Psi_k$  las ecuaciones (2.21) y (2.22) se escriben en la forma:

$$x_k = \Psi_k \cdot x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Psi_{k-i-1} \cdot G \cdot u_i \quad (2.27)$$

$$y_k = C \cdot \Psi_k \cdot x_0 + C \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \Psi_{k-i-1} \cdot G \cdot u_i + D \cdot u_k \quad (2.28)$$

que se puede expresar equivalentemente en la forma:

$$x_k = \Psi_k \cdot x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Psi_i \cdot G \cdot u_{k-i-1} \quad (2.29)$$

$$y_k = C \cdot \Psi_k \cdot x_0 + C \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \Psi_i \cdot G \cdot u_{k-i-1} + D \cdot u_k \quad (2.30)$$

## 2.4.2 Sistemas lineales variantes en el tiempo

Considérense las siguientes ecuaciones para un sistema lineal discreto variante en el tiempo:

$$x_{k+1} = F_k \cdot x_k + G_k \cdot u_k \quad (2.31)$$

$$y_k = C_k \cdot x_k + D_k \cdot u_k \quad (2.32)$$

La solución de la ecuación de estado se puede encontrar fácilmente mediante recursión

$$x_{h+1} = F_h \cdot x_h + G_h \cdot u_h$$

$$x_{h+2} = F_{h+1} \cdot x_{h+1} + G_{h+1} \cdot u_{h+1} = F_{h+1} \cdot (F_h \cdot x_h + G_h \cdot u_h) + G_{h+1} \cdot u_{h+1} = F_{h+1} \cdot F_h \cdot x_h + F_{h+1} \cdot G_h \cdot u_h + G_{h+1} \cdot u_{h+1}$$

:

La matriz de transición de estado para este sistema se define como  $\Psi(k, h)$ . Se trata de una matriz única que satisface las condiciones:

$$\begin{aligned} \Psi(k+1, h) &= F_k \cdot \Psi(k, h) & k = h, h+1, h+2, \dots \\ \Psi(h, h) &= I \end{aligned}$$

Se deduce que  $\Psi(k, h)$  está dada por la ecuación:

$$\Psi(k, h) = F_{k-1} \cdot F_{k-2} \cdot \dots \cdot F_h \quad k > h \quad (2.33)$$

Utilizando  $\Psi(k, h)$ , la solución de la ecuación de estado (2.31) toma la forma:

$$x_k = \Psi(k, h) \cdot x_h + \sum_{i=h}^{k-1} \Psi(k, i+1) \cdot G_i \cdot u_i \quad k > h \quad (2.34)$$

◆ **Demostración:**

Se va a demostrar que (2.34) es efectivamente solución de la ecuación de estado (2.31).

Se tiene que:

$$\Psi(k+1, h) = F_k \cdot F_{k-1} \cdot \dots \cdot F_h = F_k \cdot \Psi(k, h) \quad (2.35)$$

Sustituyendo esta expresión en:

$$x_{k+1} = \Psi(k+1, h) \cdot x_h + \sum_{i=h}^k \Psi(k+1, i+1) \cdot G_i \cdot u_i \quad (2.36)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_k \cdot \Psi(k, h) \cdot x_h + \sum_{i=h}^{k-1} \Psi(k+1, i+1) \cdot G_i \cdot u_i + \Psi(k+1, k+1) \cdot G_k \cdot u_k \\ &= F_k \cdot \Psi(k, h) \cdot x_h + F_k \cdot \sum_{i=h}^{k-1} \Psi(k, i+1) \cdot G_i \cdot u_i + I \cdot G_k \cdot u_k \\ &= F_k \cdot \left[ \Psi(k, h) \cdot x_h + \sum_{i=h}^{k-1} \Psi(k, i+1) \cdot G_i \cdot u_i \right] + G_k \cdot u_k \\ &= F_k \cdot x_k + G_k \cdot u_k \end{aligned}$$

Tal y como se quería demostrar.

◆

Conocido el valor de  $x_k$ , la ecuación de salida (2.32) toma la forma:

$$y_k = C_k \cdot \Psi(k, h) \cdot x_h + \sum_{i=0}^{k-1} C_k \cdot \Psi(k, i+1) \cdot G_i \cdot u_i + D_k \cdot u_k \quad k > h \quad (2.37)$$

Otra propiedad importante de la matriz de transición de estados es que si  $F_k$  es no singular para todos los valores de  $k$  considerados, de forma que la inversa de  $\Psi(k, h)$  exista entonces:

$$\Psi^{-1}(k, h) = \Psi(h, k) = [F_{k-1} \cdot F_{k-2} \cdot \dots \cdot F_h]^{-1} = F_h^{-1} \cdot F_{h+1}^{-1} \cdot \dots \cdot F_{k-1}^{-1} \quad (2.38)$$

## 2.5 RESPUESTA IMPULSIONAL EN TIEMPO DISCRETO

Es posible utilizar las ecuaciones (2.21) y (2.22) para derivar una fórmula para la respuesta impulsional de un sistema en tiempo discreto en términos de sus matrices en el espacio de estado. La respuesta impulsional  $h_k$  de un sistema en tiempo discreto es la respuesta (con condiciones iniciales nulas) a la siguiente secuencia de entrada

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \forall k \neq 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Si se hace  $u_k = \delta_k$  en (2.22), supuesto condiciones iniciales nulas, se obtiene la expresión para la respuesta impulsional  $h_k$

$$h_k = C \cdot \sum_{i=0}^{k-1} F^{k-i-1} \cdot G \cdot \delta_i + D \cdot \delta_k \quad (2.40)$$

Sustituyendo el valor de  $\delta_k$ :

$$h_k = \begin{cases} D & k = 0 \\ C \cdot F^{k-1} \cdot G & k > 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

La respuesta impulsional y la función de transferencia discreta verifican:

$$Z(h_k) = H(z) \quad (2.42)$$

En la sección 2.3.3 se obtuvo la expresión (2.13) de la función de transferencia discreta  $H(z)$  en función de las matrices de la representación en variables de estado. También es posible calcular dicha expresión aplicando la transformada Z a la respuesta impulsional (2.40).

Si se considera la definición de transformada Z dada en (2.1)

$$H(z) = Z[\{h_k\}] = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot z^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} (C \cdot F^{i-1} \cdot G \cdot z^{-i}) + D \quad (2.43)$$

Puesto que  $C$  y  $F$  son constantes se pueden sacar del sumatorio:

$$H(z) = C \cdot \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (F^{i-1} \cdot z^{-i}) \right] \cdot G + D \quad (2.44)$$

Haciendo el cambio de variable  $j=i-1$ , la ecuación anterior toma la siguiente forma:

$$H(z) = C \cdot \left[ \sum_{j=0}^{\infty} (F^j \cdot z^{-j-1}) \right] \cdot G + D \quad (2.45)$$

Que es equivalente a:

$$H(z) = C \cdot z^{-1} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} (z^{-1} \cdot F)^j \right] \cdot G + D \quad (2.46)$$

Haciendo uso de la siguiente identidad matricial para una matriz  $M$  cuyos valores propios se encuentren dentro del círculo de radio unidad.

$$\sum_{j=0}^{\infty} M^j = (I - M)^{-1} \quad (2.47)$$

En este caso  $M=z^{-1} \cdot F$ . Entonces:

$$H(z) = C \cdot z^{-1} (I - z^{-1} \cdot F)^{-1} \cdot G + D = C \cdot \left( (I - z^{-1} \cdot F) \cdot z \right)^{-1} \cdot G + D \quad (2.48)$$

Con lo que finalmente se obtiene

$$H(z) = C \cdot (z \cdot I - F)^{-1} \cdot G + D \quad (2.49)$$

Luego se ha demostrado que efectivamente  $h_k$  y  $H(z)$  realmente forman una pareja de transformada Z.

## 2.6 DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES EN EL ESPACIO DE ESTADO EN TIEMPO CONTINUO

Considérese el siguiente modelo en el espacio de estados para un determinado sistema continuo lineal e invariante en el tiempo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t)\end{aligned}\quad (2.50)$$

De acuerdo con la sección 1.5 el vector de estado vendrá dado por la expresión:

$$x(t) = e^{A \cdot (t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \quad (2.51)$$

Si se considera  $t_0 = k \cdot T$  y  $t = k \cdot T + T$ , donde  $T$  es el periodo de muestreo, entonces (2.51) da una fórmula que permite actualizar el vector de estado entre los instantes de muestreo. Esto es, integrando la ecuación de estado durante un instante de muestreo se obtiene:

$$x(kT + T) = e^{A \cdot T} \cdot x(k \cdot T) + \int_{k \cdot T}^{k \cdot T + T} e^{A \cdot (k \cdot T + T - \tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \quad (2.52)$$

Por otra parte, se supone que la entrada de control en tiempo continuo  $u(t)$  a la planta es la salida de un retenedor de orden cero:

$$u(t) = u_k \quad k \cdot T \leq t \leq (k+1) \cdot T \quad (2.53)$$

Por lo tanto es posible sacar  $u$  fuera de la integral:

$$x(kT + T) = e^{A \cdot T} \cdot x(k \cdot T) + \left[ \int_{k \cdot T}^{k \cdot T + T} e^{A \cdot (k \cdot T + T - \tau)} \cdot B \cdot d\tau \right] \cdot u_k \quad (2.54)$$

Si se considera el siguiente cambio de variables en la integral  $\gamma = k \cdot T + T - \tau$  se obtiene:

$$x(kT + T) = e^{A \cdot T} \cdot x(k \cdot T) + \left[ \int_0^T e^{A \cdot \gamma} \cdot B \cdot d\gamma \right] \cdot u_k \quad (2.55)$$

Esta última expresión permite calcular el valor del vector de estado  $x(t)$  sólo en los instantes de muestreo  $t = k \cdot T$ . Si se define la secuencia de vectores de estado en tiempo discreto por:

$$x_k = x(k \cdot T) \quad (2.56)$$

y se definen

$$\Phi = e^{A \cdot T} \quad (2.57)$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{A\gamma} \cdot B \cdot d\gamma \quad (2.58)$$

entonces (2.55) se convierte en la ecuación de estado en tiempo discreto:

$$x_{k+1} = \Phi \cdot x_k + \Gamma \cdot u_k \quad (2.59)$$

Por su parte la ecuación de salida es:

$$y_k = C \cdot x_k + D \cdot u_k \quad (2.60)$$

Las ecuaciones (2.59) y (2.60) constituyen un sistema en tiempo discreto cuya salida por construcción coincide exactamente con la salida del sistema continuo si su entrada de control permanece constante en cada periodo de muestreo, es decir, la entrada de control discreta se hace pasar por un retenedor de orden cero. Por eso a la ecuación de estado dada por (2.59) se le conoce como *equivalente con retenedor de orden cero* de la ecuación de estado en tiempo continuo dada por (2.50).

Los cálculos requeridos para muestrear un sistema en tiempo continuos son la evaluación de una matriz exponencial  $\Phi$  y la integración de esta matriz para obtener el vector  $\Gamma$ . Su obtención se puede realizar por diferentes métodos, cabe reseñar los siguientes:

- *Desarrollo en serie de  $\Phi$*

$$\Phi = e^{At} = I + At + A^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + A^3 \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (2.61)$$

- *Utilizando la transformada inversa de Laplace.* En la sección 1.5 se demostró que:

$$\Phi(s) = (s \cdot I - A)^{-1}$$

Luego tomando la transformada inversa se obtiene:

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left[ (s \cdot I - A)^{-1} \right] \quad (2.62)$$

- *Utilizando el teorema de Cayley-Hamilton*
- *Utilizando paquetes software de cálculo numérico o simbólico como Matlab, Maple, Mathematica, etc.*

Por otra parte se observa en (2.57) que si  $T \ll 1$  entonces  $\Phi = e^{A \cdot T} \approx e^{A \cdot 0} \approx I$ . Es decir, conforme el periodo de muestreo  $T$  se hace más pequeño la matriz  $\Phi$  se aproxima a la matriz identidad.

◆ **Ejemplo 2.5: Motor de corriente continua**

Un motor de corriente continua se puede describir mediante un modelo de segundo orden formado por un integrador y una constante de tiempo (ver Figura 2.3).

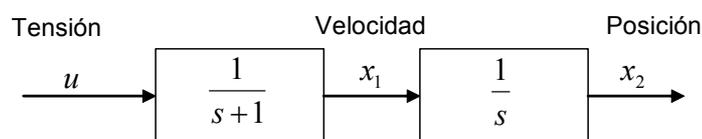


Figura 2.3: Modelo normalizado de un motor de corriente continua

La entrada es la tensión aplicada al motor y la salida es la posición del eje. La constante de tiempo se debe a los elementos del sistema y no se considera la dinámica asociada con la parte eléctrica. Un modelo normalizado del proceso se puede expresar como:

$$Y(s) = \frac{1}{s \cdot (s + 1)} \cdot U(s)$$

Si se introducen como variables de estado la posición y la velocidad del eje del motor (ver Figura 2.3), el modelo en el espacio de estados viene dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Supuesto un periodo de muestreo  $T$  se desea obtener el modelo *equivalente con retenedor de orden cero*. Para ello hay que calcular  $\Phi$  y  $\Gamma$ . Se va usar el método de la transformada inversa de Laplace. Se sabe que:

$$s \cdot I - A = \begin{bmatrix} s + 1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

La inversa de esta matriz es:

$$(s \cdot I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la matriz anterior (ver Apéndice A) se obtiene:

$$\Phi = e^{A \cdot T} = \mathcal{L}^{-1}[(s \cdot I - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix}$$

Asimismo

$$\Gamma = \int_0^T e^{A \cdot \gamma} \cdot B \cdot d\gamma = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-\gamma} & 0 \\ 1 - e^{-\gamma} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot d\gamma = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-\gamma} \\ 1 - e^{-\gamma} \end{bmatrix} \cdot d\gamma = \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ T - 1 + e^{-T} \end{bmatrix}$$

◆

## 2.7 CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

En la sección 1.6 se estudiaron los conceptos de controlabilidad y observabilidad para el caso de sistemas continuos. En esta sección se particularizan estos conceptos para el caso de sistemas discretos.

### 2.7.1 Controlabilidad

**Definición:** Una representación discreta de un sistema es completamente controlable si y solo si es posible transferir el sistema desde cualquier estado inicial  $x_0$  a cualquier estado final  $x_N$ , con  $N$  finito, mediante una secuencia de control  $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$ .

La condición necesaria y suficiente de controlabilidad viene dada por el *teorema de controlabilidad* enunciado en la sección 1.6, pero en el caso de sistemas discretos el gramian de controlabilidad (1.47) toma la forma:

$$W_{cd}(t_0, t_N) = \sum_{i=1}^N \Phi(t_0, t_i) \cdot \Gamma(t_{i-1}) \cdot \Gamma^T(t_{i-1}) \cdot \Phi^T(t_0, t_i) \quad (2.63)$$

Para sistemas invariantes discretos, la matriz de controlabilidad toma la siguiente forma:

$$M_{cd} = [\Gamma \mid \Phi \cdot \Gamma \mid \dots \mid \Phi^{n-1} \cdot \Gamma] \quad (2.64)$$

Esta matriz tiene que cumplir las condiciones del *teorema algebraico de controlabilidad* enunciado en la sección 1.6.

Por otra parte, para sistemas invariantes discretos la matriz de controlabilidad de salida toma la siguiente forma:

$$M_{cdy} = [C \cdot \Gamma \mid C \cdot \Phi \cdot \Gamma \mid \dots \mid C \cdot \Phi^{n-1} \cdot \Gamma \mid D]$$

Esta matriz tiene que cumplir las condiciones del *teorema algebraico de controlabilidad de la salida* enunciado en la sección 1.6.

## 2.7.2 Observabilidad

**Definición:** Una representación en variables de estado de un sistema discreto es *completamente observable* si cualquier estado inicial  $x(0)$  puede determinarse a partir de la observación de  $y(k)$  sobre un número finito de periodos de muestreo. El sistema, por lo tanto, es completamente observable, si cualquier transición del estado de manera eventual afecta a todos los elementos del vector de salida.

La condición necesaria y suficiente de observabilidad viene dada por el *teorema de observabilidad* enunciado en la sección 1.6, pero en el caso de sistemas discretos el gramian de observabilidad (1.51) toma la forma:

$$W_{od}(t_0, t_N) = \sum_{i=1}^N \Phi^T(t_i, t_0) \cdot C^T(t_i) \cdot C(t_i) \cdot \Phi(t_i, t_0) \quad (2.65)$$

Para sistemas invariantes discretos, la matriz de observabilidad toma la siguiente forma:

$$M_{od} = [C^T \mid \Phi^T \cdot C^T \mid \dots \mid (\Phi^T)^{n-1} \cdot C^T] \quad (2.66)$$

Esta matriz tiene que cumplir las condiciones del *teorema algebraico de observabilidad* enunciado en la sección 1.6.

## 2.8 DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADOS

En la sección 1.7 se estudió el diseño de sistemas de control en el espacio de estados para el caso de sistemas continuos. En esta sección se particulariza este diseño para el caso de sistemas discretos.

### 2.8.1 Diseño mediante la ubicación de polos

Considérese el sistema lineal invariante en tiempo discreto cuya ecuación de estado es

$$x_{k+1} = F \cdot x_k + G \cdot u_k \quad (2.67)$$

Se supone el siguiente control:

$$u_k = -K \cdot x_k \quad (2.68)$$

En la expresión anterior  $K$  es la *matriz de ganancia de realimentación del estado*.

Sustituyendo este control en la ecuación de estado se obtiene:

$$x_{k+1} = (F - G \cdot K) \cdot x_k \quad (2.69)$$

A este esquema de control (ver Figura 2.4) se le denomina *realimentación del estado*, se trata de un esquema de control en lazo cerrado.

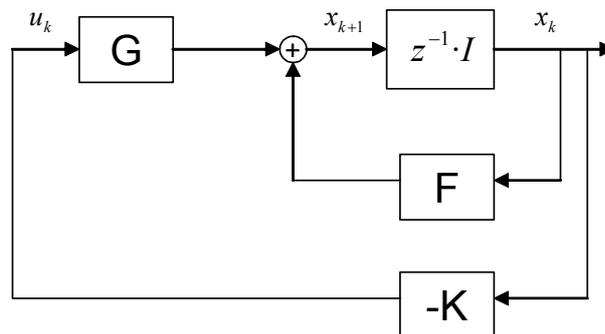


Figura 2.4: Sistema de control en lazo cerrado mediante realimentación del estado.

La matriz  $K$  se debe escoger de forma que los valores característicos de  $F - G \cdot K$  sean los polos en lazo cerrado deseados:  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ . Una condición necesaria y suficiente para la ubicación arbitraria de los polos, es que el sistema sea de estado completamente controlable.

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado viene dada por la expresión:

$$\Delta^c(z) = |z \cdot I - (F - G \cdot K)| = 0 \quad (2.70)$$

Que puede expresarse en función de los valores deseados para los polos  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  de la siguiente forma:

$$\Delta^c(z) = (z + \mu_1) \cdot (z + \mu_2) \cdot \dots \cdot (z + \mu_n) = z^n + \alpha_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + \alpha_0 \quad (2.71)$$

La matriz de ganancias de realimentación de estado  $K$  que obliga a los valores característicos de (2.70) a ser  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  (valores deseados), es decir, a poseer una ecuación característica de la forma (2.71) se demuestra que entre otros métodos se puede determinar mediante la *fórmula de Ackermann*:

$$K = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] [G \mid F \cdot G \mid \dots \mid F^{n-1} \cdot G]^{-1} \cdot [F^n + \alpha_{n-1} \cdot F^{n-1} + \dots + \alpha_0 \cdot I] \quad (2.72)$$

Se observa en (2.72) que el vector fila de dimensión  $1 \times n$  es la última fila de una matriz identidad de dimensión  $n \times n$ , a dicho vector se le puede denotar por  $e_n$ . A continuación, de acuerdo con (2.64), se tiene a la inversa de la matriz de controlabilidad discreta  $M_{cd}$ . Finalmente, se tiene la ecuación característica  $\phi(F)$  que satisface la matriz  $F$  de acuerdo con el teorema de Caley-Hamilton.

$$\phi(F) = F^n + \alpha_{n-1} \cdot F^{n-1} + \dots + \alpha_0 \cdot I \quad (2.73)$$

Luego la fórmula de Ackermann se puede expresar en la forma:

$$K = e_n \cdot M_{cd}^{-1} \cdot \phi(F) \quad (2.74)$$

## 2.8.2 Observadores de estado

Considérese el sistema de control definido por las ecuaciones

$$x_{k+1} = F \cdot x_k + G \cdot u_k \quad (2.75)$$

$$y_k = C \cdot x_k \quad (2.76)$$

$$u_k = -K \cdot x_k \quad (2.77)$$

Supóngase que el estado  $x_k$  se aproximará mediante el estado  $\hat{x}_k$  del siguiente modelo dinámico:

$$\hat{x}_{k+1} = F \cdot \hat{x}_k + G \cdot u_k + K_e \cdot (y_k - C \cdot \hat{x}_k) = (F - K_e \cdot C) \cdot \hat{x}_k + G \cdot u_k + K_e \cdot y_k \quad (2.78)$$

$\hat{x}_k$  es una estima de  $x_k$  y se denomina estado observado. Por tanto la ecuación anterior es la ecuación del observador de estado. En dicha ecuación, la matriz  $K_e$  es una matriz de ponderación que se denomina matriz de ganancia de realimentación del observador (es una matriz  $n \times m$ ).

### 2.8.2.1 Observador de estado de orden completo

Se supone que el sistema es de estado completamente controlable y completamente observable, pero que  $x_k$  no está disponible para medición directa. En este caso el orden del observador es igual al del sistema. Para obtener la ecuación de error del observador, se resta (2.75) de (2.78).

$$x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} = F \cdot x_k - F \cdot \hat{x}_k - K_e \cdot (C \cdot x_k - C \cdot \hat{x}_k) = (F - K_e \cdot C)(x_k - \hat{x}_k) \quad (2.79)$$

Sea el vector de error  $e_k$  :

$$e_k = (x_k - \hat{x}_k)$$

La ecuación (2.79) se convierte en

$$e_{k+1} = (F - K_e \cdot C)e_k \quad (2.80)$$

Luego el comportamiento dinámico de la señal de error queda determinado por los valores característicos de la matriz  $F - K_e \cdot C$ . Si ésta es estable, el vector de error convergerá a cero para cualquier error inicial  $e_0$ . Si los valores característicos de  $F - K_e \cdot C$  se seleccionan de forma que el comportamiento dinámico del vector de error es suficientemente rápido, entonces cualquier vector de error tenderá a cero con una velocidad adecuada. Si el sistema es completamente observable, se demuestra que es posible seleccionar una matriz  $K_e$  tal que  $F - K_e \cdot C$  tenga los valores característicos arbitrariamente deseados.

Una posible forma de obtener la matriz  $K_e$  es aplicando la fórmula de Ackermann a un sistema dual (ver sección 1.7)

$$K_e = (e_n \cdot M_{od}^{-1} \cdot \phi(F^T))^T \quad (2.81)$$

### 2.8.2.2 Observador de estado de orden mínimo

La obtención del observador de estado de orden mínimo para el sistema de control descrito por (2.75)-(2.77) es sencilla simplemente hay que seguir los pasos que se indican en la sección 1.7.2.5 y sustituir las magnitudes continuas por sus equivalentes discretas.

## 2.9 ENFOQUE DE ECUACIONES POLINOMIALES PARA EL DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL

En la sección anterior se describió el diseño de sistemas de control en el espacio de estados mediante realimentación, al usar la técnica de la ubicación de polos. Si alguna de las variables de estado no se podía medir de forma directa se empleaban los estados observados.

Existe una técnica diferente para el diseño de sistemas de control, es el denominado *enfoque de ecuaciones polinomiales*, que es un enfoque alternativo al diseño mediante ubicación de polos con un observador del estado de orden mínimo. En este enfoque se resuelven ecuaciones Diofánticas para determinar polinomios en  $z$  que se pueden utilizar para construir sistemas físicamente realizables. Este punto de vista proporciona una solución matemática rápida a ciertos tipos de problema de diseño.

Este enfoque se puede aplicar a sistemas MIMO, aunque en esta sección se van a considerar por sencillez únicamente sistemas SISO.

### 2.9.1 La ecuación Diofántica

Considérese el sistema definido por la función de transferencia pulso:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (2.82)$$

donde

$$A(z) = z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \dots + a_n$$

$$B(z) = b_0 \cdot z^n + b_1 \cdot z^{n-1} + \dots + b_n$$

Supóngase  $A(z)$  y  $B(z)$  no tienen factores comunes, es decir, no existen cancelaciones entre los polos y ceros de la función de transferencia (es de estado completamente controlable y completamente observable). En este caso  $A(z)$  y  $B(z)$  se dice que son

*polinomios coprimos*. Por otra parte, un polinomio en  $z$  se dice que es *mónico* si el coeficiente del término de mayor grado es uno. Por tanto, el polinomio  $A(z)$  es mónico.

Sea el siguiente polinomio estable  $D(z)$  de grado  $(2 \cdot n - 1)$

$$D(z) = d_0 \cdot z^{2 \cdot n - 1} + d_1 \cdot z^{2 \cdot n} + \dots + d_{2 \cdot n - 1}$$

Existen polinomios únicos de grado  $(n - 1)$ ,  $\alpha(z)$  y  $\beta(z)$  tales que

$$\alpha(z) \cdot A(z) + \beta(z) \cdot B(z) = D(z) \tag{2.83}$$

donde

$$\alpha(z) = \alpha_0 \cdot z^{n-1} + \alpha_1 \cdot z^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1}$$

$$\beta(z) = \beta_0 \cdot z^{n-1} + \beta_1 \cdot z^{n-2} + \dots + \beta_{n-1}$$

A la ecuación (2.83) se le denomina *ecuación Diofántica*, en honor de Diofanto de Alejandría (246-330) d.C. Esta ecuación se puede resolver para  $\alpha(z)$  y  $\beta(z)$  mediante el uso de la matriz de Sylvester  $E$  de dimensión  $2 \cdot n \times 2 \cdot n$ , la cual se define en términos de los coeficientes de los polinomios coprimos  $A(z)$  (supuesto que es mónico) y  $B(z)$  como sigue:

$$E = \begin{bmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & a_{n-1} & \dots & 0 & \vdots & b_{n-1} & \dots & 0 \\ a_1 & \vdots & & \vdots & b_1 & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & \dots & a_n & b_0 & b_1 & \dots & b_n \\ 0 & 1 & \dots & a_{n-1} & 0 & b_0 & \dots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 & 0 & \dots & b_1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{bmatrix} \tag{2.84}$$

La matriz de Sylvester  $E$  es no singular si y solo si  $A(z)$  y  $B(z)$  son coprimos.

Ahora se definen los vectores  $D$  y  $M$  tales que:

$$D = \begin{bmatrix} d_{2n-1} \\ d_{2n-2} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \alpha_0 \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Entonces es posible demostrar que la solución a la ecuación Diofántica se determina a mediante la resolución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$E \cdot M = D \quad (2.86)$$

Una posible forma de resolver este sistema es calculando la inversa de E y multiplicarla por el vector D:

$$M = E^{-1} \cdot D$$

#### ◆ Ejemplo 2.6

Sean los siguientes polinomios:

$$A(z) = z^2 + z + 0.5$$

$$B(z) = z + 2$$

$$D(z) = z^3$$

Luego  $a_1=1$ ,  $a_2=0.5$ ,  $b_0=0$ ,  $b_1=1$ ,  $b_2=2$ ,  $d_0=1$ ,  $d_1=0$ ,  $d_2=0$  y  $d_3=0$

El problema es encontrar dos polinomios únicos  $\alpha(z)$  y  $\beta(z)$  tales que:

$$\alpha(z) \cdot A(z) + \beta(z) \cdot B(z) = D(z)$$

donde

$$\alpha(z) = \alpha_0 \cdot z + \alpha_1$$

$$\beta(z) = \beta_0 \cdot z + \beta_1$$

Hay que resolver por tanto una ecuación Diofántica, es decir, resolver el sistema de ecuaciones (2.86):

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Operando se obtiene:  $\alpha_1=-1.2$ ,  $\alpha_0=1$ ,  $\beta_1=0.3$  y  $\beta_0=0.2$

Es decir,

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= z - 1.2 \\ \beta(z) &= 0.2z + 0.3 \end{aligned}$$

Que se puede comprobar que verifican la ecuación Diofántica.



## 2.9.2 Sistemas de control elementales

### 2.9.2.1 Configuración 1 del sistema de control

Considérese el diagrama de bloques del sistema de control que se muestra en la Figura 2.5. La función de transferencia  $B(z)/A(z)$  es la planta, mientras que  $\beta(z)/\alpha(z)$  funciona como un regulador. Los polinomios  $\alpha(z)$  y  $\beta(z)$  se pueden obtener resolviendo la siguiente ecuación Diofántica:

$$\alpha(z) \cdot A(z) + \beta(z) \cdot B(z) = H(z) \cdot F(z)$$

donde  $A(z)$  es un polinomio mónico de grado  $n$ ,  $B(z)$  es un polinomio  $m$  ( $m \leq n$ ) (no existen factores comunes entre  $A(z)$  y  $B(z)$ ),  $H(z)$  es el polinomio característico deseado para la parte de ubicación de polos y  $F(z)$  es el polinomio característico deseado para el observador de orden mínimo. Ambos polinomios  $H(z)$  y  $F(z)$  son estables. El grado del polinomio  $H(z)$  es  $n$  y el de  $F(z)$  es  $n-1$ . Se supone que la salida del sistema es el único estado medible. Por lo tanto, el orden del observador mínimo es  $n-1$ .

La ganancia  $K_0$  debe ser ajustada para que la salida en estado estacionario  $y(k)$  sea igual a uno cuando la entrada  $r(k)$  es una secuencia de escalón unitario.

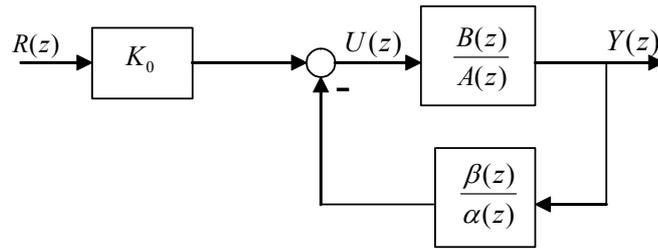


Figura 2.5: Diagrama de bloques del sistema de control (configuración 1)

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = K_0 \cdot \frac{\frac{B(z)}{A(z)}}{1 + \frac{B(z) \cdot \beta(z)}{A(z) \cdot \alpha(z)}} = K_0 \cdot \frac{\alpha(z) \cdot B(z)}{\alpha(z) \cdot A(z) + \beta(z) \cdot B(z)} = K_0 \cdot \frac{\alpha(z) \cdot B(z)}{H(z) \cdot F(z)} \quad (2.87)$$

El sistema en lazo cerrado es de orden  $(2 \cdot n - 1)$ , a menos que exista alguna cancelación entre  $\alpha(z) \cdot \beta(z)$  y  $H(z) \cdot F(z)$ .

Para determinar  $K_0$  se aplica (2.5):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} \cdot K_0 \cdot \frac{\alpha(z) \cdot B(z)}{H(z) \cdot F(z)} \cdot \frac{z}{z-1} \right) = K_0 \cdot \frac{\alpha(1) \cdot B(1)}{H(1) \cdot F(1)} = 1$$

Luego:

$$K_0 = \frac{H(1) \cdot F(1)}{\alpha(1) \cdot B(1)} \quad (2.88)$$

#### ◆ Ejemplo 2.7

Considérese el sistema de control de la Figura 2.5 con  $K_0=1$ . La función de transferencia de la planta es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.02 \cdot (z+1)}{(z-1)^2} = \frac{0.02 \cdot z + 0.02}{z^2 - 2 \cdot z + 1}$$

$A(z)$  es un polinomio mónico de grado 2 y no existe cancelaciones entre el numerador y el denominador. Se tiene que  $a_2=-2$ ,  $a_1=1$ ,  $b_0=0$ ,  $b_1=0.02$ ,  $b_2=0.02$ .

Por otra parte, aunque  $R(z)=0$ , la función de transferencia en lazo cerrado para el sistema está dada por:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\alpha(z) \cdot \beta(z)}{\alpha(z) \cdot A(z) + \beta(z) \cdot B(z)} = \frac{0.02 \cdot (z+1) \cdot \alpha(z)}{\alpha(z) \cdot (z-1)^2 + \beta(z) \cdot 0.02 \cdot (z+1)}$$

Supóngase que los polos en lazo cerrado deseados mediante realimentación de estado sean

$$z_1 = 0.6 + j \cdot 0.4 \quad z_2 = 0.6 - j \cdot 0.4$$

Es decir, la ecuación característica deseada es:

$$H(z) = (z - 0.6 - j \cdot 0.4) \cdot (z - 0.6 + j \cdot 0.4) = z^2 - 1.2 \cdot z + 0.52$$

Por otra parte, la ecuación característica deseada para el observador es:

$$F(z) = z$$

Para determinar  $\alpha(z)$  y  $\beta(z)$ , se resuelve la ecuación Diofántica siguiente:

$$\alpha(z) \cdot A(z) + \beta(z) \cdot B(z) = F(z) \cdot H(z) = D(z)$$

Se tiene que

$$D(z) = F(z) \cdot H(z) = d_0 \cdot z^3 + d_1 \cdot z^2 + d_2 \cdot z + d_3 = z^3 - 1.2 \cdot z^2 + 0.52 \cdot z$$

Obsérvese que  $D(z)$  es un polinomio estable de grado  $(2 \cdot n - 1)$  en  $z$  (donde  $n=2$  para este caso).

Además

$$\alpha(z) = \alpha_0 \cdot z + \alpha_1$$

$$\beta(z) = \beta_0 \cdot z + \beta_1$$

Para resolver la ecuación Diofántica hay que resolver el sistema de ecuaciones (2.86):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.02 & 0 \\ -2 & 1 & 0.02 & 0.02 \\ 1 & -2 & 0 & 0.02 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.52 \\ -1.2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Operando se obtiene:  $\alpha_1=0.32$ ,  $\alpha_0=1$ ,  $\beta_1=-16$  y  $\beta_0=24$

Es decir,

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= z + 0.32 \\ \beta(z) &= 24 \cdot z - 16 \end{aligned}$$

En consecuencia el regulador realimentado se obtiene como

$$\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = 24 \cdot \left( \frac{z - 0.6667}{z + 0.32} \right)$$

Una forma alternativa de obtener este regulador es usando el diseño en el espacio de estado mediante el método de ubicación de polos combinado con un observador de orden mínimo.

Supóngase ahora el caso en que se desea ajustar el valor de la ganancia  $K_0$  para que la salida en estado estable  $y(k)$  sea igual a uno cuando la entrada  $r(k)$  es una secuencia de escalón unitario. En este caso  $K_0$  viene dada por la ecuación (2.88)

$$K_0 = \frac{H(1) \cdot F(1)}{\alpha(1) \cdot B(1)} = \frac{0.32 \cdot 1}{1.32 \cdot 0.04} = 6.06$$

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 \cdot \alpha(z) \cdot B(z)}{\alpha(z) \cdot A(z) + \beta(z) \cdot B(z)} = \frac{K_0 \cdot \alpha(z) \cdot B(z)}{H(z) \cdot F(z)} = \frac{6.06 \cdot (z + 0.32) \cdot 0.02 \cdot (z + 1)}{z^3 - 1.2 \cdot z^2 + 0.52 \cdot z}$$

Obsérvese que el sistema es de tercer orden

◆

### 2.9.2.2 Configuración 2 del sistema de control

Considérese el diagrama de bloques de la Figura 2.6

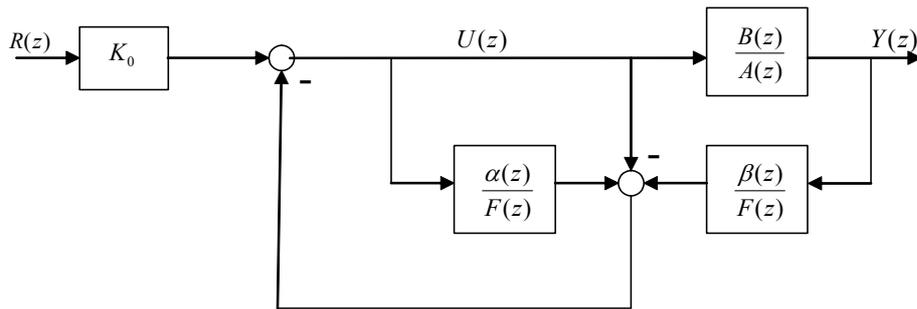


Figura 2.6: Diagrama de bloques del sistema de control (configuración 2)

Se verifica la siguiente ecuación:

$$U(z) = - \left[ \frac{\alpha(z)}{F(z)} \cdot U(z) - U(z) + \frac{\beta(z)}{F(z)} \cdot Y(z) \right] + K_0 \cdot R(z)$$

Que se puede simplificar a:

$$\frac{\alpha(z)}{F(z)} \cdot U(z) = - \frac{\beta(z)}{F(z)} \cdot Y(z) + K_0 \cdot R(z) \quad (2.89)$$

La función de transferencia pulso de la planta es:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Donde  $A(z)$  es un polinomio mónico de grado  $n$ ,  $B(z)$  es un polinomio  $m$  ( $m \leq n$ ). Luego:

$$U(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \cdot Y(z) \quad (2.90)$$

Al sustituir (2.90) en (2.89) se obtiene:

$$\left[ \frac{\alpha(z)}{F(z)} \cdot \frac{A(z)}{B(z)} + \frac{\beta(z)}{F(z)} \right] \cdot Y(z) = K_0 \cdot R(z)$$

Luego

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0}{\frac{\alpha(z) \cdot A(z)}{F(z)} + \frac{\beta(z)}{F(z)}} = \frac{K_0 \cdot F(z) \cdot B(z)}{\alpha(z) \cdot A(z) + \beta(z) \cdot B(z)}$$

Como

$$\alpha(z) \cdot A(z) + \beta(z) \cdot B(z) = H(z) \cdot F(z)$$

se obtiene:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 \cdot F(z) \cdot B(z)}{H(z) \cdot F(z)} = \frac{K_0 \cdot B(z)}{H(z)} \quad (2.91)$$

Obsérvese que el polinomio  $F(z)$  ha sido cancelado ya que se suponía que era estable y en consecuencia su cancelación está permitida. Por otra parte el polinomio característico del sistema en lazo cerrado está dado por  $H(z)$ .  $H(z)$  es el polinomio estable de grado  $n$  deseado pero que, en esencia, “se escoge de manera arbitraria”. Por lo tanto, el sistema de control diseñado es de orden  $n$ .

#### ◆ Ejemplo 2.8

Considérese el sistema de control de la Figura 2.6, supóngase que los polinomios  $A(z)$ ,  $B(z)$ ,  $H(z)$ ,  $F(z)$ ,  $\alpha(z)$  y  $\beta(z)$  son los considerados en el Ejemplo 2.7. En ese caso la función de transferencia en lazo cerrado, de acuerdo con la ecuación (2.91), toma la forma:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 \cdot (0.02 \cdot z + 0.02)}{z^2 - 1.2 \cdot z + 0.52}$$

Para determinar la constante  $K_0$  se requiere que  $y(\infty)$  en la respuesta al escalón unitario sea igual a uno.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{K_0 \cdot (0.02 \cdot z + 0.02)}{z^2 - 1.2 \cdot z + 0.52} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{K_0}{8} = 1$$

Por lo tanto el valor de  $K_0$  es 8.

Entonces la función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.16 \cdot z + 0.16}{z^2 - 1.2 \cdot z + 0.52}$$

Obsérvese que el sistema es de segundo orden.

Si se compararan las respuestas al escalón unitario de los sistemas de control de la configuración 1 (Ejemplo 2.7) y 2 se observaría que son idénticas. Por otra parte si se compararán las respuestas a la rampa unitaria de los dos sistemas, se obtendría que el sistema de control de la configuración 2 tiene un error ( $E(z)=R(z)-Y(z)$ ) un 10 % (se supone un periodo de muestreo  $T=0.2$  seg) menor en estado estable  $e(\infty)$  al seguir la entrada rampa unitaria que el sistema de control de la configuración 1.

♦

### 2.9.3 Diseño de sistemas de control mediante la igualación a un modelo

Considérese el sistema definido por la función de transferencia pulso:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (2.92)$$

donde

$$A(z) = z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \dots + a_n$$

$$B(z) = b_0 \cdot z^m + b_1 \cdot z^{m-1} + \dots + b_m$$

Supóngase  $A(z)$  y  $B(z)$  ( $m \leq n$ ) no tienen factores comunes, es decir, no existen cancelaciones entre los polos y ceros de la función de transferencia. Si  $B(z)$  es un polinomio estable es posible escoger  $H(z)$  (la ecuación característica del sistema), tal que incluya al polinomio  $B(z)$ , es decir,

$$H(z) = B(z) \cdot H_1(z)$$

Entonces, de acuerdo a la ecuación (2.91) se tiene

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 \cdot B(z)}{H(z)} = \frac{K_0 \cdot B(z)}{B(z) \cdot H_1(z)} = \frac{K_0}{H_1(z)}$$

Esto significa que es posible eliminar, si así se desea, los ceros de la planta.

Supóngase que se desea hacer al sistema igual a un cierto modelo:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = G_m = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

Bajo ciertas condiciones, es posible diseñar tal sistema mediante el uso del enfoque de ecuaciones polinomiales. A este tipo de sistema de control se le llama *sistema de control mediante la igualación a un modelo*.

En este proceso de diseño se debe escoger  $H(z)$  como el polinomio característico deseado estable de grado  $n$  y un polinomio  $H_1(z)$  estable de grado  $n-m$ . La selección de  $H_1(z)$  es en cierto sentido arbitraria, siempre que sea un polinomio estable.

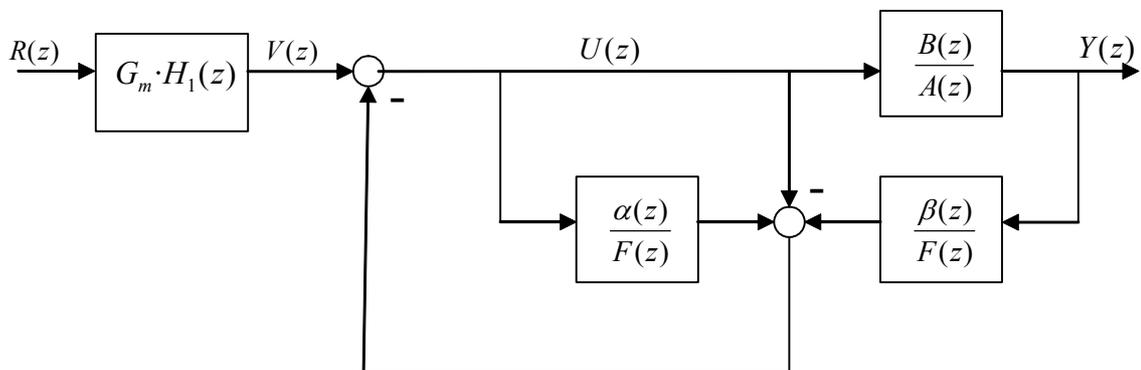


Figura 2.7: Diagrama de bloques del sistema de control mediante la igualación a un modelo.

Considérese el diagrama de bloques de la Figura 2.7. Se deben determinar los polinomios  $\alpha(z)$  y  $\beta(z)$  de grado  $n-1$  mediante la resolución de la siguiente ecuación Diofántica:

$$\alpha(z) \cdot A(z) + \beta(z) \cdot B(z) = F(z) \cdot B(z) \cdot H_1(z)$$

donde  $F(z)$  es un polinomio estable de grado  $(n-1)$ .

Se verifica la siguiente ecuación:

$$U(z) = - \left[ \frac{\alpha(z)}{F(z)} \cdot U(z) - U(z) + \frac{\beta(z)}{F(z)} \cdot Y(z) \right] + V(z)$$

Que se puede simplificar a:

$$\frac{\alpha(z)}{F(z)} \cdot U(z) + \frac{\beta(z)}{F(z)} \cdot Y(z) = V(z) \quad (2.93)$$

Como

$$U(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \cdot Y(z) \quad (2.94)$$

se tiene

$$\left[ \frac{\alpha(z)}{F(z)} \cdot \frac{A(z)}{B(z)} + \frac{\beta(z)}{F(z)} \right] \cdot Y(z) = V(z)$$

Luego

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{F(z) \cdot B(z)}{\alpha(z) \cdot A(z) + \beta(z) \cdot B(z)} = \frac{F(z) \cdot B(z)}{F(z) \cdot B(z) \cdot H_1(z)} = \frac{1}{H_1(z)}$$

Como

$$V(z) = G_m \cdot H_1(z) \cdot R(z)$$

entonces se obtiene:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{Y(z) \cdot V(z)}{V(z) \cdot R(z)} = \frac{G_m \cdot H_1(z)}{H_1(z)} = G_m$$

Es decir, se consigue el control mediante la igualación a un modelo.

### Comentarios:

- 1) Para lograr que la función de transferencia  $G_m \cdot H_1(z)$  sea físicamente realizable, el grado del numerador debe ser igual o menor que el grado del denominador.
- 2) El polinomio  $B(z)$  debe ser estable.
- 3) En este enfoque de ecuaciones polinomiales, no ocurren cancelaciones entre polos inestables (o críticamente estable ( $z=1$ )) y ceros durante el proceso de diseño y, por lo tanto el sistema resultante siempre es estable.

◆ **Ejemplo 2.8**

Considérese la planta definida por:

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \frac{0.3679 \cdot z + 0.2642}{(z - 0.3679) \cdot (z - 1)} = \frac{0.3679 \cdot z + 0.2642}{z^2 - 1.3679 \cdot z + 0.3679}$$

Por lo tanto  $a_1 = -1.3679$ ,  $a_2 = 0.3679$ ,  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 0.3679$  y  $b_2 = 0.2642$ . Claramente  $B(z)$  es estable.

Se supone un periodo de muestreo  $T=1$  seg. Se desea diseñar un sistema de control (ver Figura 2.7) tal que el sistema en lazo cerrado sea:

$$G_m = \frac{Y_m(z)}{R_m(z)} = \frac{0.62 \cdot z - 0.3}{z^2 - 1.2 \cdot z + 0.52}$$

Como la función de transferencia de la planta es de segundo orden ( $n=2$ ), se escoge a  $H_1(z)$  como un polinomio estable de grado uno ( $n-1$ ). Por ejemplo, se puede escoger a  $H_1(z)$  como:

$$H_1(z) = z + 0.5$$

Luego

$$H(z) = B(z) \cdot H_1(z) = (0.3679 \cdot z + 0.2642) \cdot (z + 0.5)$$

Se escoge  $F(z)$  de forma que sea cualquier polinomio estable de grado ( $n-1$ ). Por ejemplo:

$$F(z) = z$$

Luego  $D(z)$  es:

$$D(z) = F(z) \cdot B(z) \cdot H_1(z) = z \cdot (0.3679 \cdot z + 0.2642) \cdot (z + 0.5) = 0.3679 \cdot z^3 + 0.4482 \cdot z^2 + 0.1321 \cdot z$$

Por lo tanto  $d_0 = 0.3679$ ,  $d_1 = 0.4482$ ,  $d_2 = 0.1321$ ,  $d_3 = 0$

Ahora se debe resolver la siguiente ecuación Diofántica:

$$\alpha(z) \cdot A(z) + \beta(z) \cdot B(z) = F(z) \cdot B(z) \cdot H_1(z)$$

Donde  $\alpha(z)$  y  $\beta(z)$  son polinomios en  $z$  de primer orden:

$$\begin{aligned}\alpha(z) &= \alpha_0 \cdot z + \alpha_1 \\ \beta(z) &= \beta_0 \cdot z + \beta_1\end{aligned}$$

Para resolver la ecuación Diofántica hay que resolver el sistema de ecuaciones (2.86):

$$\begin{bmatrix} 0.3679 & 0 & 0.2642 & 0 \\ -1.3679 & 0.3679 & 0.3679 & 0.2642 \\ 1 & -1.3679 & 0 & 0.3679 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1321 \\ 0.4482 \\ 0.3679 \end{bmatrix}$$

Operando se obtiene:  $\alpha_1=0.2642$ ,  $\alpha_0=0.3679$ ,  $\beta_1=-0.3679$  y  $\beta_0=1.8680$ .

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= 0.2642 \cdot z + 0.3679 \\ \beta(z) &= 1.8680 \cdot z - 0.3679 \end{aligned}$$

En consecuencia, la función de transferencia  $Y(z)/V(z)$  se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{F(z) \cdot B(z)}{F(z) \cdot B(z) \cdot H_1(z)} = \frac{1}{H_1(z)} = \frac{1}{z + 0.5}$$

Puesto que:

$$\frac{V(z)}{R(z)} = G_m \cdot H_1(z) = \frac{(0.62 \cdot z - 0.3) \cdot (z + 0.5)}{z^2 - 1.2 \cdot z + 0.52}$$

Se tiene que la función de transferencia  $Y(z)/R(z)$  es

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.62 \cdot z - 0.3}{z^2 - 1.2 \cdot z + 0.52} = G_m$$

◆

# TEMA 3

## MODELOS DE PERTURBACIONES

### 3.1 INTRODUCCION

La existencia de perturbaciones en las entradas y/o en las salidas de un sistema, impone limitaciones fundamentales en su comportamiento. Por ejemplo, el ruido de medida en un sistema de seguimiento limita el ancho de banda alcanzable por el sistema en lazo cerrado. Para mejorar el comportamiento de un sistema sometido a perturbaciones se hace imprescindible el uso de sistemas de control. La naturaleza de las perturbaciones determinará la calidad de la regulación de un control aplicado a un cierto proceso. Con el objetivo de poder diseñar los controles más apropiados se hace necesario el disponer de modelos matemáticos de las perturbaciones.

En este tema se estudian en primer lugar los modelos clásicos de las perturbaciones. A continuación, se describen las posibles formas de reducción de los efectos de las perturbaciones. Seguidamente, debido al carácter estocástico o aleatorio de algunas perturbaciones, se incluye un repaso a los conceptos básicos de la teoría de procesos estocásticos. A continuación se describe la formulación tanto discreta como continua de modelos de procesos estocásticos. Finalmente se describe el filtrado de procesos aleatorios de tipo estacionario y la factorización espectral.

El material que se estudia en este tema resulta fundamental para comprender el filtro de Kalman (Tema 4) y las técnicas de control estocástico (Tema 9).

### 3.2 MODELOS CLASICOS DE PERTURBACIONES

#### 3.2.1 Carácter de las perturbaciones

Comúnmente se distinguen tres tipos diferentes de perturbaciones atendiendo a su carácter:

- *Perturbaciones en la carga.* Este tipo de perturbaciones influyen sobre las variables del proceso. En general este tipo de perturbaciones varían lentamente, y pueden ser periódicas. En sistemas mecánicos las perturbaciones en la carga se representan por fuerzas de perturbación, por ejemplo las ráfagas de viento sobre una antena estabilizada, las olas sobre un barco, la carga en un motor. En sistemas térmicos las perturbaciones en la carga podrían ser variaciones en la temperatura del medio ambiente.
- *Errores de medida.* Este tipo de perturbaciones se introducen en los sensores de medida. Pueden existir errores estacionarios en algunos sensores debido a errores de calibración. Sin embargo, los errores de medida típicamente poseen componentes de alta frecuencia. Estos errores pueden poseer una cierta dinámica debido a la dinámica de los sensores. Un ejemplo típico es el termopar, que posee una constante de tiempo de entre 10 y 50 s dependiendo de su encapsulado. Por otra parte, pueden existir complicadas interacciones dinámicas entre los sensores y el proceso. Un ejemplo típico son las medidas de los giróscopos y las medidas del nivel de líquido en los reactores nucleares.

En algunos casos no es posible medir la variable controlada directamente, entonces su valor es inferido a partir de las medidas de otras variables. La relación existente entre estas variables y la variable controlada puede ser bastante compleja. Una situación muy común es que un instrumento dé una rápida indicación con errores bastante grandes y otro instrumento dé una medida muy precisa pero a costa de un alto retardo.

- *Variaciones en los parámetros.* Cuando se consideran sistemas lineales, la perturbación en la carga y el ruido de medida se introducen en el sistema de una forma aditiva. Los sistemas reales son, en la mayoría de los casos, no lineales, esto significa que las perturbaciones se introducirán en el sistema de una forma mucho más complicada. Puesto que los sistemas lineales son obtenidos mediante linealización de modelos no lineales, algunas perturbaciones aparecen entonces como variaciones en los parámetros del modelo lineal.

### **3.2.2 Modelos de perturbaciones simples**

Existen cuatro tipos diferentes de perturbaciones (ver Figura 3.1) atendiendo a su forma que son comúnmente utilizadas en el análisis de los sistemas de control: impulso, escalón, rampa y senoide.

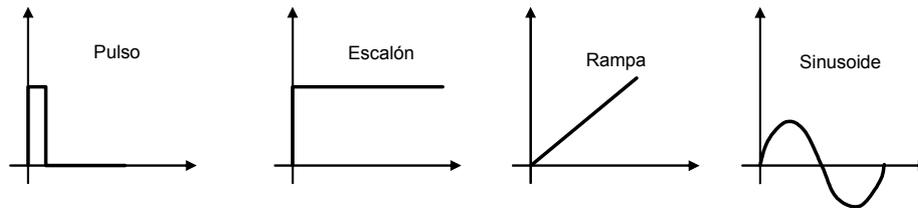


Figura 3.1: Modelos idealizados de perturbaciones simples

- *El impulso y el pulso.* Son realizaciones simples de perturbaciones inesperadas de duración muy corta. Pueden representar tanto a perturbaciones en la carga como a errores de medida. Para sistemas continuos la perturbación es modelada como un impulso; para sistemas discretos se modela como un pulso con amplitud unidad y una duración de un periodo de muestreo.

El pulso y el impulso son también importantes por motivos teóricos ya que la respuesta de un sistema lineal continuo en el tiempo está completamente especificada por su respuesta a un impulso, mientras que la de un sistema discreto está determinada por su respuesta a un pulso.

- *El escalón.* Se usa típicamente para representar una perturbación en la carga o un offset en una medida.
- *La rampa.* Es una señal que se utiliza para representar la deriva en los errores de medida así como a perturbaciones que de repente comienzan a desplazarse. En la práctica estas perturbaciones se encuentran acotadas, sin embargo el uso de una señal rampa suele ser una útil idealización.
- *La senoide.* Es el prototipo de una perturbación periódica. La posibilidad de seleccionar su frecuencia la hace idónea para representar tanto a las perturbaciones en la carga (de baja frecuencia) como al ruido de medida (de alta frecuencia).

Es conveniente visualizar a las perturbaciones como siendo generadas por sistemas dinámicos. El escalón puede ser generado por un integrador, la rampa por un doble integrador y una senoide por un oscilador armónico.

### 3.3 REDUCCION DE LOS EFECTOS DE LAS PERTURBACIONES

Las perturbaciones pueden ser reducidas actuando sobre su fuente, usando realimentación local o usando *feedforward*. Por otra parte técnicas de predicción pueden ser usadas para estimar perturbaciones no medibles.

#### 3.3.1 Reducción en la fuente

La forma más obvia de reducir los efectos de las perturbaciones es intentar actuar sobre la fuente que origina dichas perturbaciones. Esta aproximación está estrechamente ligada a la etapa de diseño del proceso. Algunos ejemplos típicos son:

- En una planta química reducir las variaciones en la composición mediante la introducción de un tanque con una mezcla eficiente.
- Reducir las fuerzas de fricción en un servo usando cojinetes mejores.
- Ubicar un sensor en una posición donde hay perturbaciones más pequeñas.
- Modificar la electrónica del sensor para obtener menos ruido.
- Sustituir un sensor por otro que posea una respuesta más rápida.
- Cambiar el procedimiento de muestreo espaciando las muestras mejor en el tiempo para obtener una representación mejor de las características de los procesos.

#### 3.3.2 Reducción mediante realimentación local

Si las perturbaciones no se pueden atenuar en su fuente, se puede intentar entonces su reducción mediante realimentación local (ver Figura 3.2). Para usar esta aproximación es necesario que las perturbaciones se introduzcan en el sistema en una o varias posiciones bien definidas. También es necesario tener acceso a la variable medida que es resultado de la perturbación. Además es necesario tener acceso a la variable de control que entra al sistema en la vecindad de la perturbación. Las dinámicas que relacionan la variable medida con la variable de control deberían ser tales que se pueda utilizar un lazo de control de ganancia elevada.

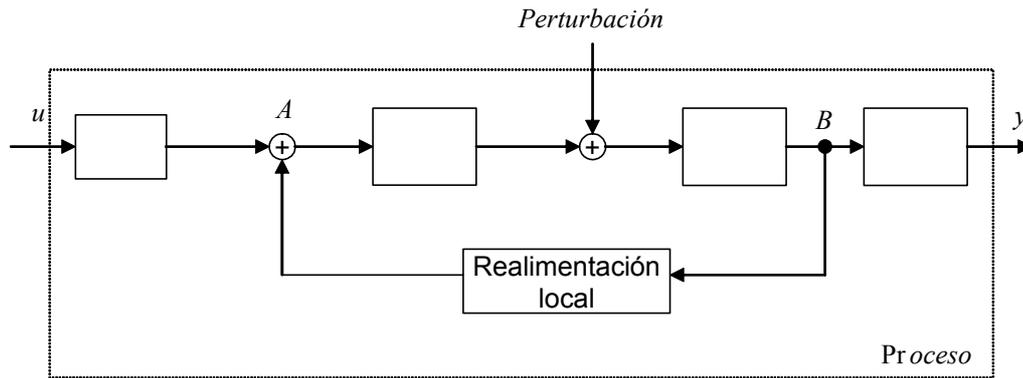


Figura 3.2: Reducción de perturbaciones mediante el uso de realimentación local. La perturbación se introduce en el sistema entre los puntos A y B. Las dinámicas entre estos dos puntos deben ser tales que sea posible usar una alta ganancia en el lazo.

El uso de la realimentación es a menudo fácil y efectivo ya que no es necesario tener información detallada de las características de los procesos, siempre que una alta ganancia pueda ser utilizada en el lazo. En caso contrario, se necesitará un lazo extra de realimentación. Algunos ejemplos de realimentación local son:

- En sistemas hidráulicos, la reducción en las variaciones en el suministro de presión en válvulas, instrumentos y reguladores mediante el uso de un regulador de presión.
- En sistemas térmicos, la reducción de las variaciones en el control de temperatura mediante la estabilización del suministro de voltaje.

### 3.3.3 Reducción mediante feedforward

Las perturbaciones que sean medibles pueden ser reducidas usando una estructura de tipo *feedforward*. El principio genérico de esta estructura se ilustra en la Figura 3.3. Se mide la perturbación y se aplica al sistema una señal de control que intenta contrarrestarla.

Si las funciones de transferencia que relacionan la salida  $y$  a la perturbación  $w$  y al control  $u$  son  $H_w$  y  $H_p$ , respectivamente, entonces la función de transferencia  $H_{ff}$  del compensador feedforward idealmente sería:

$$H_{ff} = -H_p^{-1} \cdot H_w$$

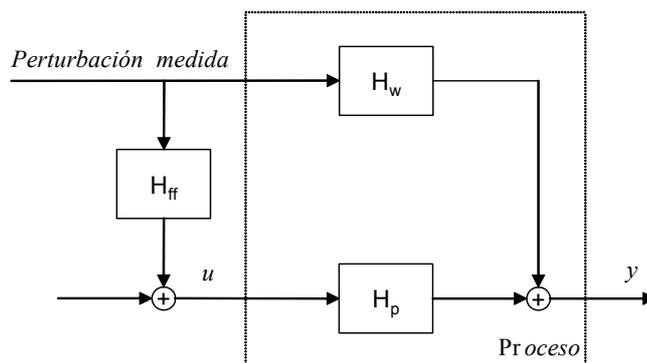


Figura 3.3: Reducción de perturbaciones mediante el uso de una estructura feedforward

Si la función de transferencia  $H_{ff}$  es inestable o no-realizable (mayor número de ceros que de polos) se debe seleccionar alguna aproximación adecuada. El diseño de un compensador feedforward se basa a menudo en un simple modelo estático, es decir,  $H_{ff}$  es una ganancia. La estructura feedforward es especialmente útil para perturbaciones generadas por cambios en la señal de referencia.

### 3.3.4 Reducción mediante predicción

La reducción de perturbaciones mediante predicción es una extensión de la técnica de feedforward que puede utilizarse cuando las perturbaciones no pueden ser medidas. Consiste en predecir la perturbación a partir de la medida de señales. La señal de feedforward se genera a partir de la perturbación predecida.

Es importante observar que no es necesario predecir la propia perturbación en si misma sino que es suficiente con modelar una señal que represente el efecto de la perturbación sobre las variables del proceso más importantes.

## 3.4 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Es natural el usar conceptos estocásticos, es decir, aleatorios, para describir a una amplia variedad de perturbaciones. El usar estos conceptos permite formular de forma más exacta diversos problemas de predicción.

### 3.4.1 Variables aleatorias

Una *variable aleatoria*  $x(k)$  es una variable que puede tomar valores aleatorios en función de los resultados de algún experimento aleatorio. Es decir, los resultados aleatorios de un experimento se pueden representar por un número real  $x(k)$ , llamado variable aleatoria.

Para un experimento aleatorio, los posibles resultados se denominan *espacio de muestra*. Una *variable aleatoria*  $x(k)$  es una función definida para los  $k$  puntos del espacio de muestra, que toma valores reales en el rango  $[-\infty, +\infty]$  asociados a cada uno de los  $k$  puntos que pueden ocurrir.

La forma de especificar la probabilidad con que la variable aleatoria toma diferentes valores es mediante la *función de distribución de probabilidad*  $F(x)$ , definida de la siguiente forma:

$$F(x) = P(x(k) \leq x)$$

Es decir, es la probabilidad de que la variable aleatoria  $x(k)$  tome valores menores o iguales a  $x$ . La función de distribución de probabilidad cumple las siguientes propiedades:

$$F(a) \leq F(b) \text{ si } a \leq b$$

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(\infty) = 1$$

Si la variable aleatoria tiene un rango continuo de valores, entonces se puede definir la *función densidad de probabilidad*  $f(x)$ :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{P[x < x(k) \leq x + \Delta x]}{\Delta x} \right]$$

Se verifica que:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

La probabilidad de que  $x(k)$  tome un valor entre  $x$  y  $x+dx$  es  $f(x) \cdot dx$ .

En el caso de que  $x(k)$  tome valores discretos  $x_i$  con probabilidades  $p_i$  distintas de cero, entonces la función  $f(x)$  se puede expresar como una serie de funciones de Dirac  $\delta$  por las probabilidades correspondientes:

$$f(x) = \sum_i p_i \cdot \delta(x - x_i)$$

El *valor medio* de una variable aleatoria escalar  $x(k)$ , también denominado *valor esperado* o *primer momento* se define como:

$$E[x(k)] = \mu_x = m(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3.1)$$

El *valor cuadrático medio* o *segundo momento* de  $x(k)$  se obtiene mediante la expresión

$$E[x^2(k)] = \Psi_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \quad (3.2)$$

Si  $x$  no es un escalar entonces

$$E[x(k) \cdot x^T(k)] = \Psi_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x(k) \cdot x^T(k) f(x) dx$$

Un parámetro que se utiliza en lugar del valor cuadrático medio es la raíz cuadrada positiva del mismo, conocido por su terminología anglosajona como *rms* de “*root-mean squared*”.

La *varianza* de la variable aleatoria  $x(k)$  se define como

$$E[(x(k) - \mu_x)^2] = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx = \Psi_x^2 - \mu_x^2 \quad (3.3)$$

Si  $x$  no es un escalar:

$$E[(x(k) - \mu_x) \cdot (x(k) - \mu_x)^T] = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x(k) - \mu_x) \cdot (x(k) - \mu_x)^T f(x) dx = \Psi_x^2 - \mu_x^2$$

La raíz cuadrada de la varianza,  $\sigma_x$ , es por definición la *desviación estándar* de la variable aleatoria. Si el valor medio es nulo, entonces la desviación estándar coincide con el valor *rms*.

◆ **Ejemplo 3.1: Distribución Gaussiana o Normal**

Una variable aleatoria  $x(k)$  tiene una *distribución gaussiana o normal* si su función densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Se puede ver fácilmente que  $a$  y  $b$  se corresponden con el valor medio y la desviación estándar de la variable aleatoria  $x(k)$

$$\mu_x = E[x(k)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = a$$

$$\sigma_x^2 = E[(x(k) - a)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 f(x)dx = b^2$$

La función de distribución de probabilidad normal es por definición:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma_x^2}} dz$$

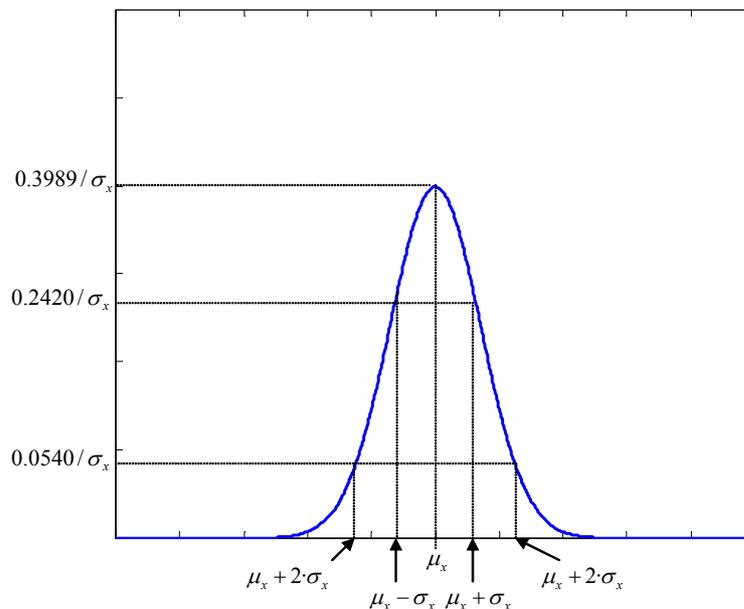


Figura 3.4: Función densidad de probabilidad normal o gaussiana

◆

La consideración simultánea de más de una variable aleatoria es a menudo necesaria y útil. En el caso de tener dos variables aleatorias  $x(k)$  e  $y(k)$ , la probabilidad de que se den pares de valores en un determinado rango de valores está dada por la función de *distribución de probabilidad conjunta*  $F_2(x, y)$ .

$$F_2(x, y) = P[x(k) \leq x \& y(k) \leq y]$$

La correspondiente *función de densidad de probabilidad* se define como:

$$f_2(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left[ \frac{P[x < x(k) \leq x + \Delta x] \& P[y < y(k) \leq y + \Delta y]}{\Delta x \Delta y} \right]$$

Que verifica las siguientes propiedades:

$$f_2(x, y) \geq 0$$

$$f_2(x, y) = \frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, y) dx dy = 1$$

Sean  $f_x$  y  $f_y$  las funciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias  $x(k)$  e  $y(k)$ , si se verifica que

$$f_2(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

entonces las dos variables son *estadísticamente independientes*. Es decir, el suceso  $x(k) \leq x$  es independiente del suceso  $y(k) \leq y$ .

El *valor medio* de una función continua real  $g(x, y)$  de dos variables aleatorias  $x(k)$  e  $y(k)$  es:

$$E[g(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_2(x, y) dx dy$$

La *covarianza*  $r_{xy}$  entre  $x(k)$  e  $y(k)$  se define como:

$$r_{xy} = E[(x(k) - \mu_x)(y(k) - \mu_y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f_2(x, y) dx dy \quad (3.4)$$

Que se puede expresar de forma equivalente como:

$$E[(x(k) - \mu_x)(y(k) - \mu_y)] = E[x(k)y(k) - \mu_x y(k) - x(k)\mu_y + \mu_x \mu_y] = E[x(k)y(k)] - E[x(k)]E[y(k)]$$

La covarianza normalizada por las desviaciones estándar de  $x(k)$  e  $y(k)$  se denomina *coeficiente de correlación*:

$$\rho_{xy} = \frac{r_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (3.5)$$

Se verifica que

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

El *coeficiente de correlación* proporciona una medida del grado de dependencia lineal entre las variables aleatorias  $x(k)$  e  $y(k)$ . Así si  $x(k)$  e  $y(k)$  son *independientes entre sí* entonces  $\rho_{xy}=0$ , y se dice que las variables aleatorias  $x(k)$  e  $y(k)$  *no están correlacionadas* (la afirmación contraria no es cierta).

### 3.4.2 Procesos estocásticos

Un *proceso aleatorio* o *estocástico* (señal aleatoria) se puede considerar como un conjunto de funciones temporales (ver Figura 3.5), cada una de las cuales se puede observar en el ensayo de un experimento. El conjunto puede incluir un número finito, un número infinito contable o un número infinito incontable de tales funciones. Al conjunto de tales funciones se les representa por:

$$\{x(t), t \in T\} \equiv x(t, \omega)$$

Usualmente se supone que  $t$  es el tiempo y  $T \in \mathfrak{R}$ . Si se considera sistemas discretos entonces  $T$  es el conjunto de instantes de muestreo  $T=\{0, h, 2 \cdot h, \dots\}$  siendo  $h$  el periodo de muestreo. Para un  $\omega$  fijo,  $\omega=\omega_0$ , se tiene que  $x(t, \omega_0)$  es una función del tiempo que se denomina *realización*. Mientras que para un instante de tiempo fijo,  $t= t_0$ , se tiene que  $x(t_0, \omega)=x(t_0)$  es una *variable aleatoria*.

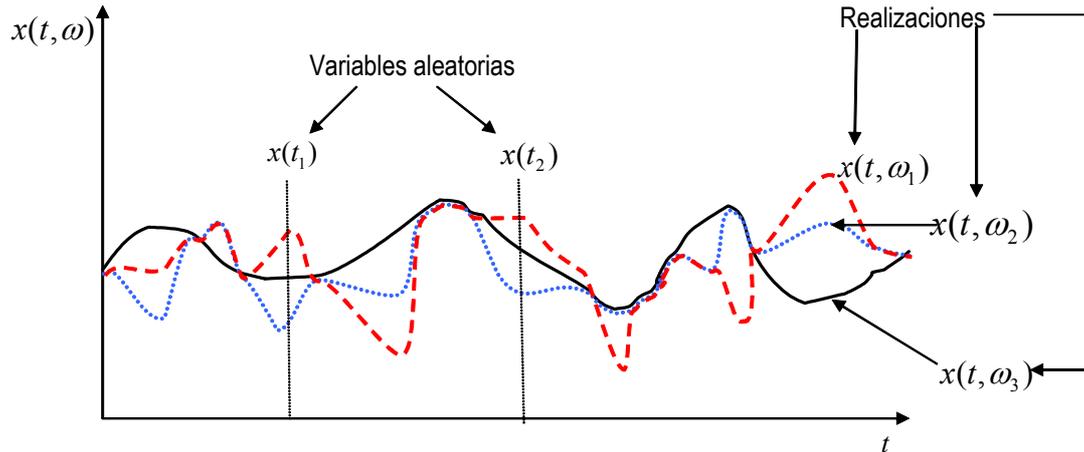


Figura 3.5: Tres realizaciones  $x(t, \omega_1)$ ,  $x(t, \omega_2)$  y  $x(t, \omega_3)$  de un mismo proceso estocástico  $x(t, \omega)$ . Se detallan las variables aleatorias  $x(t_1)$  y  $x(t_2)$  que se obtienen cuando se fija el tiempo a  $t=t_1$  y  $t=t_2$

La probabilidad de que  $x(t_1)$  tome valores en un cierto rango está dada por la *función de distribución de probabilidad*, como para cualquier variable aleatoria.

$$F(x_1, t_1) = P[x(t_1) \leq x_1]$$

La correspondiente *función de densidad de probabilidad* es:

$$f(x_1, t_1) = \frac{dF(x_1, t_1)}{dx_1}$$

El valor medio de  $x(t_1)$  es:

$$m(t_1) = E[x(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1, t_1) dx_1 \quad (3.6)$$

Se observa que el valor medio es función del instante de tiempo  $t_1$ .

La probabilidad de obtener un determinado par de valores en un cierto rango está dada por la *función de distribución conjunta de segundo orden*:

$$F(x_1, t_1; x_2, t_2) = P[x(t_1) \leq x_1 \& x(t_2) \leq x_2]$$

La correspondiente *función de densidad de probabilidad conjunta* es:

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

La *función de covarianza o autocovarianza* de un proceso se denota por como:

$$r_{xx}(t_1, t_2) \equiv \text{cov}(x(t_1), x(t_2))$$

Y se define como:

$$r_{xx}(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - E[x(t_1)])(x(t_2) - E[x(t_2)])^T] = E[(x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2))^T] \quad (3.7)$$

La covarianza se pueda expresar de forma equivalente mediante la expresión:

$$r_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 (x_1 - m(t_1))(x_2 - m(t_2))^T f_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$$

La *función de covarianza cruzada* se define como:

$$r_{xy}(t_1, t_2) = \text{cov}(x(t_1), y(t_2)) \quad (3.8)$$

Obsérvese que si  $t_1=t_2$  entonces se obtiene la varianza.

Un *proceso aleatorio estacionario* es aquel cuya estadística es invariante en el tiempo. Esto implica que la función densidad de probabilidad para el proceso  $f(x_1, t_1)$  es independiente del tiempo de observación. Todos los momentos de esta distribución, tales como  $m(t_1)=E[x(t_1)]$  y  $m(t_2)=E[x(t_2)]$  son también independientes del tiempo, es decir, son *constantes*. En este caso la función de densidad de probabilidad de segundo orden no depende del tiempo absoluto de observación  $t_1$  y  $t_2$ , sino de la diferencia entre ellos

$$\tau = t_2 - t_1$$

Por lo tanto, las *funciones de covarianza* para procesos estacionarios toman la forma:

$$r_{xx}(\tau) = \text{cov}(x(t_1), x(t_1 + \tau)) \quad (3.9)$$

$$r_{xy}(\tau) = \text{cov}(x(t_1), y(t_1 + \tau)) \quad (3.10)$$

Cuando  $x$  es un escalar a  $r_{xx}(\tau) \equiv r_x(\tau)$  se le denomina *función de autocovarianza*.

Una propiedad importante es que si un proceso es estacionario al evaluar la *función de covarianza* en  $\tau=0$  se obtiene la *varianza del proceso*, es decir,

$$r_{xx}(0) = r_x(0) = \sigma_x^2 \quad (3.11)$$

La *función de correlación*, se define como:

$$\rho_x(\tau) = \frac{r_x(\tau)}{r_x(0)} \quad (3.12)$$

De la desigualdad de Schwartz se cumple que:

$$|r_x(\tau)| \leq r_x(0)$$

Luego:

$$|\rho_x(\tau)| \leq 1 \quad (3.13)$$

El valor  $\rho_x(\tau)$  da la correlación entre los valores del proceso espaciados temporalmente un valor  $\tau$ . Valores cercanos a la unidad indican la existencia de una fuerte correlación. El valor cero indica que no existe correlación. Valores negativos indican la existencia de una correlación negativa.

La *función de densidad espectral de potencia* (o espectro de la densidad de potencia) del proceso aleatorio discreto  $\{x(t)\}$  se define como la transformada de Fourier de la función de covarianza:

$$\Phi_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}(k) e^{-ik\omega} \quad (3.14)$$

La *Función de densidad espectral de potencia cruzada* de los procesos aleatorios discretos  $\{x(t)\}$  e  $\{y(t)\}$  se define como la transformada de Fourier de la función de covarianza cruzada:

$$\Phi_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xy}(k) e^{-ik\omega} \quad (3.15)$$

En el caso de considerar procesos aleatorios continuos se tiene:

$$\Phi_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(t) e^{-it\omega} dt \quad (3.16)$$

$$\Phi_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(t) e^{-it\omega} dt \quad (3.17)$$

Tomando la transformada inversa se tendría, en procesos estocásticos discretos

$$r_{xx}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega} \Phi_{xx}(\omega) d\omega \quad (3.18)$$

$$r_{xy}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega} \Phi_{xy}(\omega) d\omega \quad (3.19)$$

Y en procesos estocásticos continuos:

$$r_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \Phi_{xx}(\omega) d\omega \quad (3.20)$$

$$r_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \Phi_{xy}(\omega) d\omega \quad (3.21)$$

Las relaciones que se acaban de definir permiten pasar del dominio temporal al frecuencial y viceversa en el análisis de los procesos aleatorios estacionarios.

La *potencia de una señal o proceso aleatorio* en el rango de frecuencias  $[\omega_1, \omega_2]$  se calcula como:

$$2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \Phi_{xx}(\omega) d\omega \quad (3.22)$$

### 3.4.3 Ruido blanco

Una forma particularmente simple del espectro de la densidad de potencia es una constante, por ejemplo

$$\Phi(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad (3.23)$$

Esto implica que la densidad espectral es constante para todas las frecuencias. Por analogía con la situación correspondiente para la luz blanca, a tal proceso aleatorio, generalmente un ruido, se le denomina *ruido blanco*.

Aplicando la relación (3.20) es posible calcular la función de covarianza para el ruido blanco:

$$r_{xx}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \cdot \sigma^2 \cdot d\omega = \sigma^2 \cdot \delta(\tau) \quad (3.24)$$

Donde  $\delta$  es la función delta de Dirac:

$$\delta(\tau) = \begin{cases} \infty & \text{si } \tau = 0 \\ 0 & \text{si } \tau \neq 0 \end{cases}$$

En conclusión se observa que este proceso no es físicamente realizable. En realidad, el ruido blanco es un concepto idealizado, muy útil, como aproximación a situaciones en los que el ancho de banda del ruido de perturbaciones es mayor que el ancho de banda del sistema.

Si se considera tiempo discreto dicho proceso se caracteriza por poseer la siguiente función de covarianza

$$r_{xx}(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 & \tau = 0 \\ 0 & \tau = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (3.25)$$

El ruido blanco juega un papel importante en la teoría de control estocástica. Todos los procesos aleatorios que se puedan necesitar pueden ser generados mediante la implementación de un filtro adecuado al que se le aplique en su entrada ruido blanco.

### 3.4.4 Procesos estocásticos gaussianos y markovianos

Un proceso aleatorio  $\{x(k)\}$  es un *proceso aleatorio gaussiano* si las variables aleatorias  $x_k(t_k)$  asociadas al mismo siguen una distribución normal gaussiana multidimensional para cualquier instante de tiempo.

Los procesos aleatorios gaussianos están bastante extendidos en problemas físicos y muchas veces pueden ser pronosticados matemáticamente mediante el teorema del límite central. También se puede demostrar que si un proceso gaussiano sufre una transformación

lineal, el resultado de la transformación también es un proceso gaussiano; esta propiedad es muy importante en muchas aplicaciones teóricas y prácticas de la teoría de procesos aleatorios.

La función de densidad de un proceso gaussiano está dada por:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (3.26)$$

La distribución conjunta de  $x(t_1)$  y  $x(t_2)$  es la distribución normal bivariable; distribuciones conjuntas de orden superior están dadas por la distribución normal multivariable. Si  $x(t)$  es un vector gaussiano  $n$ -dimensional entonces la distribución de  $x(t)$  es la distribución normal dada por:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot |P|^{1/2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot (x - \mu)^T \cdot P^{-1} \cdot (x - \mu)\right] \quad (3.27)$$

En la expresión anterior  $x$  es un vector  $n$ -dimensional constituido por las  $n$  variables aleatorias:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Y  $\mu$  y  $P$  son la media y la covarianza de  $x$ :

$$\mu = E[x] = (E(x_1), \dots, E(x_n))^T \quad (3.28)$$

$$P = E[(x - \mu) \cdot (x - \mu)^T] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Con

$$\begin{aligned} P_{ij} &= E[(x_i(k) - \mu_i) \cdot (x_j(k) - \mu_j)] \\ P_{ii} &= \sigma_i^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Todas las propiedades estadísticas de un proceso aleatorio gaussiano están definidas por el primer y segundo momento de la distribución. De acuerdo con esto, se suele usar la siguiente notación abreviada para designar a este tipo de procesos:

$$x \equiv N(\mu, P)$$

Otra clase de procesos aleatorios útiles, que se pueden generar haciendo pasar ruido blanco a través de un determinado filtro, es la familia de los procesos markovianos.

Un proceso continuo  $x(t)$  se dice que es un *proceso de markov de primer orden* si para todo  $k$  y  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$  se verifica que

$$F[x(t_k) | x(t_{k-1}), \dots, x(t_1)] = F[x(t_k) | x(t_{k-1})]$$

Es decir, la distribución de probabilidad del proceso  $x(t_k)$  depende solamente del valor del punto inmediatamente anterior  $x(t_{k-1})$ . Los procesos de Markov de primer orden se pueden asociar con la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} + \beta_1(t) \cdot x = w \quad (3.31)$$

Donde  $w$  es ruido blanco.

Para procesos de Markov de primer orden discretos, la relación correspondiente es una ecuación en diferencias de primer orden.

Si la función densidad de probabilidad de  $w$  es gaussiana entonces  $x$  es también gaussiano y al proceso  $x(t)$  se le denomina de Gauss-Markov, que posee la siguiente función de autocorrelación:

$$\varphi_{xx}(\tau) = E[x(t) \cdot x(t + \tau)] = \sigma^2 \cdot e^{-\beta_1 |\tau|} + \mu^2 \quad (3.32)$$

Al valor  $1/\beta_1$  se le denomina *tiempo de correlación*. La densidad espectral del ruido blanco  $w$  que genera el proceso descrito por (3.32) está dada en términos de la varianza de  $x$  como  $2 \cdot \beta_1 \cdot \sigma^2$ . Las autocorrelaciones de muchos fenómenos físicos se describen muy bien mediante la ecuación (3.32), pudiéndose modelar con la ecuación diferencial (3.31).

Un proceso continuo  $x(t)$  se dice que es un *proceso de markov de segundo orden* si para todo  $k$  y  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$  se verifica que

$$F[x(t_k) | x(t_{k-1}), \dots, x(t_1)] = F[x(t_k) | x(t_{k-1}), x(t_{k-2})]$$

Es decir, la distribución de probabilidad del proceso  $x(t_k)$  depende de sólo dos puntos inmediatamente anteriores. La ecuación diferencial asociada a este proceso es:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta_2(t) \frac{dx}{dt} + \beta_2^2(t) = w \quad (3.33)$$

Si la función densidad de probabilidad de  $w$  es gaussiana entonces  $x(t)$  es un proceso gaussiano de segundo orden. Si  $x(t)$  tiene media  $\mu_x$  y es estacionario, su función autocorrelación tiene la forma:

$$\varphi_{xx}(\tau) = E[x(t) \cdot x(t + \tau)] = \sigma^2 \cdot (1 + \beta_2 \cdot |\tau|) e^{-\beta_2 \cdot |\tau|} + \mu_x^2 \quad (3.34)$$

El *tiempo de correlación* de este proceso es aproximadamente  $2.146/\beta_2$ ; la densidad espectral del ruido blanco  $w$  es  $4 \cdot \beta_2^3 \cdot \sigma^2 \cdot \delta(\tau)$ .

## 3.5 MODELOS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS

### 3.5.1 Modelos en el espacio de estados

#### 3.5.1.1 Formulación discreta

Considérese un sistema en tiempo discreto donde el periodo de muestreo se ha tomado igual a la unidad. Sea  $x(k)$  el estado en el instante  $k$ . La distribución de probabilidad del estado en el instante de tiempo  $k+1$  será entonces una función de  $x(k)$ . Si el valor medio es lineal en  $x(k)$  y la distribución alrededor de la media es independiente de  $x(k)$ , entonces  $x(k+1)$  se puede representar mediante una *ecuación en diferencias lineal estocástica*:

$$x(k+1) = F \cdot x(k) + v(k) \quad (3.35)$$

donde  $v(k)$  es una variable aleatoria de media cero que es independiente de  $x(k)$  y de todos los valores pasado de  $x$ . Esto implica que  $v(k)$  también es independiente de todos los valores pasados de  $v$ . La secuencia  $\{v(k), k=0,1,\dots\}$  es una secuencia de variables aleatorias independientes igualmente distribuidas. Por lo tanto el proceso estocástico  $\{v(k)\}$  es ruido blanco en tiempo discreto.

Para definir al proceso aleatorio  $\{x(k)\}$  completamente, es necesario especificar las condiciones iniciales. Se supone que el estado inicial tiene valor medio  $m_0$  y matriz de covarianza  $R_0$ . Asimismo la covarianza de las variables aleatorias  $v$  se denota mediante  $R_1$ .

**Teorema 3.1:** Considérese un proceso aleatorio definido por la ecuación en diferencias estocástica (3.35), donde  $\{v(k)\}$  es un proceso de ruido blanco con valor medio cero y covarianza  $R_1$ . Considérese que el estado inicial tiene valor medio  $m_0$  y covarianza  $R_0$ . La función del valor medio del proceso está por la siguiente ecuación en diferencias:

$$m(k+1) = F \cdot m(k), \quad m(0) = m_0 \quad (3.36)$$

y la función de covarianza por:

$$r(k+\tau, k) = F^\tau \cdot P(k), \quad \tau \geq 0 \quad (3.37)$$

donde  $P(k) = \text{cov}[x(k), x(k)]$  viene dada por:

$$P(k+1) = F \cdot P(k) \cdot F^T + R_1 \quad P(0) = R_0 \quad (3.38)$$

◆ **Demostración Teorema 3.1:**

Para obtener la función valor medio

$$m(k) = E[x(k)]$$

simplemente hay que tomar el valor medio en ambos lados de la ecuación (3.35)

$$E[x(k+1)] = E[F \cdot x(k) + v(k)] \rightarrow m(k+1) = F \cdot m(k) + E[v(k)]$$

Como  $E[v(k)] = 0$  entonces se obtiene

$$m(k+1) = F \cdot m(k)$$

Luego el valor medio se propagará de la misma forma que un sistema no perturbado.

Para calcular la función de covarianza, se considera la siguiente variable

$$\tilde{x} = x - m$$

de tal forma que:

$$P(k) = \text{cov}[x(k), x(k)] = E[\tilde{x}(k) \cdot \tilde{x}^T(k)]$$

Esta  $\tilde{x}$  satisface la ecuación (3.35) si la condición inicial tiene media cero. Para calcular la covarianza hay que formar la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) \cdot \tilde{x}^T(k+1) &= [F \cdot \tilde{x}(k) + v(k)] \cdot [F \cdot \tilde{x}(k) + v(k)]^T \\ &= F \cdot \tilde{x}(k) \cdot \tilde{x}^T(k) \cdot F^T + F \cdot \tilde{x}(k) \cdot v^T(k) + v(k) \cdot \tilde{x}^T(k) \cdot F^T + v(k) \cdot v^T(k) \end{aligned}$$

Tomando valores medios

$$E[\tilde{x}(k+1) \cdot \tilde{x}^T(k+1)] = F \cdot E[\tilde{x}(k) \cdot \tilde{x}^T(k)] \cdot F^T + F \cdot E[\tilde{x}(k) \cdot v^T(k)] + E[v(k) \cdot \tilde{x}^T(k)] \cdot F^T + E[v(k) \cdot v^T(k)]$$

Se obtiene

$$P(k+1) = F \cdot P(k) \cdot F^T + R_1$$

Esta ecuación recursiva para  $P$  indica como se propaga la covarianza.

Para calcular la función de covarianza del estado, hay que darse cuenta que:

$$\tilde{x}(k+1) \cdot \tilde{x}^T(k) = [F \cdot \tilde{x}(k) + v(k)] \cdot \tilde{x}^T(k)$$

Puesto que  $v(k)$  y  $\tilde{x}(k)$  son independientes y  $v(k)$  tiene media cero, entonces:

$$\begin{aligned} r_{xx}(k+1, k) &= \text{cov}[x(k+1), x(k)] = E[(x(k+1) - m(k+1)) \cdot (x(k) - m(k))^T] \\ &= E[\tilde{x}(k+1) \cdot \tilde{x}^T(k)] = E[[F \cdot \tilde{x}(k) + v(k)] \cdot \tilde{x}^T(k)] \\ &= E[F \cdot \tilde{x}(k) \cdot \tilde{x}^T(k) + v(k) \cdot \tilde{x}^T(k)] = F \cdot E[\tilde{x}(k) \cdot \tilde{x}^T(k)] + E[v(k) \cdot \tilde{x}^T(k)] \\ &= F \cdot P(k) \end{aligned}$$

Para obtener la expresión

$$r_{xx}(k+\tau, k) = F^\tau \cdot P(k)$$

se debe operar de forma similar al caso  $r_{xx}(k+1, k)$  pero considerando que ahora

$$\tilde{x}(k+\tau) \cdot \tilde{x}^T(k) = [F^\tau \cdot \tilde{x}(k) + \sum_{j=0}^{\tau-1} F^{\tau-1-j} \cdot v(k+j)] \cdot \tilde{x}^T(k)$$

◆

Los términos de (3.38) pueden interpretarse físicamente. La covarianza  $P$  representa la incertidumbre en el estado, el término  $F \cdot P(k) \cdot F^T$  indica la incertidumbre en el instante  $k$  que se propaga debido a la dinámica del sistema, y el término  $R_1$  describe el incremento en la incertidumbre debido a la perturbación  $v$ .

Por otra parte, si el sistema tiene una salida

$$y = C \cdot x$$

puede demostrarse fácilmente que su función valor medio es

$$m_y = C \cdot m$$

y que su función de covarianza es

$$r_{yy} = C \cdot r_{xx} \cdot C^T$$

Asimismo la función de covarianza cruzada entre  $y$  e  $x$  está dada por:

$$r_{yx} = C \cdot r_{xx}$$

◆ **Ejemplo 3.2:**

Considérese el siguiente sistema de primer orden

$$x(k+1) = a \cdot x(k) + v(k)$$

donde  $v$  es una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas con valores medios nulos y covarianzas  $r_1$ . Supóngase que en el instante  $k_0$  el estado tiene un valor medio  $m_0$  y covarianza  $r_0$ . Para obtener el valor medio del estado  $x(k)$  hay que resolver la ecuación en diferencias (3.36):

$$m(k+1) = a \cdot m(k), \quad m(k_0) = m_0$$

La solución a esta ecuación en diferencias es:

$$m(k) = a^{k-k_0} \cdot m_0$$

Por otra parte la aplicación de la ecuación (3.38) da

$$P(k+1) = a^2 \cdot P(k) + r_1 \quad P(k_0) = r_0$$

Resolviendo esta ecuación en diferencias se obtiene:

$$P(k) = a^{2 \cdot (k-k_0)} \cdot r_0 + \frac{1 - a^{2 \cdot (k-k_0)}}{1 - a^2} \cdot r_1$$

Por otra parte, de acuerdo con 3.37

$$r_x(l, k) = a^{l-k} \cdot P(k) \quad l \geq k$$

$$r_x(l, k) = a^{k-l} \cdot P(l) \quad l < k$$

Si  $|a| < 1$  y  $k_0 \rightarrow -\infty$ , entonces:

$$m(k) \rightarrow 0$$

$$P(k) \rightarrow \frac{r_1}{1 - a^2}$$

$$r_x(k + \tau, k) \rightarrow \frac{r_1 \cdot a^{|\tau|}}{1 - a^2}$$

Se observa que en ese caso el proceso pasa a ser estacionario ya que  $m$  es una constante y la función de covarianza es únicamente función de  $\tau$ .

Si se considera la siguiente salida

$$y(k) = x(k) + e(k)$$

donde  $e(k)$  es una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas con media cero y covarianza  $r_2$ , entonces la función de covarianza de  $y$  es

$$r_y(\tau) = \begin{cases} r_2 + \frac{r_1}{1 - a^2} & \tau = 0 \\ \frac{r_1 \cdot a^{|\tau|}}{1 - a^2} & \tau \neq 0 \end{cases}$$

La densidad espectral de la salida se obtiene de la expresión (3.14):

$$\phi_y(\omega) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left[ r_2 + \frac{r_1}{(e^{i\omega} - a) \cdot (e^{-i\omega} - a)} \right] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left[ r_2 + \frac{r_1}{1 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \cos \omega} \right]$$

◆

### 3.5.1.2 Formulación continua

Modelos en el espacio de estados para procesos en tiempo continuo estocásticos se pueden obtener mediante una generalización formal de la ecuación (3.35):

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + \dot{v}$$

donde  $\dot{v}$  es un vector cuyos elementos son procesos estocásticos de ruido blanco. Puesto que  $\dot{v}$  tiene una varianza infinita, se acostumbra a escribir la ecuación en término de diferenciales, es decir:

$$dx = A \cdot x \cdot dt + dv \quad (3.39)$$

La señal  $v$  es la integral de  $\dot{v}$ , se supone que tiene valor medio cero, incrementos no correlacionados entre si, ni con  $x$ , y varianza

$$\text{cov}[v(t), v(t)] = R_1 \cdot t \quad (3.40)$$

A la ecuación (3.39) se le denomina *ecuación diferencial estocástica lineal*. Para especificarla completamente es necesario dar la distribución de probabilidad inicial de  $x$  en el instante inicial.

**Teorema 3.2:** Considérese un proceso estocástico definido por la ecuación diferencial estocástica lineal (3.39) donde el proceso  $v$  tiene media cero y covarianza incremental  $R_1 \cdot dt$ . Supóngase que el estado inicial tiene media  $m_0$  y covarianza  $R_0$ . El valor medio del proceso  $x$  viene dado por la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dm(t)}{dt} = A \cdot m(t), \quad m(0) = m_0 \quad (3.41)$$

La covarianza es

$$\text{cov}[x(s), x(t)] = e^{A(s-t)} \cdot P(t), \quad s \geq t \quad (3.42)$$

donde  $P(t) = \text{cov}[x(t), x(t)]$  es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dP(t)}{dt} = A \cdot P(t) + P(t) \cdot A^T + R_1 \quad P(0) = R_0 \quad (3.43)$$

◆ **Demostración Teorema 3.2:**

La ecuación (3.41) se obtiene tomando el valor medio de (3.39)

$$E[dx] = E[A \cdot x \cdot dt] + E[dv]$$

Considerando que los valores constantes se pueden sacar del operador valor medio  $E$  y que además éste conmuta con respecto al diferencial:

$$dE[x] = AE[x]dt + dE[v]$$

Que es equivalente a

$$dm(t) = A \cdot m(t) \cdot dt$$

Y dividiendo por  $dt$  se obtiene (3.41).

Para obtener la ecuación diferencial (3.43), hay que considerar que

$$d(x \cdot x^T) = (x + dx) \cdot (x + dx)^T - x \cdot x^T = x \cdot dx^T + dx \cdot x^T + dx \cdot dx^T$$

Sustituyendo en la expresión anterior la ecuación (3.39) se obtiene:

$$d(x \cdot x^T) = x \cdot [A \cdot x \cdot dt + dv]^T + [A \cdot x \cdot dt + dv] \cdot x^T + [A \cdot x \cdot dt + dv] \cdot [A \cdot x \cdot dt + dv]^T$$

Desarrollando la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} d(x \cdot x^T) = & x \cdot x^T \cdot A^T \cdot dt + x \cdot dv^T + A \cdot x \cdot x^T \cdot dt + dv \cdot x^T + A \cdot x \cdot (dt)^2 \cdot x^T \cdot A^T + \\ & + dv \cdot dt \cdot x^T \cdot A^T + A \cdot x \cdot dt \cdot dv^T + dv \cdot dv^T \end{aligned}$$

Si se toma el valor medio, puesto que  $v$  es independiente de  $x$  se obtiene:

$$d(E[x \cdot x^T]) = E[x \cdot x^T] A^T \cdot dt + A \cdot E[x \cdot x^T] \cdot dt + A \cdot E[x \cdot x^T] A^T (dt)^2 + E[dv \cdot dv^T]$$

Como por definición

$$P(t) = E[x \cdot x^T]$$

y de (3.40)

$$E[dv \cdot dv^T] = R_1 \cdot dt$$

Entonces

$$dP(t) = P(t) \cdot A^T \cdot dt + A \cdot P(t) \cdot dt + A \cdot P(t) \cdot A^T (dt)^2 + R_1 \cdot dt$$

Dividiendo por  $dt$

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \cdot A^T + A \cdot P(t) + R_1 + A \cdot P(t) \cdot A^T (dt)$$

y tomando el límite cuando  $dt$  tiende a 0 se obtiene (3.43).

Finalmente para obtener (6.42), se considera  $s \geq t$  y se integra la ecuación (3.39) se obtiene

$$x(s) = e^{A(s-t)} \cdot x(t) + \int_t^s e^{A(s-s')} \cdot dv(s')$$

Si se multiplica por la derecha con  $x^T(t)$  a ambos miembros se obtiene:

$$x(s) \cdot x^T(t) = e^{A(s-t)} \cdot x(t) \cdot x^T(t) + \left[ \int_t^s e^{A(s-s')} \cdot dv(s') \right] \cdot x^T(t)$$

Si se aplica el operador valor medio, considerando que  $dv(s')$  no está correlacionado con  $x(t)$  si  $s' \geq t$ , entonces se obtiene (3.42).

◆

◆ **Ejemplo 3.3:**

Considérese la siguiente ecuación diferencial estocástica escalar

$$\begin{aligned} dx &= -a \cdot x \cdot dt + dv \\ x(t_0) &= m_0 \\ \text{cov}[x(t_0), x(t_0)] &= r_0 \end{aligned}$$

donde el proceso  $\{v(t), t \in T\}$  posee una covarianza incremental  $r_1 \cdot dt$ . La ecuación diferencial que da la expresión de la media es

$$\frac{dm}{dt} = -a \cdot m \quad m(t_0) = m_0$$

La solución de esta ecuación es:

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-a(t-t_0)}$$

La función covarianza viene dada por

$$r(s, t) = \text{cov}[x(s), x(t)] = \begin{cases} e^{-a(s-t)} \cdot P(t) & s \geq t \\ e^{-a(t-s)} \cdot P(t) & s \leq t \end{cases}$$

La ecuación (3.43) da la siguiente ecuación diferencial para  $P$ .

$$\frac{dP}{dt} = -2 \cdot a \cdot P + r_1 \quad P(t_0) = r_0$$

Cuya solución es:

$$P(t) = e^{-2 \cdot a(t-t_0)} \cdot r_0 + \int_{t_0}^t e^{-2 \cdot a(t-s)} \cdot r_1 \cdot ds = e^{-2 \cdot a(t-t_0)} \cdot r_0 + \frac{r_1}{2 \cdot a} \cdot [1 - e^{-2 \cdot a(t-t_0)}]$$

Cuando  $t_0 \rightarrow -\infty$ , la función valor medio tiende a cero y la función covarianza tiende a

$$r(s, t) = \frac{r_1}{2 \cdot a} \cdot e^{-a(t-s)}$$

Puesto que esta función depende de la diferencia  $s-t$ , el proceso sería estacionario y su función de covarianza se puede escribir como:

$$r(\tau) = \frac{r_1}{2 \cdot a} \cdot e^{-a|\tau|}$$

Por otra parte, la correspondiente densidad espectral vendría dada por la aplicación de (3.16).

$$\phi(\omega) = \frac{r_1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\omega^2 + a^2}$$

◆

### 3.5.1.3 Muestreo de una ecuación diferencial estocástica

Si el modelo de un proceso se presenta como ecuaciones diferenciales estocásticas, puede ser útil muestrearlas y obtener un modelo en tiempo discreto.

Considérese el proceso descrito por

$$dx = A \cdot x \cdot dt + dv \quad (3.44)$$

donde el proceso  $v$  tiene media cero e incrementos no correlacionados. La covarianza incremental de  $v$  es  $R_1 \cdot dt$ . Sean los instantes de muestreo  $\{t_k; k=0,1,\dots\}$ . La integración de esta ecuación sobre un intervalo de muestreo  $[t_k, t_{k+1}]$  da

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)} \cdot x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)} \cdot dv(s)$$

Considérese la variable aleatoria

$$e(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)} \cdot dv(s)$$

Esta variable tiene media cero puesto que  $v$  también tiene media cero. Las variables aleatorias  $e(t_k)$  y  $e(t_l)$  no están correlacionados si  $k \neq l$  puesto que los incrementos de  $v$  sobre intervalos disjuntos están no correlacionados. La covarianza de  $e(t_k)$  está dada por

$$\begin{aligned} E[e(t_k)e^T(t_k)] &= E \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)} \cdot dv(s) \cdot dv^T(t) \cdot e^{A^T(t_{k+1}-t)} \right] = \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)} \cdot R_1 \cdot e^{A^T(t_{k+1}-s)} ds \end{aligned} \quad (3.45)$$

Se obtiene así que la secuencia aleatoria  $\{x(t_k), k=0,1,\dots\}$  obtenida muestreando el proceso  $\{x(t)\}$  está descrita por la ecuación en diferencias

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)} \cdot x(t_k) + e(t_k)$$

donde  $\{e(t_k)\}$  es una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas con media cero y covarianza (3.45).

## 3.5.2 Filtrado de procesos estacionarios

### 3.5.2.1 Formulación discreta

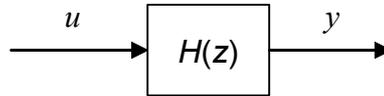


Figura 3.6: Sistema discreto estacionario

**Teorema 3.3.** Considérese un sistema dinámico de tiempo discreto estacionario con periodo de muestreo  $T=1$  (ver Figura 3.6) y función de transferencia pulso  $H(z)$ . Sea la señal de entrada  $u$  un proceso estocástico con media  $m_u$  y densidad espectral  $\phi_u$ . Si el sistema es estable, entonces la salida  $y$  es también un proceso estacionario con media

$$m_y(k) = H(1) \cdot m_u(k) \quad (3.46)$$

y densidad espectral

$$\phi_y(\omega) = H(e^{i\omega}) \cdot \phi_u(\omega) \cdot H^T(e^{-i\omega}) \quad (3.47)$$

Además la densidad espectral cruzada entre la entrada y la salida está dada por la expresión

$$\phi_{yu}(\omega) = H(e^{i\omega}) \cdot \phi_u(\omega) \quad (3.48)$$

#### ♦ Demostración Teorema 3.3:

Para el sistema considerado la relación entre la entrada y la salida es:

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^k h(k-n) \cdot u(n) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot u(k-n)$$

Tomando valores medios

$$\begin{aligned}
 m_y(k) &= E[y(k)] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot u(k-n)\right] = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot E[u(k-n)] = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot m_u(k-n)
 \end{aligned}$$

Se observa que el valor medio de la salida se obtiene filtrando el valor medio de la entrada.

Para determinar la covarianza, primero hay que darse cuenta que

$$y(k) - m_y(k) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot [u(k-n) - m_u(k-n)]$$

Luego la diferencia entre la señal de salida y su valor medio se propaga a través del sistema de la misma forma que la señal de entrada. Con vistas a simplificar la escritura de las ecuaciones se va a suponer que los valores medios son cero. Además se supondrá que todas las series infinitas existen y que las operaciones de suma infinita y valor esperado son conmutativas. Así, la definición de covarianza da

$$\begin{aligned}
 r_y(\tau) &= E[y(k+\tau) \cdot y^T(k)] = \\
 &= E\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot [u(k+\tau-n)]\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} h(l) \cdot [u(k-l)]\right)^T\right] = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(n) \cdot E[u(k+\tau-n) \cdot u^T(k-l)] \cdot h^T(l) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(n) \cdot r_u(\tau+l-n) \cdot h^T(l)
 \end{aligned}$$

De forma similar se obtiene la covarianza cruzada entre la entrada y la salida.

$$\begin{aligned}
 r_{yu}(\tau) &= E[y(k+\tau) \cdot u^T(k)] = E\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot [u(k+\tau-n)]\right) \cdot u^T(k)\right] = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot E[u(k+\tau-n) \cdot u^T(k)] = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot r_u(\tau-n)
 \end{aligned}$$

La definición de densidad espectral es

$$\phi_y(\omega) = \phi_{yy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i n \omega} \cdot r_y(n)$$

Sustituyendo la expresión de la covarianza en esta ecuación y recolocando términos

$$\begin{aligned}
\phi_y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(n+k-k+l-l)\omega} \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(k) \cdot r_u(n+l-k) \cdot h^T(l) \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-i \cdot k \cdot \omega} \cdot h(k) \cdot e^{-i(n+l-k)\omega} \cdot r_u(n+l-k) \cdot e^{-i \cdot l \cdot \omega} \cdot h^T(l) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i \cdot k \cdot \omega} \cdot h(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(n+l-k)\omega} \cdot r_u(n+l-k) \sum_{l=0}^{\infty} e^{i \cdot l \cdot \omega} \cdot h^T(l)
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $p=n+l-k$  en la segunda sumatoria se obtiene:

$$\phi_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i \cdot k \cdot \omega} \cdot h(k) \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot p \cdot \omega} \cdot r_u(p) \sum_{l=0}^{\infty} e^{i \cdot l \cdot \omega} \cdot h^T(l)$$

Introduciendo la función de transferencia pulso  $H(z)$  del sistema, que se relaciona con la respuesta a un impulso  $\{h(k), k=0, 1, \dots\}$  mediante la expresión:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \cdot h(n) \quad (3.49)$$

Como  $z=e^{i\omega T}$  y  $T=1$  se tiene

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \cdot i \cdot \omega} \cdot h(n)$$

Entonces la ecuación para la densidad espectral se puede escribir de la siguiente forma:

$$\phi_y(\omega) = H(e^{i\omega}) \cdot \phi_u(\omega) \cdot H^T(e^{-i\omega})$$

De forma similar, la ecuación para la densidad espectral cruzada es

$$\phi_{yu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot n \cdot \omega} \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \cdot r_u(n-k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i \cdot k \cdot \omega} h(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot n \cdot \omega} \cdot r_u(n) = H(e^{i\omega}) \cdot \phi_u(\omega)$$

◆

El resultado indicado en este teorema tiene una sencilla interpretación física. El número  $|H(e^{i\omega})|$  es la amplitud en el estado estacionario de la respuesta del sistema a una señal seno de frecuencia  $\omega$ . El valor de la densidad espectral de la salida es entonces el producto de la ganancia de la potencia  $|H(e^{i\omega})|^2$  y la densidad espectral de la entrada  $\phi_u(\omega)$ .

Por otra parte, la ecuación (3.48) indica que la densidad espectral cruzada es igual a la función de transferencia del sistema si la entrada es ruido blanco con densidad espectral unidad. Este resultado puede ser utilizado para determinar la función de transferencia pulso del sistema.

◆ **Ejemplo 3.4:**

Considere el proceso  $\{x(k)\}$  del Ejemplo 3.2. Este proceso puede ser generado haciendo pasar ruido blanco a través de un filtro función de transferencia pulso:

$$H(z) = \frac{1}{z - a}$$

Puesto que la densidad espectral de  $\{v(k)\}$  es:

$$\phi_v(\omega) = \frac{r_1}{2 \cdot \pi}$$

La densidad espectral de  $\{x(k)\}$  se determina aplicando la ecuación (3.47)

$$\phi_x(\omega) = H(e^{i\omega}) \cdot \phi_u(\omega) \cdot H^T(e^{-i\omega}) = \frac{r_1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{(e^{i\omega} - a) \cdot (e^{-i\omega} - a)} = \frac{r_1}{2 \cdot \pi \cdot (1 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \cos \omega)}$$

Por otra parte, el proceso

$$y(k) = x(k) + e(k)$$

tiene la siguiente densidad espectral

$$\phi_y(\omega) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left[ r_2 + \frac{r_1}{1 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \cos \omega} \right]$$

Se observa que este resultado es el mismo obtenido en el Ejemplo 3.2.

◆

### 3.5.2.2 Formulación continua

Considérese un sistema estable invariante en el tiempo con respuesta a impulso  $g$ . La relación entre la entrada y la salida de dicho sistema viene dada por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t-s) \cdot u(s) ds = \int_0^{\infty} g(s) \cdot u(t-s) ds \quad (3.50)$$

Sea la señal de entrada  $u$  a un proceso estocástico con función valor medio  $m_u$  y función de covarianza  $r_u$ . El siguiente teorema es análogo al Teorema 3.3 enunciado para sistemas en tiempo discreto.

**Teorema 3.4:** *Filtrado de procesos estacionarios.* Considérese un sistema lineal estacionario con función de transferencia  $G$ . Sea la señal de entrada un proceso estocástico estacionario en tiempo continuo con valor medio  $m_u$  y densidad espectral  $\phi_u$ . Si el sistema es estable, entonces la salida es también un proceso estacionario con valor medio

$$m_y = G(0) \cdot m_u \quad (3.51)$$

y densidad espectral

$$\phi_y(\omega) = G(i\omega) \cdot \phi_u(\omega) \cdot G^T(-i\omega) \quad (3.52)$$

La densidad espectral cruzada entre la entrada y la salida está dada por

$$\phi_{yu}(\omega) = G(i\omega) \cdot \phi_u(\omega) \quad (3.53)$$

### Ejemplo 3.5:

Considérese el sistema del Ejemplo 3.3. El proceso  $x$  se puede considerar como el resultado de filtrar ruido blanco con varianza  $r_1/(2 \cdot \pi)$  a través de un sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s+a}$$

La densidad espectral se puede calcular usando (3.52):

$$\phi(\omega) = \frac{r_1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{i\omega + a} \cdot \frac{1}{-i\omega + a} = \frac{r_1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\omega^2 + a^2}$$

♦

### 3.5.3 Factorización espectral

#### 3.5.3.1 Formulación discreta

Por *factorización espectral* se entenderá al problema de obtener el sistema lineal  $H(z)$  que al ser excitado por ruido blanco de covarianza unidad genera una salida cuya densidad espectral  $\phi_y(\omega)$ , racional en  $\cos \omega$ , es conocida de antemano.

Como la entrada es ruido blanco su densidad espectral es

$$\phi_u(\omega) = \frac{1}{2\pi}$$

Además como

$$z = e^{i\omega}$$

entonces por la ecuación (3.47) del Teorema 3.3 se tiene que:

$$\phi_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot H(z) \cdot H^T(z^{-1}) = F(z)$$

Se verifica que si  $z_i$  es un cero de  $H(z)$  entonces  $z_i^{-1}$  es un cero de  $H(z^{-1})$ . Análogamente si  $p_i$  es un polo de  $H(z)$  entonces  $p_i^{-1}$  es un polo de  $H(z^{-1})$ . Es decir, existe una simetría tal que

$$\begin{aligned} z_i \cdot z_j &= 1 \\ p_i \cdot p_j &= 1 \end{aligned}$$

Siendo  $z_i \cdot z_j$  ceros de  $F(z)$  y siendo  $p_i \cdot p_j$  polos de  $F(z)$ .

Los pasos para encontrar una función  $H$  que corresponda a una determinada densidad espectral racional  $\phi_y$  son:

- 1) Dada  $\phi_y(\omega)$  obtener los polos  $p_i$  y los ceros  $z_i$  de  $F(z)$ .
- 2) Construir  $H(z)$  de la siguiente forma:

$$H(z) = K \cdot \frac{\prod (z - z_i)}{\prod (z - p_i)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Puesto que el proceso estocástico se ha supuesto estacionario los polos  $p_i$  y los ceros  $z_i$  verificarán las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} |z_i| &\leq 1 \\ |p_i| &< 1 \end{aligned}$$

El resultado obtenido se resume en el siguiente teorema.

**Teorema 3.5: Teorema de factorización espectral.** Dada una densidad espectral  $\phi(\omega)$ , que sea una función racional en  $\cos \omega$ , existe un sistema lineal con función de transferencia pulso

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (3.54)$$

tal que la salida que se obtiene, cuando la entrada del sistema es ruido blanco, es un proceso aleatorio estacionario con densidad espectral  $\phi$ . El polinomio  $A(z)$  tiene todos sus ceros dentro del círculo unidad. El polinomio  $B$  tiene todos sus ceros dentro del disco unidad o sobre el círculo unidad.

La principal conclusión de este teorema es que es posible generar cualquier proceso aleatorio estacionario con densidad espectral racional como la salida de un sistema lineal estable al cual se le excita con ruido blanco.

Por tanto es suficiente con estudiar como se comportan los sistemas cuando son excitados por ruido blanco. Todos los otros procesos estacionarios con densidad espectral racional pueden ser generados mediante el filtrado adecuado del ruido blanco.

A menudo se supone que el polinomio  $B(z)$  posee todos sus ceros dentro del círculo unidad. Esto significa que la inversa del sistema  $H$  es estable.

◆ **Ejemplo 3.6:**

Considérese el proceso  $\{y(k)\}$  de los Ejemplos 3.2 y 3.4. Este proceso tiene la siguiente densidad espectral

$$\phi_y(\omega) = F(z) = \frac{1}{2\pi} \left[ r_2 + \frac{r_1}{(z-a)(z^{-1}-a)} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{r_1 + r_2(1+a^2) - r_2 \cdot a \cdot (z+z^{-1})}{(z-a)(z^{-1}-a)} \right]$$

Pasando el factor  $2\pi$  al otro miembro

$$2 \cdot \pi \cdot F(z) = \left[ \frac{r_1 + r_2(1 + a^2) - r_2 \cdot a \cdot (z + z^{-1})}{(z - a) \cdot (z^{-1} - a)} \right]$$

Se observa que el denominador ya está en forma factorizada. Para factorizar el numerador, observamos que puesto que únicamente posee potencias en  $z$ , entonces

$$B(z) \cdot B(z^{-1}) = \lambda^2 \cdot (z - b) \cdot (z^{-1} - b)$$

Que se puede escribir como

$$B(z) \cdot B(z^{-1}) = \lambda^2 \cdot (1 + b^2) - \lambda^2 \cdot b \cdot (z + z^{-1})$$

Igualando  $B(z) \cdot B(z^{-1})$  con el numerador de  $2 \cdot \pi \cdot F(z)$

$$\lambda^2 \cdot (1 + b^2) - \lambda^2 \cdot b \cdot (z + z^{-1}) = r_1 + r_2 \cdot (1 + a^2) - r_2 \cdot a \cdot (z + z^{-1})$$

Igualando ahora los coeficientes de la misma potencia de  $z$  se obtienen el siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{aligned} z^0 : \lambda^2 \cdot (1 + b^2) &= r_1 + r_2 \cdot (1 + a^2) \\ z^1 : \lambda^2 \cdot b &= r_2 \cdot a \end{aligned}$$

Si se despeja  $\lambda^2$  de la segunda ecuación

$$\lambda^2 = \frac{r_2 \cdot a}{b}$$

y se define la variable  $p$  como:

$$p = r_1 + r_2 \cdot (1 + a^2)$$

Es posible escribir la primera ecuación como una ecuación algebraica de segundo orden para  $b$

$$r_2 \cdot a \cdot b^2 - b \cdot p + r_2 \cdot a = 0$$

Esta ecuación tiene la siguiente solución válida, es decir, dentro del círculo unidad:

$$b = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4 \cdot (r_2 \cdot a)^2}}{2 \cdot a \cdot r_2}$$

Con lo que

$$\lambda^2 = \frac{2 \cdot (r_2 \cdot a)^2}{p + \sqrt{p^2 - 4 \cdot (r_2 \cdot a)^2}}$$

Luego

$$H(z) = \frac{\lambda \cdot (z - b)}{z - a}$$

◆

◆ **Ejemplo 3.7:**

Se desea calcular el filtro  $H(z)$  que genera una señal estocástica con densidad espectral

$$F(z) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left[ \frac{0.3125 + 0.125 \cdot (z + z^{-1})}{2.25 - 1.5 \cdot (z + z^{-1}) + 0.5 \cdot (z^2 + z^{-2})} \right]$$

$F(z)$  se puede escribir como:

$$2 \cdot \pi \cdot F(z) = \frac{B(z) \cdot B(z^{-1})}{A(z) \cdot A(z^{-1})} = \frac{\lambda^2 \cdot (z - b) \cdot (z^{-1} - b)}{(z - a_1) \cdot (z^{-1} - a_1) \cdot (z - a_2) \cdot (z^{-1} - a_2)}$$

Luego

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\lambda \cdot (z - b)}{(z - a_1) \cdot (z - a_2)}$$

Definiendo las variables

$$p_1 = 1 + a_1^2$$

$$p_2 = 1 + a_2^2$$

Y desarrollando los productos se obtiene

$$\frac{B(z) \cdot B(z^{-1})}{A(z) \cdot A(z^{-1})} = \frac{\lambda^2 \cdot [(1 + b^2) - b \cdot (z + z^{-1})]}{(p_1 \cdot p_2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2) - (a_1 \cdot p_2 + a_2 \cdot p_1) \cdot (z + z^{-1}) + a_1 \cdot a_2 \cdot (z^2 + z^{-2})}$$

Igualando  $B(z) \cdot B(z^{-1})$  con el numerador de  $2 \cdot \pi \cdot F(z)$

$$\lambda^2 \cdot [(1 + b^2) - b \cdot (z + z^{-1})] = 0.3125 + 0.125 \cdot (z + z^{-1})$$

se obtienen las ecuaciones:

$$\lambda^2 \cdot (1 + b^2) = 0.3125$$

$$-\lambda^2 \cdot b = 0.125$$

Eliminando  $\lambda^2$  se obtiene la siguiente ecuación cuadrática para  $b$

$$b^2 + 2.5 \cdot b + 1 = 0$$

Cuya única solución dentro del círculo unidad es:  $b = -0.5$ . Con lo que  $\lambda = 0.25$ .

Por otra parte, igualando  $A(z) \cdot A(z^{-1})$  con el denominador de  $2 \cdot \pi \cdot F(z)$

$$(p_1 \cdot p_2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2) - (a_1 \cdot p_2 + a_2 \cdot p_1) \cdot (z + z^{-1}) + a_1 \cdot a_2 \cdot (z^2 + z^{-2}) = 2.25 - 1.5 \cdot (z + z^{-1}) + 0.5 \cdot (z^2 + z^{-2})$$

se obtiene las ecuaciones:

$$p_1 \cdot p_2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 = 2.25$$

$$a_1 \cdot p_2 + a_2 \cdot p_1 = 1.5$$

$$a_1 \cdot a_2 = 0.5$$

Luego

$$a_1 = \frac{0.5}{a_2}$$

$$p_1 = \frac{1.25}{p_2}$$

Por tanto

$$\frac{0.5}{a_2} \cdot p_2 + a_2 \cdot \frac{1.25}{p_2} = 1.5 \Rightarrow 0.5 \cdot p_2 + a_2^2 \cdot \frac{1.25}{p_2} = 1.5 \cdot a_2 \Rightarrow 0.5 \cdot p_2^2 + 1.25 \cdot a_2^2 = 1.5 \cdot a_2 \cdot p_2$$

sustituyendo la variable  $p_2$  de acuerdo a su definición se obtiene la siguiente ecuación:

$$0.5 \cdot (1 + a_2^2)^2 + 1.25 \cdot a_2^2 - 1.5 \cdot a_2 \cdot (1 + a_2^2) = 0 \Rightarrow 0.5 \cdot a_2^4 - 1.5 \cdot a_2^3 + 2.25 \cdot a_2^2 - 1.5 \cdot a_2 + 0.5 = 0$$

Cuyas soluciones dentro del círculo unidad son  $a_2 = 0.5 + j \cdot 0.5$  y  $a_2 = 0.5 - j \cdot 0.5$

Luego  $a_1 = 0.5 - j \cdot 0.5$  y  $a_1 = 0.5 + j \cdot 0.5$

Con lo que finalmente  $H(z)$  es:

$$H(z) = \frac{\lambda \cdot (z - b)}{(z - a_1) \cdot (z - a_2)} = \frac{0.5 \cdot (z - (-0.5))}{(z - (0.5 - j \cdot 0.5)) \cdot (z - (0.5 + j \cdot 0.5))} = \frac{0.5 \cdot z + 0.25}{z^2 - z + 0.5}$$

♦

### 3.5.3.2 Formulación continua

**Teorema 3.6: Factorización espectral.** Dada una densidad espectral racional  $\phi(\omega)$ , existe un sistema lineal de dimensión finita con función de transferencia

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

tal que la salida que se obtiene, cuando la entrada del sistema es ruido blanco, es un proceso estocástico estacionario con densidad espectral  $\phi$ . El polinomio  $A$  tiene todos sus ceros en el semiplano izquierdo del plano  $s$ . El polinomio  $B$  no tiene ceros en el semiplano derecho del plano  $s$ .

### 3.5.4 Cálculo de varianzas

La varianza de una señal obtenida mediante el filtrado de ruido blanco puede ser calculada usando la ecuación recursiva (3.38) si se tiene un modelo en variables de estados del sistema. En esta sección se van obtener algunas fórmulas que permiten calcular la varianza de una señal si se dispone de la función de transferencia del sistema que genera dicha señal.

Considérese una señal generada por

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)} \cdot e(k) \quad (3.55)$$

donde  $e$  es ruido blanco de varianza unidad. De acuerdo con el Teorema 3.5 la densidad espectral de la señal y esta dada por

$$\phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{B(z) \cdot B(z^{-1})}{A(z) \cdot A(z^{-1})}$$

También se sigue de dicho Teorema 3.5 que la varianza de la señal y está dada por la integral compleja

$$E[y^2] = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\omega) \cdot d\omega = \frac{1}{i} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\omega) \cdot e^{-i\omega} d(e^{i\omega}) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \oint \frac{B(z) \cdot B(z^{-1})}{A(z) \cdot A(z^{-1})} \cdot \frac{dz}{z} \quad (3.56)$$

El calculo de las integrales que poseen esta forma está estrechamente ligado al *test de estabilidad de Jury* que se usa para conocer si las raíces de la ecuación característica de un sistema discreto en lazo cerrado se encuentran ubicadas dentro del círculo unidad. Así para evaluar este tipo de integrales hay que construir la Tabla 3.1, considerando la siguiente estructura para los polinomios  $A(z)$  y  $B(z)$ :

$$A(z) = a_0 \cdot z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \dots + a_n$$

$$B(z) = b_0 \cdot z^n + b_1 \cdot z^{n-1} + \dots + b_n$$

$a_0$	$a_1$	...	$a_{n-1}$	$a_n$		$b_0$	$b_1$	...	$b_{n-1}$	$b_n$	
$a_n$	$a_{n-1}$	...	$a_1$	$a_0$	$\alpha_n$	$a_n$	$a_{n-1}$	...	$a_1$	$a_0$	$\beta_n$
$a_0^{n-1}$	$a_1^{n-1}$	...	$a_{n-1}^{n-1}$			$b_0^{n-1}$	$b_1^{n-1}$	...	$b_{n-1}^{n-1}$		
$a_{n-1}^{n-1}$	$a_{n-2}^{n-1}$	...	$a_0^{n-1}$		$\alpha_{n-1}$	$a_{n-1}^{n-1}$	$a_{n-2}^{n-1}$	...	$a_0^{n-1}$		$\beta_{n-1}$
:											
:											
$a_0^1$	$a_1^1$					$b_0^1$	$b_1^1$				
$a_1^1$	$a_0^1$				$\alpha_1$	$a_1^1$	$a_0^1$				$\beta_1$
$a_0^0$					1	$b_0^0$					$\beta_0$

Tabla 3.1: Tabla asociada al test de estabilidad de Jury

En dicha tabla se definen:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{a_n}{a_0} & \beta_n &= \frac{b_n}{a_0} \\ \alpha_k &= \frac{a_k^k}{a_0^k} & \beta_k &= \frac{b_k^k}{a_0^k}\end{aligned}\quad (3.57)$$

Donde

$$\begin{aligned}a_i^{k-1} &= a_i^k - \alpha_k \cdot a_{k-i}^k \\ b_i^{k-1} &= b_i^k - \beta_k \cdot a_{k-i}^k\end{aligned}\quad (3.58)$$

Se puede demostrar que el resultado de la integral (3.56) viene dado por la expresión

$$I_n = \frac{1}{a_0} \cdot \sum_{i=0}^n b_i^i \cdot \beta_i \quad (3.59)$$

En el caso de  $n=1$  y  $n=2$  la expresión (3.59) toma los siguientes valores

$$I_1 = \frac{(b_0^2 + b_1^2) \cdot a_0 - 2 \cdot b_0 \cdot b_1 \cdot a_1}{a_0 \cdot (a_0^2 - a_1^2)} \quad (3.60)$$

$$I_2 = \frac{B_0 \cdot a_0 \cdot e_1 - B_1 \cdot a_0 \cdot a_1 + B_2 \cdot (a_1^2 - a_2 \cdot e_1)}{a_0 \cdot [(a_0^2 - a_2^2) \cdot e_1 - (a_0 \cdot a_1 - a_1 \cdot a_2) \cdot a_1]} \quad (3.61)$$

Donde

$$\begin{aligned}B_0 &= b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 \\ B_1 &= 2 \cdot b_1 \cdot (b_0 + b_2) \\ B_2 &= 2 \cdot b_0 \cdot b_2 \\ e_1 &= a_0 + a_2\end{aligned}\quad (3.62)$$



# TEMA 3

## MODELOS DE PERTURBACIONES

### 3.1 INTRODUCCION

La existencia de perturbaciones en las entradas y/o en las salidas de un sistema, impone limitaciones fundamentales en su comportamiento. Por ejemplo, el ruido de medida en un sistema de seguimiento limita el ancho de banda alcanzable por el sistema en lazo cerrado. Para mejorar el comportamiento de un sistema sometido a perturbaciones se hace imprescindible el uso de sistemas de control. La naturaleza de las perturbaciones determinará la calidad de la regulación de un control aplicado a un cierto proceso. Con el objetivo de poder diseñar los controles más apropiados se hace necesario el disponer de modelos matemáticos de las perturbaciones.

En este tema se estudian en primer lugar los modelos clásicos de las perturbaciones. A continuación, se describen las posibles formas de reducción de los efectos de las perturbaciones. Seguidamente, debido al carácter estocástico o aleatorio de algunas perturbaciones, se incluye un repaso a los conceptos básicos de la teoría de procesos estocásticos. A continuación se describe la formulación tanto discreta como continua de modelos de procesos estocásticos. Finalmente se describe el filtrado de procesos aleatorios de tipo estacionario y la factorización espectral.

El material que se estudia en este tema resulta fundamental para comprender el filtro de Kalman (Tema 4) y las técnicas de control estocástico (Tema 9).

### 3.2 MODELOS CLASICOS DE PERTURBACIONES

#### 3.2.1 Carácter de las perturbaciones

Comúnmente se distinguen tres tipos diferentes de perturbaciones atendiendo a su carácter:

- *Perturbaciones en la carga.* Este tipo de perturbaciones influyen sobre las variables del proceso. En general este tipo de perturbaciones varían lentamente, y pueden ser periódicas. En sistemas mecánicos las perturbaciones en la carga se representan por fuerzas de perturbación, por ejemplo las ráfagas de viento sobre una antena estabilizada, las olas sobre un barco, la carga en un motor. En sistemas térmicos las perturbaciones en la carga podrían ser variaciones en la temperatura del medio ambiente.
- *Errores de medida.* Este tipo de perturbaciones se introducen en los sensores de medida. Pueden existir errores estacionarios en algunos sensores debido a errores de calibración. Sin embargo, los errores de medida típicamente poseen componentes de alta frecuencia. Estos errores pueden poseer una cierta dinámica debido a la dinámica de los sensores. Un ejemplo típico es el termopar, que posee una constante de tiempo de entre 10 y 50 s dependiendo de su encapsulado. Por otra parte, pueden existir complicadas interacciones dinámicas entre los sensores y el proceso. Un ejemplo típico son las medidas de los giróscopos y las medidas del nivel de líquido en los reactores nucleares.

En algunos casos no es posible medir la variable controlada directamente, entonces su valor es inferido a partir de las medidas de otras variables. La relación existente entre estas variables y la variable controlada puede ser bastante compleja. Una situación muy común es que un instrumento dé una rápida indicación con errores bastante grandes y otro instrumento dé una medida muy precisa pero a costa de un alto retardo.

- *Variaciones en los parámetros.* Cuando se consideran sistemas lineales, la perturbación en la carga y el ruido de medida se introducen en el sistema de una forma aditiva. Los sistemas reales son, en la mayoría de los casos, no lineales, esto significa que las perturbaciones se introducirán en el sistema de una forma mucho más complicada. Puesto que los sistemas lineales son obtenidos mediante linealización de modelos no lineales, algunas perturbaciones aparecen entonces como variaciones en los parámetros del modelo lineal.

### **3.2.2 Modelos de perturbaciones simples**

Existen cuatro tipos diferentes de perturbaciones (ver Figura 3.1) atendiendo a su forma que son comúnmente utilizadas en el análisis de los sistemas de control: impulso, escalón, rampa y senoide.

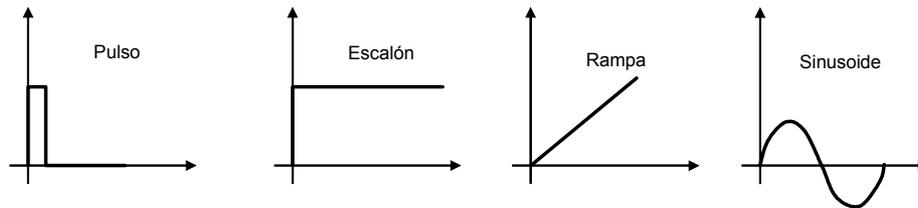


Figura 3.1: Modelos idealizados de perturbaciones simples

- *El impulso y el pulso.* Son realizaciones simples de perturbaciones inesperadas de duración muy corta. Pueden representar tanto a perturbaciones en la carga como a errores de medida. Para sistemas continuos la perturbación es modelada como un impulso; para sistemas discretos se modela como un pulso con amplitud unidad y una duración de un periodo de muestreo.

El pulso y el impulso son también importantes por motivos teóricos ya que la respuesta de un sistema lineal continuo en el tiempo está completamente especificada por su respuesta a un impulso, mientras que la de un sistema discreto está determinada por su respuesta a un pulso.

- *El escalón.* Se usa típicamente para representar una perturbación en la carga o un offset en una medida.
- *La rampa.* Es una señal que se utiliza para representar la deriva en los errores de medida así como a perturbaciones que de repente comienzan a desplazarse. En la práctica estas perturbaciones se encuentran acotadas, sin embargo el uso de una señal rampa suele ser una útil idealización.
- *La senoide.* Es el prototipo de una perturbación periódica. La posibilidad de seleccionar su frecuencia la hace idónea para representar tanto a las perturbaciones en la carga (de baja frecuencia) como al ruido de medida (de alta frecuencia).

Es conveniente visualizar a las perturbaciones como siendo generadas por sistemas dinámicos. El escalón puede ser generado por un integrador, la rampa por un doble integrador y una senoide por un oscilador armónico.

### 3.3 REDUCCION DE LOS EFECTOS DE LAS PERTURBACIONES

Las perturbaciones pueden ser reducidas actuando sobre su fuente, usando realimentación local o usando *feedforward*. Por otra parte técnicas de predicción pueden ser usadas para estimar perturbaciones no medibles.

#### 3.3.1 Reducción en la fuente

La forma más obvia de reducir los efectos de las perturbaciones es intentar actuar sobre la fuente que origina dichas perturbaciones. Esta aproximación está estrechamente ligada a la etapa de diseño del proceso. Algunos ejemplos típicos son:

- En una planta química reducir las variaciones en la composición mediante la introducción de un tanque con una mezcla eficiente.
- Reducir las fuerzas de fricción en un servo usando cojinetes mejores.
- Ubicar un sensor en una posición donde hay perturbaciones más pequeñas.
- Modificar la electrónica del sensor para obtener menos ruido.
- Sustituir un sensor por otro que posea una respuesta más rápida.
- Cambiar el procedimiento de muestreo espaciando las muestras mejor en el tiempo para obtener una representación mejor de las características de los procesos.

#### 3.3.2 Reducción mediante realimentación local

Si las perturbaciones no se pueden atenuar en su fuente, se puede intentar entonces su reducción mediante realimentación local (ver Figura 3.2). Para usar esta aproximación es necesario que las perturbaciones se introduzcan en el sistema en una o varias posiciones bien definidas. También es necesario tener acceso a la variable medida que es resultado de la perturbación. Además es necesario tener acceso a la variable de control que entra al sistema en la vecindad de la perturbación. Las dinámicas que relacionan la variable medida con la variable de control deberían ser tales que se pueda utilizar un lazo de control de ganancia elevada.

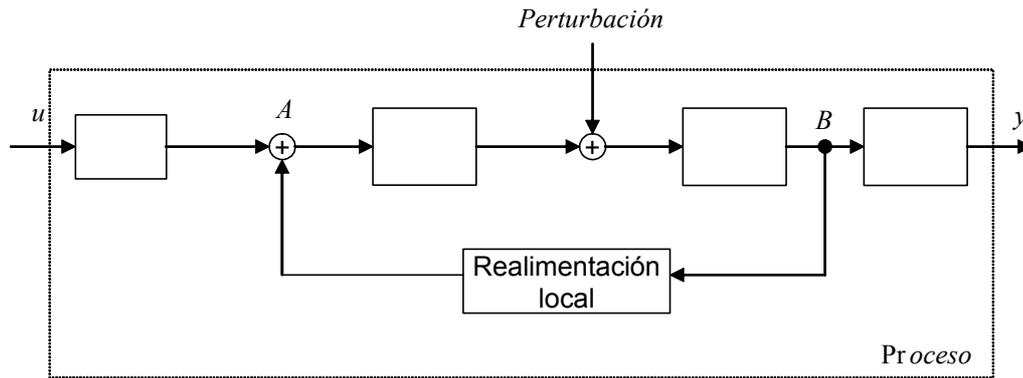


Figura 3.2: Reducción de perturbaciones mediante el uso de realimentación local. La perturbación se introduce en el sistema entre los puntos A y B. Las dinámicas entre estos dos puntos deben ser tales que sea posible usar una alta ganancia en el lazo.

El uso de la realimentación es a menudo fácil y efectivo ya que no es necesario tener información detallada de las características de los procesos, siempre que una alta ganancia pueda ser utilizada en el lazo. En caso contrario, se necesitará un lazo extra de realimentación. Algunos ejemplos de realimentación local son:

- En sistemas hidráulicos, la reducción en las variaciones en el suministro de presión en válvulas, instrumentos y reguladores mediante el uso de un regulador de presión.
- En sistemas térmicos, la reducción de las variaciones en el control de temperatura mediante la estabilización del suministro de voltaje.

### 3.3.3 Reducción mediante feedforward

Las perturbaciones que sean medibles pueden ser reducidas usando una estructura de tipo *feedforward*. El principio genérico de esta estructura se ilustra en la Figura 3.3. Se mide la perturbación y se aplica al sistema una señal de control que intenta contrarrestarla.

Si las funciones de transferencia que relacionan la salida  $y$  a la perturbación  $w$  y al control  $u$  son  $H_w$  y  $H_p$ , respectivamente, entonces la función de transferencia  $H_{ff}$  del compensador feedforward idealmente sería:

$$H_{ff} = -H_p^{-1} \cdot H_w$$

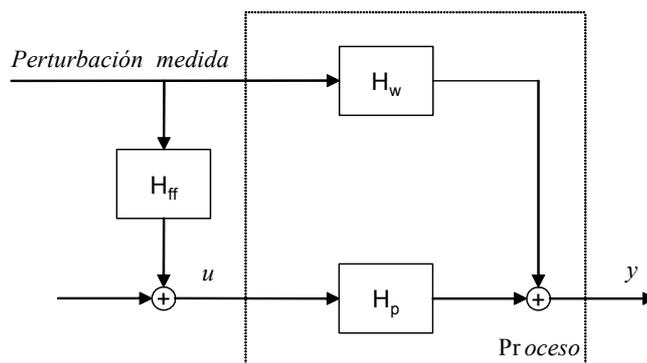


Figura 3.3: Reducción de perturbaciones mediante el uso de una estructura feedforward

Si la función de transferencia  $H_{ff}$  es inestable o no-realizable (mayor número de ceros que de polos) se debe seleccionar alguna aproximación adecuada. El diseño de un compensador feedforward se basa a menudo en un simple modelo estático, es decir,  $H_{ff}$  es una ganancia. La estructura feedforward es especialmente útil para perturbaciones generadas por cambios en la señal de referencia.

### 3.3.4 Reducción mediante predicción

La reducción de perturbaciones mediante predicción es una extensión de la técnica de feedforward que puede utilizarse cuando las perturbaciones no pueden ser medidas. Consiste en predecir la perturbación a partir de la medida de señales. La señal de feedforward se genera a partir de la perturbación predecida.

Es importante observar que no es necesario predecir la propia perturbación en si misma sino que es suficiente con modelar una señal que represente el efecto de la perturbación sobre las variables del proceso más importantes.

## 3.4 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Es natural el usar conceptos estocásticos, es decir, aleatorios, para describir a una amplia variedad de perturbaciones. El usar estos conceptos permite formular de forma más exacta diversos problemas de predicción.

### 3.4.1 Variables aleatorias

Una *variable aleatoria*  $x(k)$  es una variable que puede tomar valores aleatorios en función de los resultados de algún experimento aleatorio. Es decir, los resultados aleatorios de un experimento se pueden representar por un número real  $x(k)$ , llamado variable aleatoria.

Para un experimento aleatorio, los posibles resultados se denominan *espacio de muestra*. Una *variable aleatoria*  $x(k)$  es una función definida para los  $k$  puntos del espacio de muestra, que toma valores reales en el rango  $[-\infty, +\infty]$  asociados a cada uno de los  $k$  puntos que pueden ocurrir.

La forma de especificar la probabilidad con que la variable aleatoria toma diferentes valores es mediante la *función de distribución de probabilidad*  $F(x)$ , definida de la siguiente forma:

$$F(x) = P(x(k) \leq x)$$

Es decir, es la probabilidad de que la variable aleatoria  $x(k)$  tome valores menores o iguales a  $x$ . La función de distribución de probabilidad cumple las siguientes propiedades:

$$F(a) \leq F(b) \text{ si } a \leq b$$

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(\infty) = 1$$

Si la variable aleatoria tiene un rango continuo de valores, entonces se puede definir la *función densidad de probabilidad*  $f(x)$ :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{P[x < x(k) \leq x + \Delta x]}{\Delta x} \right]$$

Se verifica que:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

La probabilidad de que  $x(k)$  tome un valor entre  $x$  y  $x+dx$  es  $f(x) \cdot dx$ .

En el caso de que  $x(k)$  tome valores discretos  $x_i$  con probabilidades  $p_i$  distintas de cero, entonces la función  $f(x)$  se puede expresar como una serie de funciones de Dirac  $\delta$  por las probabilidades correspondientes:

$$f(x) = \sum_i p_i \cdot \delta(x - x_i)$$

El *valor medio* de una variable aleatoria escalar  $x(k)$ , también denominado *valor esperado* o *primer momento* se define como:

$$E[x(k)] = \mu_x = m(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3.1)$$

El *valor cuadrático medio* o *segundo momento* de  $x(k)$  se obtiene mediante la expresión

$$E[x^2(k)] = \Psi_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \quad (3.2)$$

Si  $x$  no es un escalar entonces

$$E[x(k) \cdot x^T(k)] = \Psi_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x(k) \cdot x^T(k) f(x) dx$$

Un parámetro que se utiliza en lugar del valor cuadrático medio es la raíz cuadrada positiva del mismo, conocido por su terminología anglosajona como *rms* de “*root-mean squared*”.

La *varianza* de la variable aleatoria  $x(k)$  se define como

$$E[(x(k) - \mu_x)^2] = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx = \Psi_x^2 - \mu_x^2 \quad (3.3)$$

Si  $x$  no es un escalar:

$$E[(x(k) - \mu_x) \cdot (x(k) - \mu_x)^T] = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x(k) - \mu_x) \cdot (x(k) - \mu_x)^T f(x) dx = \Psi_x^2 - \mu_x^2$$

La raíz cuadrada de la varianza,  $\sigma_x$ , es por definición la *desviación estándar* de la variable aleatoria. Si el valor medio es nulo, entonces la desviación estándar coincide con el valor *rms*.

◆ **Ejemplo 3.1: Distribución Gaussiana o Normal**

Una variable aleatoria  $x(k)$  tiene una *distribución gaussiana o normal* si su función densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Se puede ver fácilmente que  $a$  y  $b$  se corresponden con el valor medio y la desviación estándar de la variable aleatoria  $x(k)$

$$\mu_x = E[x(k)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = a$$

$$\sigma_x^2 = E[(x(k) - a)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 f(x)dx = b^2$$

La función de distribución de probabilidad normal es por definición:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma_x^2}} dz$$

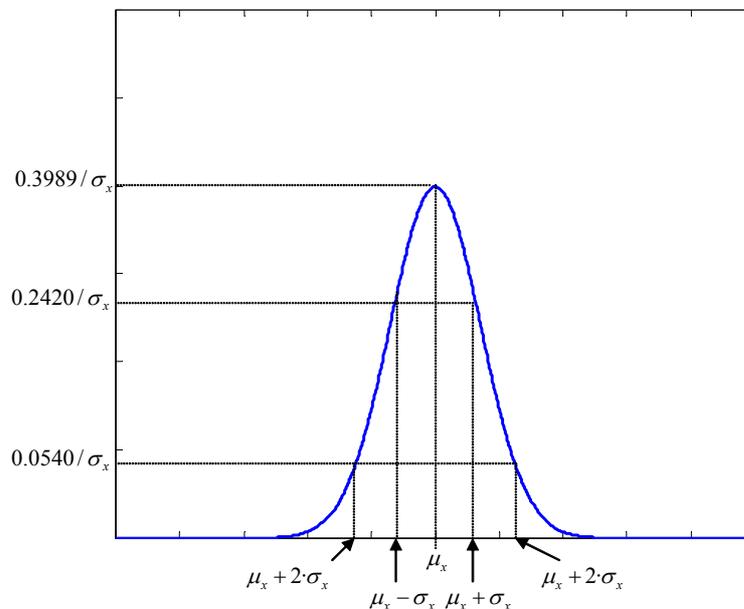


Figura 3.4: Función densidad de probabilidad normal o gaussiana

◆

La consideración simultánea de más de una variable aleatoria es a menudo necesaria y útil. En el caso de tener dos variables aleatorias  $x(k)$  e  $y(k)$ , la probabilidad de que se den pares de valores en un determinado rango de valores está dada por la función de *distribución de probabilidad conjunta*  $F_2(x, y)$ .

$$F_2(x, y) = P[x(k) \leq x \& y(k) \leq y]$$

La correspondiente *función de densidad de probabilidad* se define como:

$$f_2(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left[ \frac{P[x < x(k) \leq x + \Delta x] \& P[y < y(k) \leq y + \Delta y]}{\Delta x \Delta y} \right]$$

Que verifica las siguientes propiedades:

$$f_2(x, y) \geq 0$$

$$f_2(x, y) = \frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, y) dx dy = 1$$

Sean  $f_x$  y  $f_y$  las funciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias  $x(k)$  e  $y(k)$ , si se verifica que

$$f_2(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

entonces las dos variables son *estadísticamente independientes*. Es decir, el suceso  $x(k) \leq x$  es independiente del suceso  $y(k) \leq y$ .

El *valor medio* de una función continua real  $g(x, y)$  de dos variables aleatorias  $x(k)$  e  $y(k)$  es:

$$E[g(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_2(x, y) dx dy$$

La *covarianza*  $r_{xy}$  entre  $x(k)$  e  $y(k)$  se define como:

$$r_{xy} = E[(x(k) - \mu_x)(y(k) - \mu_y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f_2(x, y) dx dy \quad (3.4)$$

Que se puede expresar de forma equivalente como:

$$E[(x(k) - \mu_x)(y(k) - \mu_y)] = E[x(k)y(k) - \mu_x y(k) - x(k)\mu_y + \mu_x \mu_y] = E[x(k)y(k)] - E[x(k)]E[y(k)]$$

La covarianza normalizada por las desviaciones estándar de  $x(k)$  e  $y(k)$  se denomina *coeficiente de correlación*:

$$\rho_{xy} = \frac{r_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (3.5)$$

Se verifica que

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

El *coeficiente de correlación* proporciona una medida del grado de dependencia lineal entre las variables aleatorias  $x(k)$  e  $y(k)$ . Así si  $x(k)$  e  $y(k)$  son *independientes entre sí* entonces  $\rho_{xy}=0$ , y se dice que las variables aleatorias  $x(k)$  e  $y(k)$  *no están correlacionadas* (la afirmación contraria no es cierta).

### 3.4.2 Procesos estocásticos

Un *proceso aleatorio* o *estocástico* (señal aleatoria) se puede considerar como un conjunto de funciones temporales (ver Figura 3.5), cada una de las cuales se puede observar en el ensayo de un experimento. El conjunto puede incluir un número finito, un número infinito contable o un número infinito incontable de tales funciones. Al conjunto de tales funciones se les representa por:

$$\{x(t), t \in T\} \equiv x(t, \omega)$$

Usualmente se supone que  $t$  es el tiempo y  $T \in \mathfrak{R}$ . Si se considera sistemas discretos entonces  $T$  es el conjunto de instantes de muestreo  $T=\{0, h, 2 \cdot h, \dots\}$  siendo  $h$  el periodo de muestreo. Para un  $\omega$  fijo,  $\omega=\omega_0$ , se tiene que  $x(t, \omega_0)$  es una función del tiempo que se denomina *realización*. Mientras que para un instante de tiempo fijo,  $t= t_0$ , se tiene que  $x(t_0, \omega)=x(t_0)$  es una *variable aleatoria*.

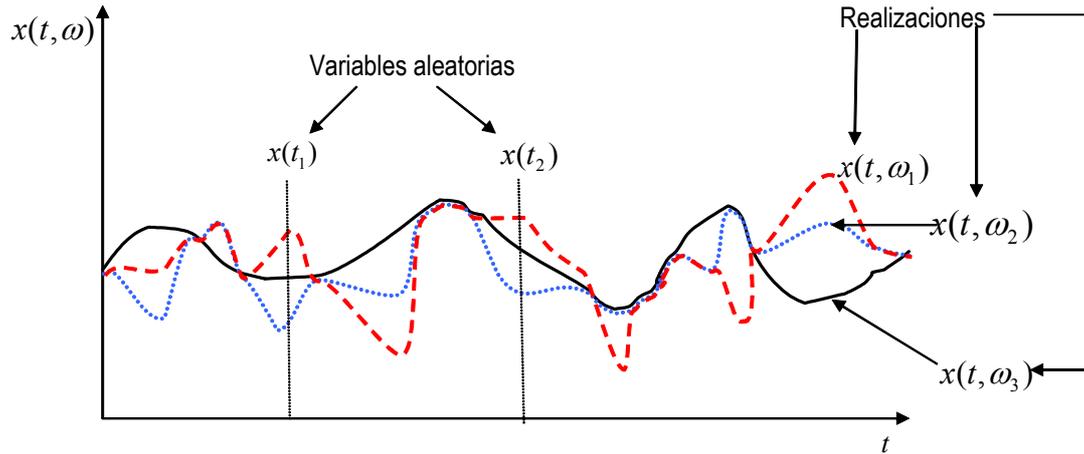


Figura 3.5: Tres realizaciones  $x(t, \omega_1)$ ,  $x(t, \omega_2)$  y  $x(t, \omega_3)$  de un mismo proceso estocástico  $x(t, \omega)$ . Se detallan las variables aleatorias  $x(t_1)$  y  $x(t_2)$  que se obtienen cuando se fija el tiempo a  $t=t_1$  y  $t=t_2$

La probabilidad de que  $x(t_1)$  tome valores en un cierto rango está dada por la *función de distribución de probabilidad*, como para cualquier variable aleatoria.

$$F(x_1, t_1) = P[x(t_1) \leq x_1]$$

La correspondiente *función de densidad de probabilidad* es:

$$f(x_1, t_1) = \frac{dF(x_1, t_1)}{dx_1}$$

El valor medio de  $x(t_1)$  es:

$$m(t_1) = E[x(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1, t_1) dx_1 \quad (3.6)$$

Se observa que el valor medio es función del instante de tiempo  $t_1$ .

La probabilidad de obtener un determinado par de valores en un cierto rango está dada por la *función de distribución conjunta de segundo orden*:

$$F(x_1, t_1; x_2, t_2) = P[x(t_1) \leq x_1 \& x(t_2) \leq x_2]$$

La correspondiente *función de densidad de probabilidad conjunta* es:

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

La *función de covarianza o autocovarianza* de un proceso se denota por como:

$$r_{xx}(t_1, t_2) \equiv \text{cov}(x(t_1), x(t_2))$$

Y se define como:

$$r_{xx}(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - E[x(t_1)])(x(t_2) - E[x(t_2)])^T] = E[(x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2))^T] \quad (3.7)$$

La covarianza se pueda expresar de forma equivalente mediante la expresión:

$$r_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 (x_1 - m(t_1))(x_2 - m(t_2))^T f_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$$

La *función de covarianza cruzada* se define como:

$$r_{xy}(t_1, t_2) = \text{cov}(x(t_1), y(t_2)) \quad (3.8)$$

Obsérvese que si  $t_1=t_2$  entonces se obtiene la varianza.

Un *proceso aleatorio estacionario* es aquel cuya estadística es invariante en el tiempo. Esto implica que la función densidad de probabilidad para el proceso  $f(x_1, t_1)$  es independiente del tiempo de observación. Todos los momentos de esta distribución, tales como  $m(t_1)=E[x(t_1)]$  y  $m(t_2)=E[x(t_2)]$  son también independientes del tiempo, es decir, son *constantes*. En este caso la función de densidad de probabilidad de segundo orden no depende del tiempo absoluto de observación  $t_1$  y  $t_2$ , sino de la diferencia entre ellos

$$\tau = t_2 - t_1$$

Por lo tanto, las *funciones de covarianza* para procesos estacionarios toman la forma:

$$r_{xx}(\tau) = \text{cov}(x(t_1), x(t_1 + \tau)) \quad (3.9)$$

$$r_{xy}(\tau) = \text{cov}(x(t_1), y(t_1 + \tau)) \quad (3.10)$$

Cuando  $x$  es un escalar a  $r_{xx}(\tau) \equiv r_x(\tau)$  se le denomina *función de autocovarianza*.

Una propiedad importante es que si un proceso es estacionario al evaluar la *función de covarianza* en  $\tau=0$  se obtiene la *varianza del proceso*, es decir,

$$r_{xx}(0) = r_x(0) = \sigma_x^2 \quad (3.11)$$

La *función de correlación*, se define como:

$$\rho_x(\tau) = \frac{r_x(\tau)}{r_x(0)} \quad (3.12)$$

De la desigualdad de Schwartz se cumple que:

$$|r_x(\tau)| \leq r_x(0)$$

Luego:

$$|\rho_x(\tau)| \leq 1 \quad (3.13)$$

El valor  $\rho_x(\tau)$  da la correlación entre los valores del proceso espaciados temporalmente un valor  $\tau$ . Valores cercanos a la unidad indican la existencia de una fuerte correlación. El valor cero indica que no existe correlación. Valores negativos indican la existencia de una correlación negativa.

La *función de densidad espectral de potencia* (o espectro de la densidad de potencia) del proceso aleatorio discreto  $\{x(t)\}$  se define como la transformada de Fourier de la función de covarianza:

$$\Phi_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}(k) e^{-ik\omega} \quad (3.14)$$

La *Función de densidad espectral de potencia cruzada* de los procesos aleatorios discretos  $\{x(t)\}$  e  $\{y(t)\}$  se define como la transformada de Fourier de la función de covarianza cruzada:

$$\Phi_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xy}(k) e^{-ik\omega} \quad (3.15)$$

En el caso de considerar procesos aleatorios continuos se tiene:

$$\Phi_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(t) e^{-it\omega} dt \quad (3.16)$$

$$\Phi_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(t) e^{-it\omega} dt \quad (3.17)$$

Tomando la transformada inversa se tendría, en procesos estocásticos discretos

$$r_{xx}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega} \Phi_{xx}(\omega) d\omega \quad (3.18)$$

$$r_{xy}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega} \Phi_{xy}(\omega) d\omega \quad (3.19)$$

Y en procesos estocásticos continuos:

$$r_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \Phi_{xx}(\omega) d\omega \quad (3.20)$$

$$r_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \Phi_{xy}(\omega) d\omega \quad (3.21)$$

Las relaciones que se acaban de definir permiten pasar del dominio temporal al frecuencial y viceversa en el análisis de los procesos aleatorios estacionarios.

La *potencia de una señal o proceso aleatorio* en el rango de frecuencias  $[\omega_1, \omega_2]$  se calcula como:

$$2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \Phi_{xx}(\omega) d\omega \quad (3.22)$$

### 3.4.3 Ruido blanco

Una forma particularmente simple del espectro de la densidad de potencia es una constante, por ejemplo

$$\Phi(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad (3.23)$$

Esto implica que la densidad espectral es constante para todas las frecuencias. Por analogía con la situación correspondiente para la luz blanca, a tal proceso aleatorio, generalmente un ruido, se le denomina *ruido blanco*.

Aplicando la relación (3.20) es posible calcular la función de covarianza para el ruido blanco:

$$r_{xx}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \cdot \sigma^2 \cdot d\omega = \sigma^2 \cdot \delta(\tau) \quad (3.24)$$

Donde  $\delta$  es la función delta de Dirac:

$$\delta(\tau) = \begin{cases} \infty & \text{si } \tau = 0 \\ 0 & \text{si } \tau \neq 0 \end{cases}$$

En conclusión se observa que este proceso no es físicamente realizable. En realidad, el ruido blanco es un concepto idealizado, muy útil, como aproximación a situaciones en los que el ancho de banda del ruido de perturbaciones es mayor que el ancho de banda del sistema.

Si se considera tiempo discreto dicho proceso se caracteriza por poseer la siguiente función de covarianza

$$r_{xx}(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 & \tau = 0 \\ 0 & \tau = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (3.25)$$

El ruido blanco juega un papel importante en la teoría de control estocástica. Todos los procesos aleatorios que se puedan necesitar pueden ser generados mediante la implementación de un filtro adecuado al que se le aplique en su entrada ruido blanco.

### 3.4.4 Procesos estocásticos gaussianos y markovianos

Un proceso aleatorio  $\{x(k)\}$  es un *proceso aleatorio gaussiano* si las variables aleatorias  $x_k(t_k)$  asociadas al mismo siguen una distribución normal gaussiana multidimensional para cualquier instante de tiempo.

Los procesos aleatorios gaussianos están bastante extendidos en problemas físicos y muchas veces pueden ser pronosticados matemáticamente mediante el teorema del límite central. También se puede demostrar que si un proceso gaussiano sufre una transformación

lineal, el resultado de la transformación también es un proceso gaussiano; esta propiedad es muy importante en muchas aplicaciones teóricas y prácticas de la teoría de procesos aleatorios.

La función de densidad de un proceso gaussiano está dada por:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (3.26)$$

La distribución conjunta de  $x(t_1)$  y  $x(t_2)$  es la distribución normal bivariable; distribuciones conjuntas de orden superior están dadas por la distribución normal multivariable. Si  $x(t)$  es un vector gaussiano  $n$ -dimensional entonces la distribución de  $x(t)$  es la distribución normal dada por:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot |P|^{1/2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot (x - \mu)^T \cdot P^{-1} \cdot (x - \mu)\right] \quad (3.27)$$

En la expresión anterior  $x$  es un vector  $n$ -dimensional constituido por las  $n$  variables aleatorias:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Y  $\mu$  y  $P$  son la media y la covarianza de  $x$ :

$$\mu = E[x] = (E(x_1), \dots, E(x_n))^T \quad (3.28)$$

$$P = E[(x - \mu) \cdot (x - \mu)^T] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Con

$$\begin{aligned} P_{ij} &= E[(x_i(k) - \mu_i) \cdot (x_j(k) - \mu_j)] \\ P_{ii} &= \sigma_i^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Todas las propiedades estadísticas de un proceso aleatorio gaussiano están definidas por el primer y segundo momento de la distribución. De acuerdo con esto, se suele usar la siguiente notación abreviada para designar a este tipo de procesos:

$$x \equiv N(\mu, P)$$

Otra clase de procesos aleatorios útiles, que se pueden generar haciendo pasar ruido blanco a través de un determinado filtro, es la familia de los procesos markovianos.

Un proceso continuo  $x(t)$  se dice que es un *proceso de markov de primer orden* si para todo  $k$  y  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$  se verifica que

$$F[x(t_k) | x(t_{k-1}), \dots, x(t_1)] = F[x(t_k) | x(t_{k-1})]$$

Es decir, la distribución de probabilidad del proceso  $x(t_k)$  depende solamente del valor del punto inmediatamente anterior  $x(t_{k-1})$ . Los procesos de Markov de primer orden se pueden asociar con la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} + \beta_1(t) \cdot x = w \quad (3.31)$$

Donde  $w$  es ruido blanco.

Para procesos de Markov de primer orden discretos, la relación correspondiente es una ecuación en diferencias de primer orden.

Si la función densidad de probabilidad de  $w$  es gaussiana entonces  $x$  es también gaussiano y al proceso  $x(t)$  se le denomina de Gauss-Markov, que posee la siguiente función de autocorrelación:

$$\varphi_{xx}(\tau) = E[x(t) \cdot x(t + \tau)] = \sigma^2 \cdot e^{-\beta_1 |\tau|} + \mu^2 \quad (3.32)$$

Al valor  $1/\beta_1$  se le denomina *tiempo de correlación*. La densidad espectral del ruido blanco  $w$  que genera el proceso descrito por (3.32) está dada en términos de la varianza de  $x$  como  $2 \cdot \beta_1 \cdot \sigma^2$ . Las autocorrelaciones de muchos fenómenos físicos se describen muy bien mediante la ecuación (3.32), pudiéndose modelar con la ecuación diferencial (3.31).

Un proceso continuo  $x(t)$  se dice que es un *proceso de markov de segundo orden* si para todo  $k$  y  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$  se verifica que

$$F[x(t_k) | x(t_{k-1}), \dots, x(t_1)] = F[x(t_k) | x(t_{k-1}), x(t_{k-2})]$$

Es decir, la distribución de probabilidad del proceso  $x(t_k)$  depende de sólo dos puntos inmediatamente anteriores. La ecuación diferencial asociada a este proceso es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta_2(t)\frac{dx}{dt} + \beta_2^2(t) = w \quad (3.33)$$

Si la función densidad de probabilidad de  $w$  es gaussiana entonces  $x(t)$  es un proceso gaussiano de segundo orden. Si  $x(t)$  tiene media  $\mu_x$  y es estacionario, su función autocorrelación tiene la forma:

$$\varphi_{xx}(\tau) = E[x(t) \cdot x(t + \tau)] = \sigma^2 \cdot (1 + \beta_2 \cdot |\tau|) e^{-\beta_2 \cdot |\tau|} + \mu_x^2 \quad (3.34)$$

El *tiempo de correlación* de este proceso es aproximadamente  $2.146/\beta_2$ ; la densidad espectral del ruido blanco  $w$  es  $4 \cdot \beta_2^3 \cdot \sigma^2 \cdot \delta(\tau)$ .

## 3.5 MODELOS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS

### 3.5.1 Modelos en el espacio de estados

#### 3.5.1.1 Formulación discreta

Considérese un sistema en tiempo discreto donde el periodo de muestreo se ha tomado igual a la unidad. Sea  $x(k)$  el estado en el instante  $k$ . La distribución de probabilidad del estado en el instante de tiempo  $k+1$  será entonces una función de  $x(k)$ . Si el valor medio es lineal en  $x(k)$  y la distribución alrededor de la media es independiente de  $x(k)$ , entonces  $x(k+1)$  se puede representar mediante una *ecuación en diferencias lineal estocástica*:

$$x(k+1) = F \cdot x(k) + v(k) \quad (3.35)$$

donde  $v(k)$  es una variable aleatoria de media cero que es independiente de  $x(k)$  y de todos los valores pasado de  $x$ . Esto implica que  $v(k)$  también es independiente de todos los valores pasados de  $v$ . La secuencia  $\{v(k), k=0,1,\dots\}$  es una secuencia de variables aleatorias independientes igualmente distribuidas. Por lo tanto el proceso estocástico  $\{v(k)\}$  es ruido blanco en tiempo discreto.

Para definir al proceso aleatorio  $\{x(k)\}$  completamente, es necesario especificar las condiciones iniciales. Se supone que el estado inicial tiene valor medio  $m_0$  y matriz de covarianza  $R_0$ . Asimismo la covarianza de las variables aleatorias  $v$  se denota mediante  $R_1$ .

**Teorema 3.1:** Considérese un proceso aleatorio definido por la ecuación en diferencias estocástica (3.35), donde  $\{v(k)\}$  es un proceso de ruido blanco con valor medio cero y covarianza  $R_1$ . Considérese que el estado inicial tiene valor medio  $m_0$  y covarianza  $R_0$ . La función del valor medio del proceso está por la siguiente ecuación en diferencias:

$$m(k+1) = F \cdot m(k), \quad m(0) = m_0 \quad (3.36)$$

y la función de covarianza por:

$$r(k+\tau, k) = F^\tau \cdot P(k), \quad \tau \geq 0 \quad (3.37)$$

donde  $P(k) = \text{cov}[x(k), x(k)]$  viene dada por:

$$P(k+1) = F \cdot P(k) \cdot F^T + R_1 \quad P(0) = R_0 \quad (3.38)$$

◆ **Demostración Teorema 3.1:**

Para obtener la función valor medio

$$m(k) = E[x(k)]$$

simplemente hay que tomar el valor medio en ambos lados de la ecuación (3.35)

$$E[x(k+1)] = E[F \cdot x(k) + v(k)] \rightarrow m(k+1) = F \cdot m(k) + E[v(k)]$$

Como  $E[v(k)] = 0$  entonces se obtiene

$$m(k+1) = F \cdot m(k)$$

Luego el valor medio se propagará de la misma forma que un sistema no perturbado.

Para calcular la función de covarianza, se considera la siguiente variable

$$\tilde{x} = x - m$$

de tal forma que:

$$P(k) = \text{cov}[x(k), x(k)] = E[\tilde{x}(k) \cdot \tilde{x}^T(k)]$$

Esta  $\tilde{x}$  satisface la ecuación (3.35) si la condición inicial tiene media cero. Para calcular la covarianza hay que formar la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) \cdot \tilde{x}^T(k+1) &= [F \cdot \tilde{x}(k) + v(k)] \cdot [F \cdot \tilde{x}(k) + v(k)]^T \\ &= F \cdot \tilde{x}(k) \cdot \tilde{x}^T(k) \cdot F^T + F \cdot \tilde{x}(k) \cdot v^T(k) + v(k) \cdot \tilde{x}^T(k) \cdot F^T + v(k) \cdot v^T(k) \end{aligned}$$

Tomando valores medios

$$E[\tilde{x}(k+1) \cdot \tilde{x}^T(k+1)] = F \cdot E[\tilde{x}(k) \cdot \tilde{x}^T(k)] \cdot F^T + F \cdot E[\tilde{x}(k) \cdot v^T(k)] + E[v(k) \cdot \tilde{x}^T(k)] \cdot F^T + E[v(k) \cdot v^T(k)]$$

Se obtiene

$$P(k+1) = F \cdot P(k) \cdot F^T + R_1$$

Esta ecuación recursiva para  $P$  indica como se propaga la covarianza.

Para calcular la función de covarianza del estado, hay que darse cuenta que:

$$\tilde{x}(k+1) \cdot \tilde{x}^T(k) = [F \cdot \tilde{x}(k) + v(k)] \cdot \tilde{x}^T(k)$$

Puesto que  $v(k)$  y  $\tilde{x}(k)$  son independientes y  $v(k)$  tiene media cero, entonces:

$$\begin{aligned} r_{xx}(k+1, k) &= \text{cov}[x(k+1), x(k)] = E[(x(k+1) - m(k+1)) \cdot (x(k) - m(k))^T] \\ &= E[\tilde{x}(k+1) \cdot \tilde{x}^T(k)] = E[[F \cdot \tilde{x}(k) + v(k)] \cdot \tilde{x}^T(k)] \\ &= E[F \cdot \tilde{x}(k) \cdot \tilde{x}^T(k) + v(k) \cdot \tilde{x}^T(k)] = F \cdot E[\tilde{x}(k) \cdot \tilde{x}^T(k)] + E[v(k) \cdot \tilde{x}^T(k)] \\ &= F \cdot P(k) \end{aligned}$$

Para obtener la expresión

$$r_{xx}(k+\tau, k) = F^\tau \cdot P(k)$$

se debe operar de forma similar al caso  $r_{xx}(k+1, k)$  pero considerando que ahora

$$\tilde{x}(k+\tau) \cdot \tilde{x}^T(k) = [F^\tau \cdot \tilde{x}(k) + \sum_{j=0}^{\tau-1} F^{\tau-1-j} \cdot v(k+j)] \cdot \tilde{x}^T(k)$$

◆

Los términos de (3.38) pueden interpretarse físicamente. La covarianza  $P$  representa la incertidumbre en el estado, el término  $F \cdot P(k) \cdot F^T$  indica la incertidumbre en el instante  $k$  que se propaga debido a la dinámica del sistema, y el término  $R_1$  describe el incremento en la incertidumbre debido a la perturbación  $v$ .

Por otra parte, si el sistema tiene una salida

$$y = C \cdot x$$

puede demostrarse fácilmente que su función valor medio es

$$m_y = C \cdot m$$

y que su función de covarianza es

$$r_{yy} = C \cdot r_{xx} \cdot C^T$$

Asimismo la función de covarianza cruzada entre  $y$  e  $x$  está dada por:

$$r_{yx} = C \cdot r_{xx}$$

◆ **Ejemplo 3.2:**

Considérese el siguiente sistema de primer orden

$$x(k+1) = a \cdot x(k) + v(k)$$

donde  $v$  es una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas con valores medios nulos y covarianzas  $r_1$ . Supóngase que en el instante  $k_0$  el estado tiene un valor medio  $m_0$  y covarianza  $r_0$ . Para obtener el valor medio del estado  $x(k)$  hay que resolver la ecuación en diferencias (3.36):

$$m(k+1) = a \cdot m(k), \quad m(k_0) = m_0$$

La solución a esta ecuación en diferencias es:

$$m(k) = a^{k-k_0} \cdot m_0$$

Por otra parte la aplicación de la ecuación (3.38) da

$$P(k+1) = a^2 \cdot P(k) + r_1 \quad P(k_0) = r_0$$

Resolviendo esta ecuación en diferencias se obtiene:

$$P(k) = a^{2 \cdot (k-k_0)} \cdot r_0 + \frac{1 - a^{2 \cdot (k-k_0)}}{1 - a^2} \cdot r_1$$

Por otra parte, de acuerdo con 3.37

$$r_x(l, k) = a^{l-k} \cdot P(k) \quad l \geq k$$

$$r_x(l, k) = a^{k-l} \cdot P(l) \quad l < k$$

Si  $|a| < 1$  y  $k_0 \rightarrow -\infty$ , entonces:

$$m(k) \rightarrow 0$$

$$P(k) \rightarrow \frac{r_1}{1 - a^2}$$

$$r_x(k + \tau, k) \rightarrow \frac{r_1 \cdot a^{|\tau|}}{1 - a^2}$$

Se observa que en ese caso el proceso pasa a ser estacionario ya que  $m$  es una constante y la función de covarianza es únicamente función de  $\tau$ .

Si se considera la siguiente salida

$$y(k) = x(k) + e(k)$$

donde  $e(k)$  es una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas con media cero y covarianza  $r_2$ , entonces la función de covarianza de  $y$  es

$$r_y(\tau) = \begin{cases} r_2 + \frac{r_1}{1 - a^2} & \tau = 0 \\ \frac{r_1 \cdot a^{|\tau|}}{1 - a^2} & \tau \neq 0 \end{cases}$$

La densidad espectral de la salida se obtiene de la expresión (3.14):

$$\phi_y(\omega) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left[ r_2 + \frac{r_1}{(e^{i\omega} - a) \cdot (e^{-i\omega} - a)} \right] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left[ r_2 + \frac{r_1}{1 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \cos \omega} \right]$$

◆

### 3.5.1.2 Formulación continua

Modelos en el espacio de estados para procesos en tiempo continuo estocásticos se pueden obtener mediante una generalización formal de la ecuación (3.35):

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + \dot{v}$$

donde  $\dot{v}$  es un vector cuyos elementos son procesos estocásticos de ruido blanco. Puesto que  $\dot{v}$  tiene una varianza infinita, se acostumbra a escribir la ecuación en término de diferenciales, es decir:

$$dx = A \cdot x \cdot dt + dv \quad (3.39)$$

La señal  $v$  es la integral de  $\dot{v}$ , se supone que tiene valor medio cero, incrementos no correlacionados entre si, ni con  $x$ , y varianza

$$\text{cov}[v(t), v(t)] = R_1 \cdot t \quad (3.40)$$

A la ecuación (3.39) se le denomina *ecuación diferencial estocástica lineal*. Para especificarla completamente es necesario dar la distribución de probabilidad inicial de  $x$  en el instante inicial.

**Teorema 3.2:** Considérese un proceso estocástico definido por la ecuación diferencial estocástica lineal (3.39) donde el proceso  $v$  tiene media cero y covarianza incremental  $R_1 \cdot dt$ . Supóngase que el estado inicial tiene media  $m_0$  y covarianza  $R_0$ . El valor medio del proceso  $x$  viene dado por la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dm(t)}{dt} = A \cdot m(t), \quad m(0) = m_0 \quad (3.41)$$

La covarianza es

$$\text{cov}[x(s), x(t)] = e^{A(s-t)} \cdot P(t), \quad s \geq t \quad (3.42)$$

donde  $P(t) = \text{cov}[x(t), x(t)]$  es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dP(t)}{dt} = A \cdot P(t) + P(t) \cdot A^T + R_1 \quad P(0) = R_0 \quad (3.43)$$

◆ **Demostración Teorema 3.2:**

La ecuación (3.41) se obtiene tomando el valor medio de (3.39)

$$E[dx] = E[A \cdot x \cdot dt] + E[dv]$$

Considerando que los valores constantes se pueden sacar del operador valor medio  $E$  y que además éste conmuta con respecto al diferencial:

$$dE[x] = AE[x]dt + dE[v]$$

Que es equivalente a

$$dm(t) = A \cdot m(t) \cdot dt$$

Y dividiendo por  $dt$  se obtiene (3.41).

Para obtener la ecuación diferencial (3.43), hay que considerar que

$$d(x \cdot x^T) = (x + dx) \cdot (x + dx)^T - x \cdot x^T = x \cdot dx^T + dx \cdot x^T + dx \cdot dx^T$$

Sustituyendo en la expresión anterior la ecuación (3.39) se obtiene:

$$d(x \cdot x^T) = x \cdot [A \cdot x \cdot dt + dv]^T + [A \cdot x \cdot dt + dv] \cdot x^T + [A \cdot x \cdot dt + dv] \cdot [A \cdot x \cdot dt + dv]^T$$

Desarrollando la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} d(x \cdot x^T) = & x \cdot x^T \cdot A^T \cdot dt + x \cdot dv^T + A \cdot x \cdot x^T \cdot dt + dv \cdot x^T + A \cdot x \cdot (dt)^2 \cdot x^T \cdot A^T + \\ & + dv \cdot dt \cdot x^T \cdot A^T + A \cdot x \cdot dt \cdot dv^T + dv \cdot dv^T \end{aligned}$$

Si se toma el valor medio, puesto que  $v$  es independiente de  $x$  se obtiene:

$$d(E[x \cdot x^T]) = E[x \cdot x^T] A^T \cdot dt + A \cdot E[x \cdot x^T] \cdot dt + A \cdot E[x \cdot x^T] A^T (dt)^2 + E[dv \cdot dv^T]$$

Como por definición

$$P(t) = E[x \cdot x^T]$$

y de (3.40)

$$E[dv \cdot dv^T] = R_1 \cdot dt$$

Entonces

$$dP(t) = P(t) \cdot A^T \cdot dt + A \cdot P(t) \cdot dt + A \cdot P(t) \cdot A^T (dt)^2 + R_1 \cdot dt$$

Dividiendo por  $dt$

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \cdot A^T + A \cdot P(t) + R_1 + A \cdot P(t) \cdot A^T (dt)$$

y tomando el límite cuando  $dt$  tiende a 0 se obtiene (3.43).

Finalmente para obtener (6.42), se considera  $s \geq t$  y se integra la ecuación (3.39) se obtiene

$$x(s) = e^{A(s-t)} \cdot x(t) + \int_t^s e^{A(s-s')} \cdot dv(s')$$

Si se multiplica por la derecha con  $x^T(t)$  a ambos miembros se obtiene:

$$x(s) \cdot x^T(t) = e^{A(s-t)} \cdot x(t) \cdot x^T(t) + \left[ \int_t^s e^{A(s-s')} \cdot dv(s') \right] \cdot x^T(t)$$

Si se aplica el operador valor medio, considerando que  $dv(s')$  no está correlacionado con  $x(t)$  si  $s' \geq t$ , entonces se obtiene (3.42).

◆

◆ **Ejemplo 3.3:**

Considérese la siguiente ecuación diferencial estocástica escalar

$$\begin{aligned} dx &= -a \cdot x \cdot dt + dv \\ x(t_0) &= m_0 \\ \text{cov}[x(t_0), x(t_0)] &= r_0 \end{aligned}$$

donde el proceso  $\{v(t), t \in T\}$  posee una covarianza incremental  $r_1 \cdot dt$ . La ecuación diferencial que da la expresión de la media es

$$\frac{dm}{dt} = -a \cdot m \quad m(t_0) = m_0$$

La solución de esta ecuación es:

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-a(t-t_0)}$$

La función covarianza viene dada por

$$r(s, t) = \text{cov}[x(s), x(t)] = \begin{cases} e^{-a(s-t)} \cdot P(t) & s \geq t \\ e^{-a(t-s)} \cdot P(t) & s \leq t \end{cases}$$

La ecuación (3.43) da la siguiente ecuación diferencial para  $P$ .

$$\frac{dP}{dt} = -2 \cdot a \cdot P + r_1 \quad P(t_0) = r_0$$

Cuya solución es:

$$P(t) = e^{-2 \cdot a(t-t_0)} \cdot r_0 + \int_{t_0}^t e^{-2 \cdot a(t-s)} \cdot r_1 \cdot ds = e^{-2 \cdot a(t-t_0)} \cdot r_0 + \frac{r_1}{2 \cdot a} \cdot [1 - e^{-2 \cdot a(t-t_0)}]$$

Cuando  $t_0 \rightarrow -\infty$ , la función valor medio tiende a cero y la función covarianza tiende a

$$r(s, t) = \frac{r_1}{2 \cdot a} \cdot e^{-a(t-s)}$$

Puesto que esta función depende de la diferencia  $s-t$ , el proceso sería estacionario y su función de covarianza se puede escribir como:

$$r(\tau) = \frac{r_1}{2 \cdot a} \cdot e^{-a|\tau|}$$

Por otra parte, la correspondiente densidad espectral vendría dada por la aplicación de (3.16).

$$\phi(\omega) = \frac{r_1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\omega^2 + a^2}$$

◆

### 3.5.1.3 Muestreo de una ecuación diferencial estocástica

Si el modelo de un proceso se presenta como ecuaciones diferenciales estocásticas, puede ser útil muestrearlas y obtener un modelo en tiempo discreto.

Considérese el proceso descrito por

$$dx = A \cdot x \cdot dt + dv \quad (3.44)$$

donde el proceso  $v$  tiene media cero e incrementos no correlacionados. La covarianza incremental de  $v$  es  $R_1 \cdot dt$ . Sean los instantes de muestreo  $\{t_k; k=0,1,\dots\}$ . La integración de esta ecuación sobre un intervalo de muestreo  $[t_k, t_{k+1}]$  da

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)} \cdot x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)} \cdot dv(s)$$

Considérese la variable aleatoria

$$e(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)} \cdot dv(s)$$

Esta variable tiene media cero puesto que  $v$  también tiene media cero. Las variables aleatorias  $e(t_k)$  y  $e(t_l)$  no están correlacionados si  $k \neq l$  puesto que los incrementos de  $v$  sobre intervalos disjuntos están no correlacionados. La covarianza de  $e(t_k)$  está dada por

$$\begin{aligned} E[e(t_k)e^T(t_k)] &= E \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)} \cdot dv(s) \cdot dv^T(t) \cdot e^{A^T(t_{k+1}-t)} \right] = \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)} \cdot R_1 \cdot e^{A^T(t_{k+1}-s)} ds \end{aligned} \quad (3.45)$$

Se obtiene así que la secuencia aleatoria  $\{x(t_k), k=0,1,\dots\}$  obtenida muestreando el proceso  $\{x(t)\}$  está descrita por la ecuación en diferencias

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)} \cdot x(t_k) + e(t_k)$$

donde  $\{e(t_k)\}$  es una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas con media cero y covarianza (3.45).

## 3.5.2 Filtrado de procesos estacionarios

### 3.5.2.1 Formulación discreta

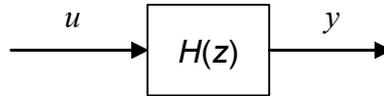


Figura 3.6: Sistema discreto estacionario

**Teorema 3.3.** Considérese un sistema dinámico de tiempo discreto estacionario con periodo de muestreo  $T=1$  (ver Figura 3.6) y función de transferencia pulso  $H(z)$ . Sea la señal de entrada  $u$  un proceso estocástico con media  $m_u$  y densidad espectral  $\phi_u$ . Si el sistema es estable, entonces la salida  $y$  es también un proceso estacionario con media

$$m_y(k) = H(1) \cdot m_u(k) \quad (3.46)$$

y densidad espectral

$$\phi_y(\omega) = H(e^{i\omega}) \cdot \phi_u(\omega) \cdot H^T(e^{-i\omega}) \quad (3.47)$$

Además la densidad espectral cruzada entre la entrada y la salida está dada por la expresión

$$\phi_{yu}(\omega) = H(e^{i\omega}) \cdot \phi_u(\omega) \quad (3.48)$$

#### ♦ Demostración Teorema 3.3:

Para el sistema considerado la relación entre la entrada y la salida es:

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^k h(k-n) \cdot u(n) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot u(k-n)$$

Tomando valores medios

$$\begin{aligned}
m_y(k) &= E[y(k)] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot u(k-n)\right] = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot E[u(k-n)] = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot m_u(k-n)
\end{aligned}$$

Se observa que el valor medio de la salida se obtiene filtrando el valor medio de la entrada.

Para determinar la covarianza, primero hay que darse cuenta que

$$y(k) - m_y(k) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot [u(k-n) - m_u(k-n)]$$

Luego la diferencia entre la señal de salida y su valor medio se propaga a través del sistema de la misma forma que la señal de entrada. Con vistas a simplificar la escritura de las ecuaciones se va a suponer que los valores medios son cero. Además se supondrá que todas las series infinitas existen y que las operaciones de suma infinita y valor esperado son conmutativas. Así, la definición de covarianza da

$$\begin{aligned}
r_y(\tau) &= E[y(k+\tau) \cdot y^T(k)] = \\
&= E\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot [u(k+\tau-n)]\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} h(l) \cdot [u(k-l)]\right)^T\right] = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(n) \cdot E[u(k+\tau-n) \cdot u^T(k-l)] \cdot h^T(l) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(n) \cdot r_u(\tau+l-n) \cdot h^T(l)
\end{aligned}$$

De forma similar se obtiene la covarianza cruzada entre la entrada y la salida.

$$\begin{aligned}
r_{yu}(\tau) &= E[y(k+\tau) \cdot u^T(k)] = E\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot [u(k+\tau-n)]\right) \cdot u^T(k)\right] = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot E[u(k+\tau-n) \cdot u^T(k)] = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot r_u(\tau-n)
\end{aligned}$$

La definición de densidad espectral es

$$\phi_y(\omega) = \phi_{yy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i n \omega} \cdot r_y(n)$$

Sustituyendo la expresión de la covarianza en esta ecuación y recolocando términos

$$\begin{aligned}
\phi_y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(n+k-k+l-l)\omega} \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(k) \cdot r_u(n+l-k) \cdot h^T(l) \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-i \cdot k \cdot \omega} \cdot h(k) \cdot e^{-i(n+l-k)\omega} \cdot r_u(n+l-k) \cdot e^{-i \cdot l \cdot \omega} \cdot h^T(l) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i \cdot k \cdot \omega} \cdot h(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(n+l-k)\omega} \cdot r_u(n+l-k) \sum_{l=0}^{\infty} e^{i \cdot l \cdot \omega} \cdot h^T(l)
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $p=n+l-k$  en la segunda sumatoria se obtiene:

$$\phi_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i \cdot k \cdot \omega} \cdot h(k) \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot p \cdot \omega} \cdot r_u(p) \sum_{l=0}^{\infty} e^{i \cdot l \cdot \omega} \cdot h^T(l)$$

Introduciendo la función de transferencia pulso  $H(z)$  del sistema, que se relaciona con la respuesta a un impulso  $\{h(k), k=0, 1, \dots\}$  mediante la expresión:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \cdot h(n) \quad (3.49)$$

Como  $z=e^{i\omega T}$  y  $T=1$  se tiene

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \cdot i \cdot \omega} \cdot h(n)$$

Entonces la ecuación para la densidad espectral se puede escribir de la siguiente forma:

$$\phi_y(\omega) = H(e^{i\omega}) \cdot \phi_u(\omega) \cdot H^T(e^{-i\omega})$$

De forma similar, la ecuación para la densidad espectral cruzada es

$$\phi_{yu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot n \cdot \omega} \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \cdot r_u(n-k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i \cdot k \cdot \omega} h(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot n \cdot \omega} \cdot r_u(n) = H(e^{i\omega}) \cdot \phi_u(\omega)$$

◆

El resultado indicado en este teorema tiene una sencilla interpretación física. El número  $|H(e^{i\omega})|$  es la amplitud en el estado estacionario de la respuesta del sistema a una señal seno de frecuencia  $\omega$ . El valor de la densidad espectral de la salida es entonces el producto de la ganancia de la potencia  $|H(e^{i\omega})|^2$  y la densidad espectral de la entrada  $\phi_u(\omega)$ .

Por otra parte, la ecuación (3.48) indica que la densidad espectral cruzada es igual a la función de transferencia del sistema si la entrada es ruido blanco con densidad espectral unidad. Este resultado puede ser utilizado para determinar la función de transferencia pulso del sistema.

◆ **Ejemplo 3.4:**

Considere el proceso  $\{x(k)\}$  del Ejemplo 3.2. Este proceso puede ser generado haciendo pasar ruido blanco a través de un filtro función de transferencia pulso:

$$H(z) = \frac{1}{z - a}$$

Puesto que la densidad espectral de  $\{v(k)\}$  es:

$$\phi_v(\omega) = \frac{r_1}{2 \cdot \pi}$$

La densidad espectral de  $\{x(k)\}$  se determina aplicando la ecuación (3.47)

$$\phi_x(\omega) = H(e^{i\omega}) \cdot \phi_u(\omega) \cdot H^T(e^{-i\omega}) = \frac{r_1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{(e^{i\omega} - a) \cdot (e^{-i\omega} - a)} = \frac{r_1}{2 \cdot \pi \cdot (1 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \cos \omega)}$$

Por otra parte, el proceso

$$y(k) = x(k) + e(k)$$

tiene la siguiente densidad espectral

$$\phi_y(\omega) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left[ r_2 + \frac{r_1}{1 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \cos \omega} \right]$$

Se observa que este resultado es el mismo obtenido en el Ejemplo 3.2.

◆

### 3.5.2.2 Formulación continua

Considérese un sistema estable invariante en el tiempo con respuesta a impulso  $g$ . La relación entre la entrada y la salida de dicho sistema viene dada por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t-s) \cdot u(s) ds = \int_0^{\infty} g(s) \cdot u(t-s) ds \quad (3.50)$$

Sea la señal de entrada  $u$  a un proceso estocástico con función valor medio  $m_u$  y función de covarianza  $r_u$ . El siguiente teorema es análogo al Teorema 3.3 enunciado para sistemas en tiempo discreto.

**Teorema 3.4:** *Filtrado de procesos estacionarios.* Considérese un sistema lineal estacionario con función de transferencia  $G$ . Sea la señal de entrada un proceso estocástico estacionario en tiempo continuo con valor medio  $m_u$  y densidad espectral  $\phi_u$ . Si el sistema es estable, entonces la salida es también un proceso estacionario con valor medio

$$m_y = G(0) \cdot m_u \quad (3.51)$$

y densidad espectral

$$\phi_y(\omega) = G(i\omega) \cdot \phi_u(\omega) \cdot G^T(-i\omega) \quad (3.52)$$

La densidad espectral cruzada entre la entrada y la salida está dada por

$$\phi_{yu}(\omega) = G(i\omega) \cdot \phi_u(\omega) \quad (3.53)$$

### Ejemplo 3.5:

Considérese el sistema del Ejemplo 3.3. El proceso  $x$  se puede considerar como el resultado de filtrar ruido blanco con varianza  $r_1/(2 \cdot \pi)$  a través de un sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s+a}$$

La densidad espectral se puede calcular usando (3.52):

$$\phi(\omega) = \frac{r_1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{i\omega+a} \cdot \frac{1}{-i\omega+a} = \frac{r_1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\omega^2+a^2}$$

♦

### 3.5.3 Factorización espectral

#### 3.5.3.1 Formulación discreta

Por *factorización espectral* se entenderá al problema de obtener el sistema lineal  $H(z)$  que al ser excitado por ruido blanco de covarianza unidad genera una salida cuya densidad espectral  $\phi_y(\omega)$ , racional en  $\cos \omega$ , es conocida de antemano.

Como la entrada es ruido blanco su densidad espectral es

$$\phi_u(\omega) = \frac{1}{2\pi}$$

Además como

$$z = e^{i\omega}$$

entonces por la ecuación (3.47) del Teorema 3.3 se tiene que:

$$\phi_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot H(z) \cdot H^T(z^{-1}) = F(z)$$

Se verifica que si  $z_i$  es un cero de  $H(z)$  entonces  $z_i^{-1}$  es un cero de  $H(z^{-1})$ . Análogamente si  $p_i$  es un polo de  $H(z)$  entonces  $p_i^{-1}$  es un polo de  $H(z^{-1})$ . Es decir, existe una simetría tal que

$$\begin{aligned} z_i \cdot z_j &= 1 \\ p_i \cdot p_j &= 1 \end{aligned}$$

Siendo  $z_i \cdot z_j$  ceros de  $F(z)$  y siendo  $p_i \cdot p_j$  polos de  $F(z)$ .

Los pasos para encontrar una función  $H$  que corresponda a una determinada densidad espectral racional  $\phi_y$  son:

- 1) Dada  $\phi_y(\omega)$  obtener los polos  $p_i$  y los ceros  $z_i$  de  $F(z)$ .
- 2) Construir  $H(z)$  de la siguiente forma:

$$H(z) = K \cdot \frac{\prod (z - z_i)}{\prod (z - p_i)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Puesto que el proceso estocástico se ha supuesto estacionario los polos  $p_i$  y los ceros  $z_i$  verificarán las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} |z_i| &\leq 1 \\ |p_i| &< 1 \end{aligned}$$

El resultado obtenido se resume en el siguiente teorema.

**Teorema 3.5: Teorema de factorización espectral.** Dada una densidad espectral  $\phi(\omega)$ , que sea una función racional en  $\cos \omega$ , existe un sistema lineal con función de transferencia pulso

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (3.54)$$

tal que la salida que se obtiene, cuando la entrada del sistema es ruido blanco, es un proceso aleatorio estacionario con densidad espectral  $\phi$ . El polinomio  $A(z)$  tiene todos sus ceros dentro del círculo unidad. El polinomio  $B$  tiene todos sus ceros dentro del disco unidad o sobre el círculo unidad.

La principal conclusión de este teorema es que es posible generar cualquier proceso aleatorio estacionario con densidad espectral racional como la salida de un sistema lineal estable al cual se le excita con ruido blanco.

Por tanto es suficiente con estudiar como se comportan los sistemas cuando son excitados por ruido blanco. Todos los otros procesos estacionarios con densidad espectral racional pueden ser generados mediante el filtrado adecuado del ruido blanco.

A menudo se supone que el polinomio  $B(z)$  posee todos sus ceros dentro del círculo unidad. Esto significa que la inversa del sistema  $H$  es estable.

◆ **Ejemplo 3.6:**

Considérese el proceso  $\{y(k)\}$  de los Ejemplos 3.2 y 3.4. Este proceso tiene la siguiente densidad espectral

$$\phi_y(\omega) = F(z) = \frac{1}{2\pi} \left[ r_2 + \frac{r_1}{(z-a)(z^{-1}-a)} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{r_1 + r_2(1+a^2) - r_2 \cdot a \cdot (z+z^{-1})}{(z-a)(z^{-1}-a)} \right]$$

Pasando el factor  $2\pi$  al otro miembro

$$2 \cdot \pi \cdot F(z) = \left[ \frac{r_1 + r_2(1 + a^2) - r_2 \cdot a \cdot (z + z^{-1})}{(z - a) \cdot (z^{-1} - a)} \right]$$

Se observa que el denominador ya está en forma factorizada. Para factorizar el numerador, observamos que puesto que únicamente posee potencias en  $z$ , entonces

$$B(z) \cdot B(z^{-1}) = \lambda^2 \cdot (z - b) \cdot (z^{-1} - b)$$

Que se puede escribir como

$$B(z) \cdot B(z^{-1}) = \lambda^2 \cdot (1 + b^2) - \lambda^2 \cdot b \cdot (z + z^{-1})$$

Igualando  $B(z) \cdot B(z^{-1})$  con el numerador de  $2 \cdot \pi \cdot F(z)$

$$\lambda^2 \cdot (1 + b^2) - \lambda^2 \cdot b \cdot (z + z^{-1}) = r_1 + r_2 \cdot (1 + a^2) - r_2 \cdot a \cdot (z + z^{-1})$$

Igualando ahora los coeficientes de la misma potencia de  $z$  se obtienen el siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{aligned} z^0 : \lambda^2 \cdot (1 + b^2) &= r_1 + r_2 \cdot (1 + a^2) \\ z^1 : \lambda^2 \cdot b &= r_2 \cdot a \end{aligned}$$

Si se despeja  $\lambda^2$  de la segunda ecuación

$$\lambda^2 = \frac{r_2 \cdot a}{b}$$

y se define la variable  $p$  como:

$$p = r_1 + r_2 \cdot (1 + a^2)$$

Es posible escribir la primera ecuación como una ecuación algebraica de segundo orden para  $b$

$$r_2 \cdot a \cdot b^2 - b \cdot p + r_2 \cdot a = 0$$

Esta ecuación tiene la siguiente solución válida, es decir, dentro del círculo unidad:

$$b = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4 \cdot (r_2 \cdot a)^2}}{2 \cdot a \cdot r_2}$$

Con lo que

$$\lambda^2 = \frac{2 \cdot (r_2 \cdot a)^2}{p + \sqrt{p^2 - 4 \cdot (r_2 \cdot a)^2}}$$

Luego

$$H(z) = \frac{\lambda \cdot (z - b)}{z - a}$$

◆

◆ **Ejemplo 3.7:**

Se desea calcular el filtro  $H(z)$  que genera una señal estocástica con densidad espectral

$$F(z) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left[ \frac{0.3125 + 0.125 \cdot (z + z^{-1})}{2.25 - 1.5 \cdot (z + z^{-1}) + 0.5 \cdot (z^2 + z^{-2})} \right]$$

$F(z)$  se puede escribir como:

$$2 \cdot \pi \cdot F(z) = \frac{B(z) \cdot B(z^{-1})}{A(z) \cdot A(z^{-1})} = \frac{\lambda^2 \cdot (z - b) \cdot (z^{-1} - b)}{(z - a_1) \cdot (z^{-1} - a_1) \cdot (z - a_2) \cdot (z^{-1} - a_2)}$$

Luego

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\lambda \cdot (z - b)}{(z - a_1) \cdot (z - a_2)}$$

Definiendo las variables

$$p_1 = 1 + a_1^2$$

$$p_2 = 1 + a_2^2$$

Y desarrollando los productos se obtiene

$$\frac{B(z) \cdot B(z^{-1})}{A(z) \cdot A(z^{-1})} = \frac{\lambda^2 \cdot [(1 + b^2) - b \cdot (z + z^{-1})]}{(p_1 \cdot p_2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2) - (a_1 \cdot p_2 + a_2 \cdot p_1) \cdot (z + z^{-1}) + a_1 \cdot a_2 \cdot (z^2 + z^{-2})}$$

Igualando  $B(z) \cdot B(z^{-1})$  con el numerador de  $2 \cdot \pi \cdot F(z)$

$$\lambda^2 \cdot [(1 + b^2) - b \cdot (z + z^{-1})] = 0.3125 + 0.125 \cdot (z + z^{-1})$$

se obtienen las ecuaciones:

$$\lambda^2 \cdot (1 + b^2) = 0.3125$$

$$-\lambda^2 \cdot b = 0.125$$

Eliminando  $\lambda^2$  se obtiene la siguiente ecuación cuadrática para  $b$

$$b^2 + 2.5 \cdot b + 1 = 0$$

Cuya única solución dentro del círculo unidad es:  $b = -0.5$ . Con lo que  $\lambda = 0.25$ .

Por otra parte, igualando  $A(z) \cdot A(z^{-1})$  con el denominador de  $2 \cdot \pi \cdot F(z)$

$$(p_1 \cdot p_2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2) - (a_1 \cdot p_2 + a_2 \cdot p_1) \cdot (z + z^{-1}) + a_1 \cdot a_2 \cdot (z^2 + z^{-2}) = 2.25 - 1.5 \cdot (z + z^{-1}) + 0.5 \cdot (z^2 + z^{-2})$$

se obtiene las ecuaciones:

$$p_1 \cdot p_2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 = 2.25$$

$$a_1 \cdot p_2 + a_2 \cdot p_1 = 1.5$$

$$a_1 \cdot a_2 = 0.5$$

Luego

$$a_1 = \frac{0.5}{a_2}$$

$$p_1 = \frac{1.25}{p_2}$$

Por tanto

$$\frac{0.5}{a_2} \cdot p_2 + a_2 \cdot \frac{1.25}{p_2} = 1.5 \Rightarrow 0.5 \cdot p_2 + a_2^2 \cdot \frac{1.25}{p_2} = 1.5 \cdot a_2 \Rightarrow 0.5 \cdot p_2^2 + 1.25 \cdot a_2^2 = 1.5 \cdot a_2 \cdot p_2$$

sustituyendo la variable  $p_2$  de acuerdo a su definición se obtiene la siguiente ecuación:

$$0.5 \cdot (1 + a_2^2)^2 + 1.25 \cdot a_2^2 - 1.5 \cdot a_2 \cdot (1 + a_2^2) = 0 \Rightarrow 0.5 \cdot a_2^4 - 1.5 \cdot a_2^3 + 2.25 \cdot a_2^2 - 1.5 \cdot a_2 + 0.5 = 0$$

Cuyas soluciones dentro del círculo unidad son  $a_2 = 0.5 + j \cdot 0.5$  y  $a_2 = 0.5 - j \cdot 0.5$

Luego  $a_1 = 0.5 - j \cdot 0.5$  y  $a_1 = 0.5 + j \cdot 0.5$

Con lo que finalmente  $H(z)$  es:

$$H(z) = \frac{\lambda \cdot (z - b)}{(z - a_1) \cdot (z - a_2)} = \frac{0.5 \cdot (z - (-0.5))}{(z - (0.5 - j \cdot 0.5)) \cdot (z - (0.5 + j \cdot 0.5))} = \frac{0.5 \cdot z + 0.25}{z^2 - z + 0.5}$$

♦

### 3.5.3.2 Formulación continua

**Teorema 3.6: Factorización espectral.** Dada una densidad espectral racional  $\phi(\omega)$ , existe un sistema lineal de dimensión finita con función de transferencia

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

tal que la salida que se obtiene, cuando la entrada del sistema es ruido blanco, es un proceso estocástico estacionario con densidad espectral  $\phi$ . El polinomio  $A$  tiene todos sus ceros en el semiplano izquierdo del plano  $s$ . El polinomio  $B$  no tiene ceros en el semiplano derecho del plano  $s$ .

### 3.5.4 Cálculo de varianzas

La varianza de una señal obtenida mediante el filtrado de ruido blanco puede ser calculada usando la ecuación recursiva (3.38) si se tiene un modelo en variables de estados del sistema. En esta sección se van obtener algunas fórmulas que permiten calcular la varianza de una señal si se dispone de la función de transferencia del sistema que genera dicha señal.

Considérese una señal generada por

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)} \cdot e(k) \quad (3.55)$$

donde  $e$  es ruido blanco de varianza unidad. De acuerdo con el Teorema 3.5 la densidad espectral de la señal y esta dada por

$$\phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{B(z) \cdot B(z^{-1})}{A(z) \cdot A(z^{-1})}$$

También se sigue de dicho Teorema 3.5 que la varianza de la señal y está dada por la integral compleja

$$E[y^2] = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\omega) \cdot d\omega = \frac{1}{i} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\omega) \cdot e^{-i\omega} d(e^{i\omega}) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \oint \frac{B(z) \cdot B(z^{-1})}{A(z) \cdot A(z^{-1})} \cdot \frac{dz}{z} \quad (3.56)$$

El calculo de las integrales que poseen esta forma está estrechamente ligado al *test de estabilidad de Jury* que se usa para conocer si las raíces de la ecuación característica de un sistema discreto en lazo cerrado se encuentran ubicadas dentro del círculo unidad. Así para evaluar este tipo de integrales hay que construir la Tabla 3.1, considerando la siguiente estructura para los polinomios  $A(z)$  y  $B(z)$ :

$$A(z) = a_0 \cdot z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \dots + a_n$$

$$B(z) = b_0 \cdot z^n + b_1 \cdot z^{n-1} + \dots + b_n$$

$a_0$	$a_1$	...	$a_{n-1}$	$a_n$		$b_0$	$b_1$	...	$b_{n-1}$	$b_n$	
$a_n$	$a_{n-1}$	...	$a_1$	$a_0$	$\alpha_n$	$a_n$	$a_{n-1}$	...	$a_1$	$a_0$	$\beta_n$
$a_0^{n-1}$	$a_1^{n-1}$	...	$a_{n-1}^{n-1}$			$b_0^{n-1}$	$b_1^{n-1}$	...	$b_{n-1}^{n-1}$		
$a_{n-1}^{n-1}$	$a_{n-2}^{n-1}$	...	$a_0^{n-1}$		$\alpha_{n-1}$	$a_{n-1}^{n-1}$	$a_{n-2}^{n-1}$	...	$a_0^{n-1}$		$\beta_{n-1}$
:											
:											
$a_0^1$	$a_1^1$					$b_0^1$	$b_1^1$				
$a_1^1$	$a_0^1$				$\alpha_1$	$a_1^1$	$a_0^1$				$\beta_1$
$a_0^0$					1	$b_0^0$					$\beta_0$

Tabla 3.1: Tabla asociada al test de estabilidad de Jury

En dicha tabla se definen:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{a_n}{a_0} & \beta_n &= \frac{b_n}{a_0} \\ \alpha_k &= \frac{a_k^k}{a_0^k} & \beta_k &= \frac{b_k^k}{a_0^k}\end{aligned}\quad (3.57)$$

Donde

$$\begin{aligned}a_i^{k-1} &= a_i^k - \alpha_k \cdot a_{k-i}^k \\ b_i^{k-1} &= b_i^k - \beta_k \cdot a_{k-i}^k\end{aligned}\quad (3.58)$$

Se puede demostrar que el resultado de la integral (3.56) viene dado por la expresión

$$I_n = \frac{1}{a_0} \cdot \sum_{i=0}^n b_i^i \cdot \beta_i \quad (3.59)$$

En el caso de  $n=1$  y  $n=2$  la expresión (3.59) toma los siguientes valores

$$I_1 = \frac{(b_0^2 + b_1^2) \cdot a_0 - 2 \cdot b_0 \cdot b_1 \cdot a_1}{a_0 \cdot (a_0^2 - a_1^2)} \quad (3.60)$$

$$I_2 = \frac{B_0 \cdot a_0 \cdot e_1 - B_1 \cdot a_0 \cdot a_1 + B_2 \cdot (a_1^2 - a_2 \cdot e_1)}{a_0 \cdot [(a_0^2 - a_2^2) \cdot e_1 - (a_0 \cdot a_1 - a_1 \cdot a_2) \cdot a_1]} \quad (3.61)$$

Donde

$$\begin{aligned}B_0 &= b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 \\ B_1 &= 2 \cdot b_1 \cdot (b_0 + b_2) \\ B_2 &= 2 \cdot b_0 \cdot b_2 \\ e_1 &= a_0 + a_2\end{aligned}\quad (3.62)$$



# TEMA 4

## ESTIMACION OPTIMA

### 4.1 INTRODUCCION

En las secciones 1.7.2 y 2.8.2 se describió el diseño de observadores o estimadores de estado considerando que se disponía de un modelo matemático exacto del sistema y despreciando la posible existencia de ruido de medida. A los observadores obtenidos bajo estas hipótesis se les denomina *observadores deterministas*. Desafortunadamente, los modelos matemáticos de un proceso real no suelen ser exactos y además suele existir ruido de medida. Existe una familia de observadores que de forma explícita tienen en cuenta estas circunstancias son los denominados *observadores estocásticos*. El más utilizado de esta tipo de observadores es el *filtro de Kalman* que fue introducido por R. Kalman en 1960.

El *filtro de Kalman* es uno de los logros fundamentales de la denominada Teoría Moderna del Control y desde su desarrollo por Kalman ha tenido un gran éxito en aplicaciones prácticas, como por ejemplo en el proyecto Apolo de la NASA. Desde entonces viene siendo aplicado en los más diversos campos: Biología, Astronáutica, Geología, Comunicaciones, etc.

Este tema está dedicado exclusivamente a la formulación de las ecuaciones del filtro de Kalman discreto. Se deja para el Tema-7 la demostración de las ecuaciones del filtro en estado estacionario. Asimismo se deja para el Tema-9 la aplicación del filtro de Kalman en el diseño de controladores LQG.

### 4.2 EL FILTRO DE KALMAN

Considérese el proceso discreto representado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \Phi \cdot x_k + \Gamma \cdot u_k + v_k \\y_k &= C \cdot x_k + e_k\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde  $v$  y  $e$  son procesos de ruido blanco Gaussiano discreto, de media nula y con covarianza

$$\begin{aligned} E[v_k \cdot v_k^T] &= R_1 \\ E[e_k \cdot e_k^T] &= R_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Además se supone que  $v$  y  $e$  no están correlacionados, es decir,

$$E[v_k \cdot e_k^T] = 0 \quad (4.3)$$

Por otra parte se supone que el estado inicial  $x(0)$  del proceso es una variable aleatoria Gaussiana de media

$$E[x(0)] = m_0 \quad (4.4)$$

y covarianza

$$\text{cov}[x(0)] = R_0 \quad (4.5)$$

Se supone también que  $R_0$ ,  $R_1$  y  $R_2$  son semidefinidas positivas y que el sistema es controlable y observable. El problema consiste en determinar lo mejor posible el estado a partir de las medidas  $y(k)$ .

Supóngase que se desea aproximar el estado  $x_{k+1}$  de (4.1) por el estado  $\hat{x}_{k+1}$  del modelo

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi \cdot \hat{x}_k + \Gamma \cdot u_k \quad (4.6)$$

En este modelo se parte de un determinado estado  $x_k$  que se ha determinado de alguna manera de forma óptima utilizando todas las medidas realizadas hasta ese instante  $y_0, y_1, \dots, y_k$ . A dicho estado se le denotará por  $\hat{x}(k | k)$  para significar que es el estado estimado en el instante  $k$  utilizando las medidas obtenidas hasta ese mismo instante  $k$ . A partir de dicho estado se “predice” como valor del vector de estados para el siguiente instante, el que proporcionaría el modelo (4.1) si no estuviera afectado de ruido. Luego (4.6) se escribe en la forma

$$\hat{x}(k+1 | k) = \Phi \cdot \hat{x}(k | k) + \Gamma \cdot u_k \quad (4.7)$$

donde  $\hat{x}(k+1|k)$  denota al estado estimado para el instante  $k+1$  usando las medidas hasta  $y_k$ , las cuales han permitido estimar  $\hat{x}(k|k)$ .

Supóngase que una vez realizada la medida  $y_{k+1}$  es posible mejorar la estima del vector de estados para dicho instante  $k+1$ . Considérese que dicha estima  $\hat{x}(k+1|k+1)$  tiene la estructura característica de un observador de estados:

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K_{k+1}^e \cdot [y_{k+1} - C \cdot \hat{x}(k+1|k)] \quad (4.8)$$

En esta ecuación se observa como la estima  $\hat{x}(k+1|k)$  se corrige de forma proporcional a la diferencia entre la medida real de la salida  $y_{k+1}$  en el instante  $k+1$  y la salida que se obtendría si el estado real fuera  $\hat{x}(k+1|k)$ . Esta diferencia es precisamente el error de la salida estimada. La constante de proporcionalidad estaría dada por el vector  $K_{k+1}^e$ . La actualización que se realiza en el vector de estados  $\hat{x}(k+1|k)$  una vez que se ha realizado la medida  $y_{k+1}$  es:

$$K_{k+1}^e \cdot [y_{k+1} - C \cdot \hat{x}(k+1|k)] \quad (4.9)$$

Por ello a la ecuación (4.8) se la conoce como de “*actualización de la medida*”.

Se debe tener claro que  $\hat{x}(k+1|k+1)$  es el vector de estados estimado para el instante  $k+1$  usando las medidas obtenidas hasta el instante  $k+1$ . Éste se utilizará en el modelo dado por la ecuación (4.7) para predecir el valor del vector de estados en el instante  $k+2$ , a partir de las medidas realizadas hasta  $k+1$ , y así sucesivamente.

Por otra parte el error de reconstrucción o de estimación del estado en el instante  $k+1$  usando las medidas obtenidas hasta el instante  $k$  es:

$$\tilde{x}(k+1|k) = x_{k+1} - \hat{x}(k+1|k) \quad (4.10)$$

Como  $E[x(0)] = m_0$ , el valor medio del error de reconstrucción es cero para todos los instantes  $k \geq 0$  independientemente de  $K^e$  si  $E[\hat{x}(0)] = m_0$ . Luego su varianza es:

$$P(k+1|k) \equiv \text{cov}[\tilde{x}(k+1|k)] = E[\tilde{x}(k+1|k) \cdot \tilde{x}^T(k+1|k)] \quad (4.11)$$

De forma análoga el error de reconstrucción del estado en el instante  $k+1$  usando las medidas obtenidas hasta el instante  $k+1$  es

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = x_{k+1} - \hat{x}(k+1|k+1) \quad (4.12)$$

y su varianza

$$P(k+1|k+1) \equiv \text{cov}[\tilde{x}(k+1|k+1)] = E[\tilde{x}(k+1|k+1)\tilde{x}^T(k+1|k+1)] \quad (4.13)$$

El objetivo que se plantea es diseñar el vector de ganancia  $K_{k+1}^e$  de la ecuación de actualización de forma que se minimice la varianza del error de estimación. Dado un instante inicial  $\hat{x}(0) = \hat{x}(0|0)$  de covarianza  $P(0) = P(0|0)$ , las cinco ecuaciones recursivas que resuelven este problema se denominan *filtro de Kalman* (ver Cuadro 4.1).

<b>Ecuaciones del filtro de Kalman</b>	
• Entre medidas (Actualización temporal)	
	$\hat{x}(k+1 k) = \Phi \cdot \hat{x}(k k) + \Gamma \cdot u_k \quad (4.14)$
	$P(k+1 k) = \Phi \cdot P(k k) \cdot \Phi^T + R_1 \quad (4.15)$
• Instante en que se realiza la medida (Actualización de medida)	
	$K_{k+1}^e = P(k+1 k) \cdot C^T \cdot (R_2 + C \cdot P(k+1 k) \cdot C^T)^{-1} \quad (4.16)$
	$\hat{x}(k+1 k+1) = \hat{x}(k+1 k) + K_{k+1}^e \cdot [y_{k+1} - C \cdot \hat{x}(k+1 k)] \quad (4.17)$
	$P(k+1 k+1) = P(k+1 k) - K_{k+1}^e \cdot C \cdot P(k+1 k) \quad (4.18)$

*Cuadro 4.1: Ecuaciones del filtro de Kalman*

♦ **Obtención de las ecuaciones (4.15), (4.16) y (4.18)**

a) Obtención de (4.15)

Teniendo en cuenta que (4.1) y (4.7) es posible expresar (4.10) de la siguiente forma:

$$\tilde{x}(k+1|k) = (\Phi \cdot x(k) + \Gamma \cdot u_k + v_k) - (\Phi \cdot \hat{x}(k|k) + \Gamma \cdot u_k) = \Phi \cdot \tilde{x}(k|k) + v_k \quad (d.1)$$

Sustituyendo esta expresión en (4.11) y desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned} P(k+1|k) &= E[(\Phi \cdot \tilde{x}(k|k) + v_k) \cdot (\Phi \cdot \tilde{x}(k|k) + v_k)^T] \\ &= E[(\Phi \cdot \tilde{x}(k|k) + v_k) \cdot (\tilde{x}^T(k|k) \Phi^T + v_k^T)] \\ &= E[\Phi \cdot \tilde{x}(k|k) \cdot \tilde{x}^T(k|k) \cdot \Phi^T] + E[\Phi \cdot \tilde{x}(k|k) \cdot v_k^T] + E[v_k \cdot \tilde{x}^T(k|k) \cdot \Phi^T] + E[v_k \cdot v_k^T] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $v_k$  y  $\tilde{x}(k|k)$  son independientes, que  $E[v_k \cdot v_k^T] = R_1$  y que  $P(k|k) = E[\tilde{x}(k|k) \cdot \tilde{x}^T(k|k)]$  la ecuación anterior toma la forma de la ecuación (4.15)

$$P(k+1|k) = \Phi \cdot P(k|k) \cdot \Phi^T + R_1$$

b) Obtención de (4.16) y (4.18)

Sustituyendo (4.8) en (4.12) se obtiene

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = x_{k+1} - [\hat{x}(k+1|k) + K_{k+1}^e \cdot [y_{k+1} - C \cdot \hat{x}(k+1|k)]]$$

Sustituyendo en esta ecuación el valor de  $y_{k+1}$  dado por (4.1) se tiene

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = x_{k+1} - \hat{x}(k+1|k) - K_{k+1}^e \cdot [C \cdot x_{k+1} + e_{k+1} - C \cdot \hat{x}(k+1|k)]$$

Considerando la definición del error de reconstrucción la ecuación anterior se puede expresar como

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = \tilde{x}(k+1|k) - K_{k+1}^e \cdot [C \cdot \tilde{x}(k+1|k) + e_{k+1}]$$

Desarrollando el producto

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = \tilde{x}(k+1|k) - K_{k+1}^e \cdot C \cdot \tilde{x}(k+1|k) - K_{k+1}^e \cdot e_{k+1}$$

Y sacando factor común se obtiene

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = [I - K_{k+1}^e \cdot C] \cdot \tilde{x}(k+1|k) - K_{k+1}^e \cdot e_{k+1} \quad (d.2)$$

Si se sustituye (d.1) en (d.2) se obtiene:

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = [I - K_{k+1}^e \cdot C] \cdot \Phi \cdot \tilde{x}(k|k) + [I - K_{k+1}^e \cdot C] \cdot v_k - K_{k+1}^e \cdot e_{k+1}$$

Tomando valores medios en esta ecuación

$$E[\tilde{x}(k+1|k+1)] = [I - K_{k+1}^e \cdot C] \cdot \Phi \cdot E[\tilde{x}(k|k)] + [I - K_{k+1}^e \cdot C] \cdot E[v_k] - K_{k+1}^e \cdot E[e_{k+1}]$$

Puesto que  $v_k$  y  $e_k$  poseen media nula entonces

$$E[\tilde{x}(k+1|k+1)] = [I - K_{k+1}^e \cdot C] \cdot \Phi \cdot E[\tilde{x}(k|k)] \quad (d.3)$$

Tomando valores medios en (d.1) se obtiene

$$E[\tilde{x}(k+1|k)] = \Phi \cdot E[\tilde{x}(k|k)] \quad (d.4)$$

Luego si el valor medio de la estima inicial  $E[\hat{x}(0)]$  coincide con el valor medio del estado inicial  $E[x(0)] = m_0$  entonces de las ecuaciones (d.3) y (d.4) se deduce que el valor medio del error de reconstrucción es cero para todo  $k \geq 0$  independientemente del valor de la ganancia  $K^e$  ya que  $E[\tilde{x}(0)] = 0$ .

Sustituyendo (d.2) en (4.13) se tiene:

$$\begin{aligned} P(k+1|k+1) &= E\left[\left([I - K_{k+1}^e \cdot C] \cdot \tilde{x}(k+1|k) - K_{k+1}^e \cdot e_{k+1}\right)\left([I - K_{k+1}^e \cdot C] \cdot \tilde{x}(k+1|k) - K_{k+1}^e \cdot e_{k+1}\right)^T\right] = \\ &= E\left[\left([I - K_{k+1}^e \cdot C] \cdot \tilde{x}(k+1|k) - K_{k+1}^e \cdot e_{k+1}\right)\tilde{x}^T(k+1|k) \cdot [I - K_{k+1}^e \cdot C]^T - e_{k+1}^T \cdot (K_{k+1}^e)^T\right] = \\ &= E\left[[I - K_{k+1}^e \cdot C] \cdot \tilde{x}(k+1|k) \cdot \tilde{x}^T(k+1|k) \cdot [I - K_{k+1}^e \cdot C]^T\right] - E\left[[I - K_{k+1}^e \cdot C] \cdot \tilde{x}(k+1|k) \cdot e_{k+1}^T \cdot (K_{k+1}^e)^T\right] + \\ &\quad - E\left[K_{k+1}^e \cdot e_{k+1} \cdot \tilde{x}^T(k+1|k) \cdot [I - K_{k+1}^e \cdot C]^T\right] + E\left[K_{k+1}^e \cdot e_{k+1} \cdot e_{k+1}^T \cdot (K_{k+1}^e)^T\right] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la independencia de  $\tilde{x}(k+1|k)$  y  $e_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} P(k+1|k+1) &= E\left[[I - K_{k+1}^e \cdot C] \cdot \tilde{x}(k+1|k) \cdot \tilde{x}^T(k+1|k) \cdot [I - K_{k+1}^e \cdot C]^T\right] + E\left[K_{k+1}^e \cdot e_{k+1} \cdot e_{k+1}^T \cdot (K_{k+1}^e)^T\right] = \\ &= [I - K_{k+1}^e \cdot C] \cdot E\left[\tilde{x}(k+1|k) \cdot \tilde{x}^T(k+1|k)\right] \cdot [I - K_{k+1}^e \cdot C]^T + K_{k+1}^e \cdot E\left[e_{k+1} \cdot e_{k+1}^T\right] \cdot (K_{k+1}^e)^T \end{aligned}$$

Considerando el valor de la covarianza de  $e$  y la definición (4.11) la ecuación anterior se puede expresar en la forma:

$$P(k+1|k+1) = [I - K_{k+1}^e \cdot C] \cdot P(k+1|k) \cdot [I - K_{k+1}^e \cdot C]^T + K_{k+1}^e \cdot R_2 \cdot (K_{k+1}^e)^T \quad (d.4)$$

Esta ecuación (d.4) junto con la (4.15) son unas ecuaciones recursivas que con la condición inicial  $P(0)=R_0$ , permiten conocer la evolución de la covarianza del error de estimación sin necesidad de ver evolucionar el sistema, ya que estas ecuaciones dependen de  $\Phi$ ,  $\Gamma$ ,  $C$ ,  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y las ganancias  $K^e$ . Además de estas ecuaciones se deduce que si  $P(k|k)$  es semidefinida positiva, también lo son  $P(k+1|k)$  y  $P(k+1|k+1)$ .

Por otra parte, se va a suponer que el criterio para determinar  $K^e$  es que se minimice la covarianza del error de estimación una vez que se ha obtenido la medida asociada a dicho estado, o de forma equivalente, que se minimice el escalar:

$$\alpha \cdot P(k+1 | k+1) \cdot \alpha^T$$

donde  $\alpha$  es un vector arbitrario. Se ha elegido minimizar  $P(k+1|k+1)$  en lugar de  $P(k+1|k)$  porque esta última no depende de  $K^e$  y además la mejor estima que se puede obtener es la asociada a la propia medida en  $k+1$ . Para abreviar las expresiones se va a usar la siguiente notación  $P=P(k+1|k)$

$$\alpha \cdot P(k+1 | k+1) \cdot \alpha^T = \alpha \cdot \left\{ I - K_{k+1}^e \cdot C \right\} \cdot P \cdot \left[ I - K_{k+1}^e \cdot C \right]^T + K_{k+1}^e \cdot R_2 \cdot \left( K_{k+1}^e \right)^T \alpha^T$$

La ganancia  $K_{k+1}^e$  puede determinarse de la ecuación anterior completando los cuadrados. Se tiene así:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot P(k+1 | k+1) \cdot \alpha^T &= \alpha \cdot \left[ P - P \cdot C^T \cdot (R_2 + C \cdot P \cdot C^T)^{-1} \cdot C \cdot P \right] \alpha^T + \\ &+ \alpha \cdot \left[ K_{k+1}^e - P \cdot C^T \cdot (R_2 + C \cdot P \cdot C^T)^{-1} \right] \left[ R_2 + C \cdot P \cdot C^T \right] \left[ K_{k+1}^e - P \cdot C^T \cdot (R_2 + C \cdot P \cdot C^T)^{-1} \right]^T \alpha^T \end{aligned}$$

que se puede comprobar operando que es igual a la ecuación anterior. Ahora la ecuación está descompuesta en dos términos. El primero no depende de  $K_{k+1}^e$  y el segundo es no negativo, ya que la matriz  $(R_2 + C \cdot P \cdot C^T)$  es definida positiva. Por ello el mínimo se obtiene si  $K$  se elige de modo que la segunda parte o término de la ecuación es nulo. Entonces, y usando la notación original se tiene que

$$K_{k+1}^e = P(k+1 | k) \cdot C^T \cdot (R_2 + C \cdot P(k+1 | k) \cdot C^T)^{-1}$$

Con lo que

$$P(k+1 | k+1) = P(k+1 | k) - K_{k+1}^e \cdot C \cdot P(k+1 | k)$$

Que son precisamente las ecuaciones (4.16) y (4.18), respectivamente.

♦

El filtro de Kalman es un filtro óptimo en el sentido de que la varianza de la estima  $P(k+1|k+1)$  es mínima. De esta forma el problema de estimación se ha resuelto como un problema de optimización paramétrica suponiendo la estructura (4.17) para el estimador. Se puede demostrar que esta estructura es en realidad la óptima si las perturbaciones son del tipo Gaussiano.

La implementación de las ecuaciones del filtro de Kalman se realiza con la ayuda de computadores, habiéndose desarrollado técnicas que permiten implementaciones robustas frente a errores de tipo numérico y con reducción del número de operaciones que se tienen que realizar.

La importancia del filtro de Kalman reside en que a partir de unas medidas  $y_0, y_1, \dots, y_{k+1}$  se puede determinar el vector de estados con una precisión o varianza del error dada por la matriz  $P$ . Es lo mejor que se puede pedir para un proceso estocástico.

Por otra parte, es importante conocer como se comportará el filtro de Kalman en el estado estacionario. Se puede demostrar (ver sección 7.5) que en el estado estacionario se tiene

$$P = \Phi \cdot [P - P \cdot C^T \cdot (R_2 + C \cdot P \cdot C^T)^{-1} \cdot C \cdot P] \cdot \Phi^T + R_1 \quad (4.19)$$

$$K^e = P \cdot C^T \cdot (R_2 + C \cdot P \cdot C^T)^{-1} \quad (4.20)$$

◆ **Ejemplo 4.1:**

Considérese el siguiente sistema escalar:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k \\ y_k &= x_k + e_k \end{aligned}$$

donde  $e_k$  tiene una desviación estándar  $\sigma$  y  $x(0)$  tiene valor medio  $m_0=-2$  y varianza  $R_0=0.5$ . Se tiene por tanto un estado que es constante y se desea reconstruirlo a partir de unas medidas que están afectadas de ruido.

En este ejemplo  $\Phi=1$ ,  $\Gamma=0$  y  $C=1$ . Además como no existe ruido sobre los estados  $R_1=0$ . De acuerdo con el Cuadro 7.1 el filtro de Kalman viene dado por:

$$\hat{x}(k+1 | k) = \hat{x}(k | k) = \hat{x}(k)$$

$$P(k+1 | k) = P(k | k) = P(k)$$

$$K_{k+1}^e = \frac{P(k)}{\sigma^2 + P(k)}$$

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) = \hat{x}(k) + K_{k+1}^e \cdot [y_{k+1} - \hat{x}(k)]$$

$$P(k+1|k+1) = P(k+1) = \frac{\sigma^2 \cdot P(k)}{\sigma^2 + P(k)}.$$

La varianza  $P(k+1)$  y la ganancia  $K_{k+1}^e$  disminuyen con el tiempo. La Figura 4.1 muestra unas realizaciones del error de estimación cuando se usan ganancias  $K^e$  con un valor constante y cuando se emplea la ganancia óptima dada por el filtro de Kalman. Se observa que una gran ganancia fija da una disminución del error muy rápida, sin embargo la varianza en el estado estacionario es grande. Por el contrario una ganancia fija de valor pequeño da una disminución lenta del error pero un mejor comportamiento de la varianza en el estado estacionario. Se observa también que el mejor comportamiento se obtiene con la ganancia óptima que proporciona el filtro de Kalman.

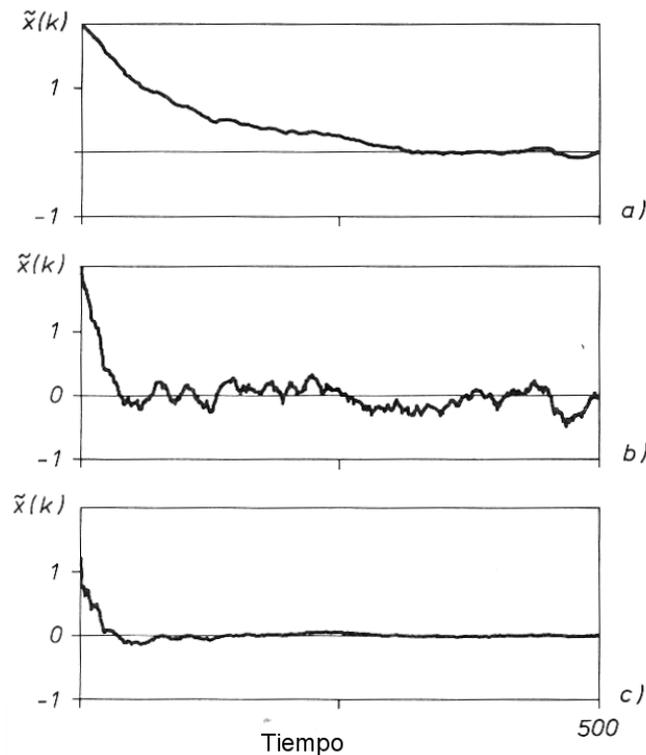


Figura 4.1. Error de estimación del sistema del ejemplo 4.1 cuando  $x_0 = -2$ ,  $\sigma = 1$  y cuando se tiene: a)

$K^e = 0.01$ ; b)  $K^e = 0.05$ ; c)  $K^e$  dada por el filtro de Kalman.

En el estado estacionario se tendría:

$$P = \left[ P - \frac{P^2}{\sigma^2 + P} \right]$$

$$K^e = \frac{P}{\sigma^2 + P}$$

Luego  $P=0$  y  $K=0$ .

Por lo tanto, puesto que la covarianza del error de estimación en el estado estacionario es nula es posible llegar a conocer con precisión el estado.

◆

◆ **Ejemplo 4.2:**

Considérese el siguiente sistema de primer orden

$$y_k + a \cdot y_{k+1} = e_k + c \cdot e_{k-1}$$

donde  $e$  tiene desviación estándar  $\sigma$ . Además supóngase que  $|c| < 1$ . Una posible representación en el espacio de estados de este sistema es:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= -a \cdot x_k + e_k \\y_k &= (c - a) \cdot x_k + e_k\end{aligned}$$

Luego en este ejemplo  $\Phi = -a$ ,  $\Gamma = 0$  y  $C = c - a$ .

Es fácil verificar que el filtro de Kalman en el estado estacionario está caracterizado por  $P=0$  y  $K=1$ .

El estado predecido en el instante  $k+1$  considerando las medidas realizadas hasta ese instante estaría dado por:

$$\hat{x}(k+1 | k+1) = -a \cdot \hat{x}(k+1 | k) + [y_{k+1} - (c - a) \cdot \hat{x}(k+1 | k)] = -c \cdot \hat{x}(k+1 | k) + y_{k+1}$$

◆

# TEMA 5

## IDENTIFICACION DE SISTEMAS

### 5.1 INTRODUCCION

La obtención de modelos matemáticos de sistemas dinámicos tiene una gran importancia en muchas áreas de la ciencia y de la ingeniería. Existen dos métodos fundamentales de obtención de estos modelos:

- *Modelización Matemática.* Se utilizan leyes físicas, químicas, económicas, etc, para describir la dinámica de un proceso o fenómeno.
- *Identificación de Sistemas.* Se determina el modelo del proceso mediante realización de experimentos a partir de los cuales se realiza el ajuste adecuado de los parámetros del modelo para que este se ajuste a los datos registrados.

Ambas formas de modelización no se deben ver como separadas. En muchos casos los procesos son tan complejos que no es posible obtener un modelo usando únicamente principios físicos. En tal caso se requiere el uso de técnicas de identificación. No obstante para la elección de estas técnicas es importante todo el conocimiento físico previo que se tenga de la planta. También puede ocurrir que se obtenga un modelo a partir del análisis físico de la planta pero existan parámetros que no se conozcan y que puedan ser estimados mediante identificación. La diferencia fundamental entre ambos métodos viene dada por las siguientes características de los métodos de identificación:

- Tienen una validez limitada por el proceso, el punto de operación, el tipo de entrada elegido, etc.
- Los parámetros del modelo no suelen tener una interpretación física directa.

- Son relativamente sencillos de construir y usar.

La Figura 5.1 muestra un esquema del procedimiento general de la identificación. El primer aspecto a considerar en el proceso de identificación es el *objetivo final* al que se dirige el modelo, ya que esto determina el tipo de modelo a usar, su fiabilidad y el método de identificación que se utilizará. La Tabla 5.1 muestra las relaciones entre el objetivo final a que se destinará el modelo y las especificaciones sobre la identificación.

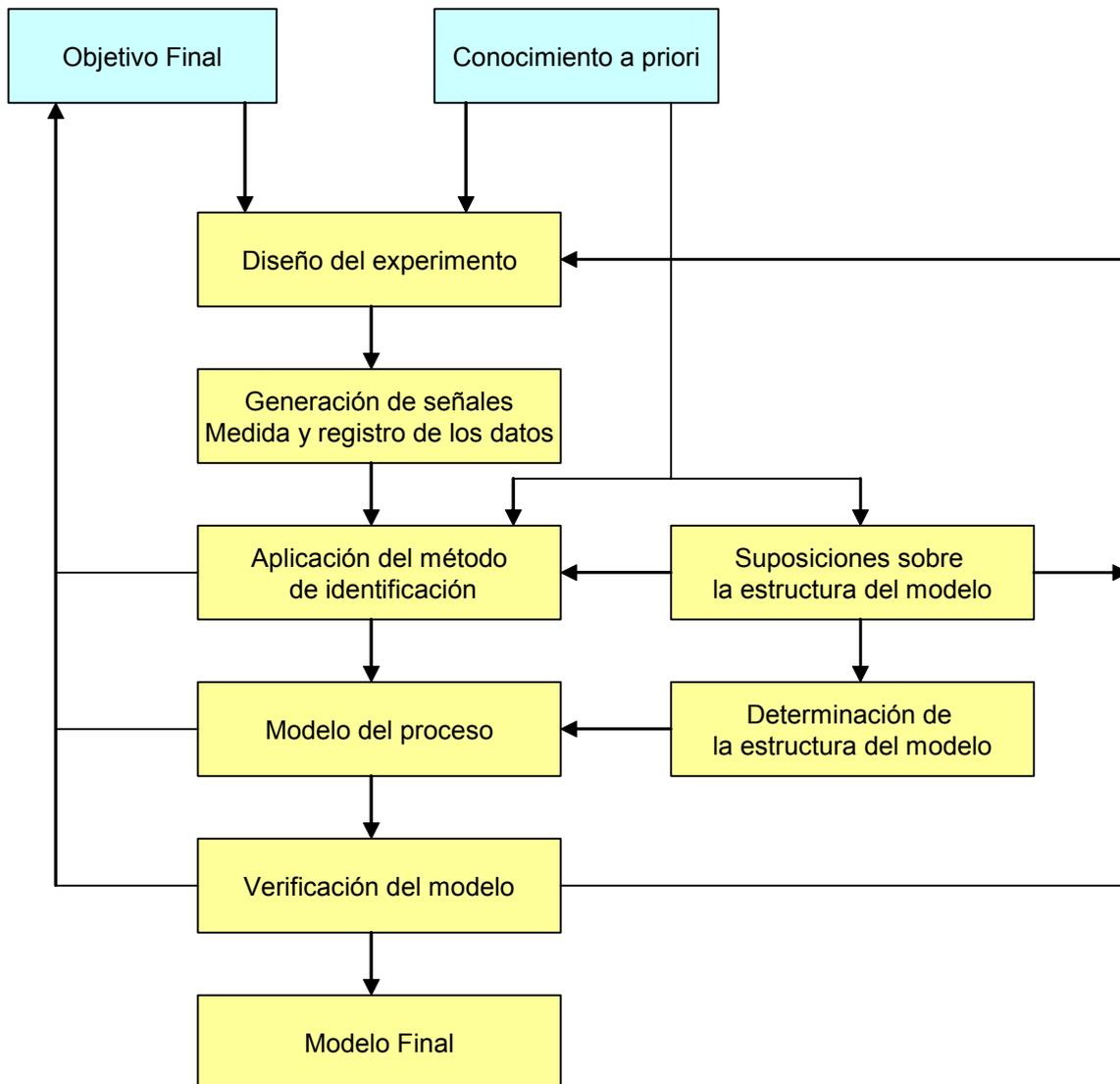


Figura 5.1: Procedimiento general en la identificación de un proceso

Objetivo Final	Tipo del modelo del proceso	Fiabilidad del modelo	Método de identificación
Verificación de modelos teóricos	Lineal / Continuo Paramétrico / No paramétrico	Media / Alta	Off-line Respuesta a un salto Respuesta en frecuencia Estimación de parámetros
Sintonía de parámetros de un controlador	Lineal No paramétrico Continuo	Baja para comportamiento de Entrada-Salida	Off-line Respuesta a un salto
Diseño asistido por computador de sistemas de control	Lineal Paramétrico / No paramétrico Discreto	Media para comportamiento de Entrada-Salida	Off-line/on-line Estimación de parámetros
Control digital adaptativo	Lineal Paramétrico Discreto	Media para comportamiento de Entrada-Salida	Estimación paramétrica on-line en lazo cerrado
Detección de fallos Monitorización de parámetros	Lineal/No lineal Paramétrico Continuo	Alta para los parámetros del proceso	Estimación on-line de los parámetros

Tabla 5.1: Relación entre el objetivo final del modelo y las especificaciones.

El *conocimiento a priori* del proceso se basa, por ejemplo, en la comprensión general del proceso, en leyes físicas a las que este obedece y en medidas previas. Todo ello permite disponer de una idea sobre el grado de linealidad del proceso, su varianza o invarianza con el tiempo, comportamiento integral o proporcional, constantes de tiempo dominantes, retardos, características del ruido, rango de algunos parámetros, valor de algunos de ellos, limitaciones de la estructura del modelo, etc. A partir de estas características se decide sobre el diseño del experimento y el método de identificación que se utilizará.

Para realizar el *diseño de los experimentos* y una vez elegido el tipo de modelo que se va a utilizar hay que intentar responder a las siguientes preguntas: ¿Bajo que condiciones se consigue el mejor comportamiento del algoritmo de estimación que se va a usar?. ¿Como funciona el algoritmo de identificación en las condiciones en que se va a ver obligado a funcionar?. En algunos casos será necesario realizar experimentos separados de las condiciones de operación, sometiendo al sistema a un conjunto muy rico de información de

entrada para conseguir las mejores prestaciones del algoritmo. En otros casos la identificación se tendrá que realizar mientras el sistema está siendo controlado.

Además de seleccionar la estructura del modelo entre las elecciones que se deben realizar se incluyen la selección y determinación de:

- Señales de entrada (amplitud, espectro, generación, almacenamiento).
- Periodo de muestreo.
- Duración del experimento (nº de medidas).
- Modo de identificación (lazo abierto o cerrado, on-line, off-line, valores iniciales, ...).
- Prefiltrado de las señales.
- Retardo.

Atendiendo a la estructura del modelo los métodos de identificación se suelen dividir en *paramétricos* y *no paramétricos*. En los métodos paramétricos los modelos se caracterizan por un vector de parámetros que se suele representar por  $\theta$ . El modelo asociado a dicho vector se suele representar por  $M(\theta)$ . Cuando  $\theta$  varía en un determinado conjunto tenemos un conjunto de modelos o una estructura de modelos  $M$ . El problema consiste en determinar aquel  $\theta$  que hace que  $M(\theta)$  sea, de todos los elementos de  $M$ , quien mejor ajuste los datos obtenidos por los experimentos.

En los métodos no paramétricos el modelo se describe por una curva, función o tabla que no necesitan necesariamente ser parametrizadas por un vector de parámetros de dimensión finita. Las técnicas de identificación no paramétrica más usuales son:

- *Análisis del transitorio*. La entrada se toma como un escalón o un impulso y la salida constituye el modelo.
- *Respuesta en frecuencia*. Se mide la respuesta en el estacionario de la salida del sistema a una entrada sinusoidal. Los cambios en la amplitud y la fase determinan la respuesta del sistema a dicha frecuencia.

- *Análisis de correlación.* La entrada es ruido blanco. Se obtiene una función normalizada de la correlación cruzada entre la entrada y la salida que proporciona una estima de la función de ponderación entre ambas señales.
- *Análisis espectral y de Fourier.* Se obtiene la respuesta en frecuencia del sistema a partir de la relación entre los espectros de las señales de salida y de entrada. Las entradas son arbitrarias.

Para las dos primeras técnicas anteriores también se suelen utilizar modelos paramétricos. Mientras que para las dos restantes sólo se suelen considerar modelos no paramétricos.

Por último el modelo identificado debe ser verificado y validado. Para ello se comparan los datos generados por el sistema con los que genera el modelo. El problema reside en encontrar el modelo que con la menor complejidad resulta adecuado para el uso final a que se dedica. Para este fin es necesario escoger un criterio, o un conjunto de criterios, que permitan decidir que modelo de la clase de modelos elegido es el que mejor ajusta los datos registrados en los experimentos. Como se indica en la Figura 5.1, en general el proceso de identificación es iterativo: dependiendo del resultado de la validación se puede cambiar la estructura del modelo y se repite todo el proceso.

Este tema se dedica al estudio de los aspectos prácticos de la identificación paramétrica de sistemas. En primer lugar se describe la identificación por el método de los mínimos cuadrados tanto en su formulación fuera de línea (off-line) como en su formulación recursiva. También se estudia el caso de la existencia de parámetros variables con el tiempo. En segundo lugar se estudia la identificación de sistemas lineales estocásticos. En tercer lugar se analiza la selección de la señal de entrada con que se va a excitar al sistema que se desea identificar. En cuarto lugar, se describe el problema de la identificación en lazo cerrado y su resolución. En quinto lugar se estudia la selección del periodo de muestreo. En sexto lugar se describe el tratamiento de los datos que van a ser utilizados en el proceso de identificación. En séptimo lugar se analiza la elección del tipo y estructura del modelo para el sistema que va a ser identificado. Finalmente se estudia las distintas técnicas de validación del modelo identificado.

## 5.2 IDENTIFICACION POR MINIMOS CUADRADOS

### 5.2.1 Planteamiento del problema

Se van a considerar en primer lugar modelos deterministas de sistemas dinámicos. Por deterministas se entienden aquellos sistemas en los que el modelo da una descripción completa de la respuesta del sistema o, también, que el ruido y las perturbaciones son de segunda importancia con respecto a los errores de modelado del sistema.

Sea el sistema descrito por la ecuación en diferencias

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + \dots + b_n u(t-n) \quad (5.1)$$

A esta ecuación se le conoce como modelo DARMA (Deterministic AutoRegressive Moving Average) o como modelo ARX (AutoRegressive eXogenous) y puede expresarse también de la siguiente forma:

$$y(t) = \theta_0^T \cdot \phi(t) = \phi^T(t) \cdot \theta_0 \quad (5.2)$$

donde  $\theta_0$  es el *vector de parámetros del proceso*

$$\theta_0^T = [a_{r1}, \dots, a_{rn}, b_{r1}, \dots, b_{rn}]$$

y  $\phi(t)$  es el *vector de regresión*

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} -y(t-1) \\ \vdots \\ -y(t-n) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-n) \end{bmatrix}$$

Supóngase que en un experimento para determinar los parámetros del modelo  $(a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n)$  se aplica la secuencia de entrada  $\{u(1) u(2) \dots u(t)\}$  y se observa la siguiente secuencia en la señal de salida  $\{y(1) y(2) \dots y(t)\}$ . Se pueden formar entonces pares de observaciones y de vectores de regresión

$$\{(y(i), \phi(i)) \mid i = 1, \dots, t\} \quad (5.3)$$

El problema que se desea resolver se enunciaría de la siguiente forma:

**Problema:** Determinar una estima  $\theta$  del vector de parámetros del proceso  $\theta_0$  de tal forma que las salidas del proceso estimadas por el siguiente modelo:

$$\hat{y}(t) = \phi^T(t) \cdot \theta \quad (5.4)$$

se ajusten lo mejor posible a las salidas medidas experimentalmente para el sistema real (5.2).

### 5.2.2 Estima de mínimos cuadrados

El problema planteado en la sección anterior se puede resolver mediante estimación por mínimos cuadrados, cuya formulación se describe en esta sección.

De acuerdo con (5.3) se tienen  $t$  medidas, con lo que es posible estimar  $t$  salidas:

$$\begin{aligned} i = 1 & \quad \hat{y}(1) = \phi^T(1) \cdot \theta \\ i = 2 & \quad \hat{y}(2) = \phi^T(2) \cdot \theta \\ & \quad \cdot \\ & \quad \cdot \\ i = t & \quad \hat{y}(t) = \phi^T(t) \cdot \theta \end{aligned}$$

que se pueden escribir en notación matricial como:

$$\hat{Y} = \Phi \cdot \theta$$

o equivalentemente como:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(0) & \cdot & \cdot & 0 & u(0) & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ -y(t-1) & \cdot & \cdot & -y(t-n) & u(t-1) & \cdot & \cdot & u(t-n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{a}_n \\ \hat{b}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{b}_n \end{bmatrix}$$

Se observa que:  $\hat{Y}$  es un vector de dimensión  $t \times 1$ ,  $\Phi$  es una matriz de dimensión  $t \times 2 \cdot n$  y es un vector de dimensión  $2 \cdot n \times 1$ .

Una forma de determinar  $\theta$  sería elegir el número de medidas  $t$  igual al número de parámetros  $2n$ , con lo que  $\Phi$  es una matriz cuadrada y se resuelve la ecuación para  $\theta$ . Sin embargo, en la práctica, debido a la presencia de ruido, perturbaciones y desajuste del modelo resulta conveniente utilizar un número de medidas superior al número de parámetros a identificar:  $t > 2n$ . Con los datos adicionales es posible realizar una mejor estimación.

Los *errores o residuos* entre los valores medidos en el sistema real y los estimados por el modelo están dados por las ecuaciones:

$$\varepsilon(i) = y(i) - \hat{y}(i) = y(i) - \phi^T(i) \cdot \theta$$

Al igual que para las medidas y los vectores de regresión, los errores se agrupan en un vector:

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} = Y - \hat{Y} = Y - \Phi \cdot \theta$$

donde  $E$  es un *vector error* de dimensión  $t \times 1$ . A los errores  $\varepsilon(\cdot)$  se les denomina *residuos*.

Para determinar  $\theta$  se usa la siguiente función de coste o ponderación (Gauss, siglo XVIII)

$$V(\theta, t) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^t \varepsilon(i)^2 = \frac{1}{2} E^T E = \frac{1}{2} \|E\|_2^2$$

Es decir, la suma de los cuadrados de los errores o residuos, de aquí el nombre de *estima de mínimos cuadrados*.

El objetivo es encontrar aquel vector de parámetros  $\hat{\theta}$  que minimice la función de coste.

$$V(\hat{\theta}) = \min (V(\theta))$$

A dicho vector  $\hat{\theta}$  se le denomina *estima de mínimos cuadrados*. Y verifica la denominada como *ecuación normal*:

$$(\Phi^T \cdot \Phi) \cdot \hat{\theta} = \Phi^T \cdot Y \quad (5.5)$$

Si la matriz  $(\Phi^T \cdot \Phi)$  es no singular, el mínimo es único y está dado por la ecuación:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \cdot \Phi)^{-1} \cdot \Phi^T \cdot Y \quad (5.6)$$

Es decir, se requiere que  $(\Phi^T \cdot \Phi)$  sea invertible para ello debe poseer rango completo.

Esta ecuación puede también escribirse en la forma:

$$\hat{\theta}(t) = \left( \sum_{i=1}^t \phi(i) \phi^T(i) \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^t \phi(i) y(i) \right) = P(t) \left( \sum_{i=1}^t \phi(i) y(i) \right) \quad (5.7)$$

A  $P(t)$  se le denomina *matriz de covarianza de las estimas*.

Resulta interesante examinar algunas características estadísticas de la estima de mínimos cuadrados. Para ello supóngase que el proceso real del que se han tomado datos de entrada-salida satisface la siguiente ecuación:

$$y(t) = \phi^T(t) \cdot \theta_0 + e(t)$$

Supuesto que  $e(t)$  es una variable estocástica de media nula y varianza  $\sigma^2$  entonces la estima  $\hat{\theta}$  de  $\theta_0$  verifica:

- 1) Es una estima *no polarizada*, es decir, es independiente del ruido  $e(t)$  o de cualquiera de sus parámetros estadísticos.
- 2) Su matriz de covarianza es:

$$\text{covarianza} = \sigma^2 (\Phi^T \cdot \Phi)^{-1} = \sigma^2 \cdot P$$

♦ **Ejemplo 5.1:** *Estima de una constante*

Se supone que el proceso a identificar es una constante más un ruido aleatorio  $e(t)$  de varianza  $\sigma^2$ :

$$y(t) = b_0 + e(t) \quad (e1)$$

Se considera como modelo para la identificación

$$\hat{y}(t) = b \quad (\text{e2})$$

En este caso  $\phi(t) = 1$ ,  $\theta = b$ , .Se tienen  $t$  medidas

$$\begin{aligned} i = 1 & \quad \hat{y}(1) = 1 \cdot b \\ i = 2 & \quad \hat{y}(2) = 1 \cdot b \\ & \quad \cdot \\ & \quad \cdot \\ i = t & \quad \hat{y}(t) = 1 \cdot b \end{aligned}$$

Luego

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \cdot b \Rightarrow \Phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}_{t \times 1} \quad \theta = b$$

Además

$$\sum_{i=1}^t \phi(i) \phi^T(i) = \sum_{i=1}^t 1 = t$$

$$\sum_{i=1}^t \phi(i) y(i) = \sum_{i=1}^t y(i)$$

Aplicando la ecuación (5.7) se obtiene la siguiente estima de mínimos cuadrados

$$\hat{\theta}(t) = b = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t y(i) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t [b_0 + e(i)] = b_0 + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t [e(i)] \quad (\text{e3})$$

Si  $t \rightarrow \infty$

$$\hat{\theta}(t) = b = b_0 + E[e(t)]$$

Se observa que la estima esta polarizada por el valor medio del ruido. Por tanto, el valor estimado tiende al valor real  $b_0$  si el ruido sobre la medida es de media nula.

La varianza de la estima es:

$$\begin{aligned}\text{var } b &= E b^2 - (Eb)^2 = b_0^2 + 2b_0 E \left( \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t e(i) \right) + E \left( \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t e(i) \right)^2 - b_0^2 \\ &= \frac{1}{t} \left( \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t E e(i)^2 \right) = \frac{1}{t} \sigma^2\end{aligned}$$

◆

◆ **Ejemplo 5.2:** Sistema de primer orden

El proceso a identificar es:

$$y(t) = -a_0 y(t-1) + b_0 u(t-1) + e(t) + c_0 e(t-1) \quad (\text{e4})$$

donde  $e(t)$  es ruido aleatorio de varianza  $\sigma^2$  y  $u(t)$  es una entrada aleatoria de varianza  $\lambda^2$  y media nula.

El modelo que se considera para la identificación es:

$$\hat{y}(t) = -a y(t-1) + b u(t-1) \quad (\text{e5})$$

En este caso:

$$\phi^T(t) = [-y(t-1) \ u(t-1)], \theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Para construir la ecuación normal (5.5) hay que hacer las siguientes multiplicaciones de matrices

$$\Phi^T \cdot \Phi = \begin{bmatrix} -y(1-1) & \cdot & -y(i-1) & \cdot & -y(t-1) \\ u(1-1) & \cdot & u(i-1) & \cdot & u(t-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -y(1-1) & u(1-1) \\ \cdot & \cdot \\ -y(i-1) & u(i-1) \\ \cdot & \cdot \\ -y(t-1) & u(t-1) \end{bmatrix}_{t \times 1}$$

$$\Phi^T \cdot Y = \begin{bmatrix} -y(1-1) & \cdot & -y(i-1) & \cdot & -y(t-1) \\ u(1-1) & \cdot & u(i-1) & \cdot & u(t-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(1) \\ \cdot \\ y(i) \\ \cdot \\ y(t) \end{bmatrix}_{t \times 1}$$

que se pueden expresar en la forma:

$$\Phi^T \cdot \Phi = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^t y^2(i-1) & -\sum_{i=1}^t y(i-1) \cdot u(i-1) \\ -\sum_{i=1}^t y(i-1) \cdot u(i-1) & \sum_{i=1}^t u^2(i-1) \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T \cdot Y = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^t y(i) \cdot y(i-1) \\ \sum_{i=1}^t y(i) \cdot u(i-1) \end{bmatrix}$$

Luego la ecuación normal es:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^t y^2(i-1) & -\sum_{i=1}^t y(i-1) \cdot u(i-1) \\ -\sum_{i=1}^t y(i-1) \cdot u(i-1) & \sum_{i=1}^t u^2(i-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^t y(i) \cdot y(i-1) \\ \sum_{i=1}^t y(i) \cdot u(i-1) \end{bmatrix}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por  $1/t$  y haciendo la aproximación:

$$\frac{1}{t} \cdot \sum_{i=1}^t x^2(i-1) \approx \frac{1}{t} \cdot \sum_{i=1}^t x^2(i)$$

la ecuación normal se puede expresar en la forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{t} \cdot \sum_{i=1}^t y^2(i) & -\frac{1}{t} \cdot \sum_{i=1}^t y(i) \cdot u(i) \\ -\frac{1}{t} \cdot \sum_{i=1}^t y(i) \cdot u(i) & \frac{1}{t} \cdot \sum_{i=1}^t u^2(i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{t} \cdot \sum_{i=1}^t y(i) \cdot y(i-1) \\ \frac{1}{t} \cdot \sum_{i=1}^t y(i) \cdot u(i-1) \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtendrían las estima de mínimos cuadrados de los parámetros  $a$  y  $b$ :

$$a = \frac{-\left(\sum_{i=1}^t u^2(i-1)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^t y(i) \cdot y(i-1)\right) + \left(\sum_{i=1}^t y(i-1) \cdot u(i-1)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^t y(i) \cdot u(i-1)\right)}{\left(\sum_{i=1}^t y^2(i-1)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^t u^2(i-1)\right) - \left(\sum_{i=1}^t y(i-1) \cdot u(i-1)\right)^2}$$

$$b = \frac{-\left(\sum_{i=1}^t y(i-1) \cdot u(i-1)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^t y(i) \cdot y(i-1)\right) + \left(\sum_{i=1}^t y^2(i-1)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^t y(i) \cdot u(i-1)\right)}{\left(\sum_{i=1}^t y^2(i-1)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^t u^2(i-1)\right) - \left(\sum_{i=1}^t y(i-1) \cdot u(i-1)\right)^2}$$

Si  $t \rightarrow \infty$  la ecuación normal se puede expresar en la forma:

$$\begin{bmatrix} E[y^2(t)] & -E[y(t) \cdot u(t)] \\ -E[y(t) \cdot u(t)] & E[u^2(t)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E[y(t) \cdot y(t-1)] \\ E[y(t) \cdot u(t-1)] \end{bmatrix} \quad (\text{e6})$$

Hay que calcular los valores esperados de diferentes magnitudes. Como la entrada  $u$  y el ruido  $e$  son independientes se cumple:

$$E[e(t) \cdot e(t-1)] = 0$$

$$E[u(t) \cdot u(t-1)] = 0$$

$$E[e(t) \cdot u(t)] = 0$$

Por otra parte

$$E[e(i)^2] = \sigma^2$$

$$E[u(i)^2] = \lambda^2$$

Además como el valor el valor pasado de la salida  $y$  es independiente del valor actual de  $e$  o de  $u$ , se cumple:

$$E[y(t-1) \cdot u(t)] = 0$$

$$E[y(t-1) \cdot e(t)] = 0$$

Teniendo en cuenta toda esta información, en primer lugar, se va a calcular  $E[y(t) \cdot u(t)]$ :

$$\begin{aligned} E[y(t) \cdot u(t)] &= E[(-a_0 y(t-1) + b_0 u(t-1) + e(t) + c_0 e(t-1)) \cdot u(t)] = \\ &= E[-a_0 y(t-1) \cdot u(t)] + E[b_0 u(t-1) \cdot u(t)] + E[e(t) \cdot u(t)] + E[c_0 e(t-1) \cdot u(t)] = \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

En segundo lugar se va a calcular  $E[y(t) \cdot u(t-1)]$

$$\begin{aligned} E[y(t) \cdot u(t-1)] &= E[(-a_0 y(t-1) + b_0 u(t-1) + e(t) + c_0 e(t-1)) \cdot u(t-1)] = \\ &= E[-a_0 y(t-1) \cdot u(t-1)] + E[b_0 u(t-1) \cdot u(t-1)] + E[e(t) \cdot u(t-1)] + E[c_0 e(t-1) \cdot u(t-1)] = \\ &= 0 + b_0 \cdot \lambda^2 + 0 + 0 = b_0 \cdot \lambda^2 \end{aligned}$$

En tercer lugar se va a calcular  $E[y(t)^2]$

$$E[y(t)^2] = E[(-a_0 y(t-1) + b_0 u(t-1) + e(t) + c_0 e(t-1))^2]$$

desarrollando el cuadrado, tomando el valor esperado, y considerando únicamente los términos no nulos se obtiene la siguiente expresión

$$E[y(t)^2] = a_0^2 \cdot E[y^2(t-1)] - 2 \cdot a_0 \cdot c_0 \cdot E[e(t-1) \cdot y(t-1)] + b_0^2 \cdot E[u^2(t-1)] + E[e^2(t)] + c_0^2 \cdot E[e^2(t-1)] \quad (e.7)$$

Se observa que para poder obtener  $E[y(t)^2]$  se requiere calcular  $E[e(t-1) \cdot y(t-1)]$ :

$$\begin{aligned} E[y(t-1) \cdot e(t-1)] &= E[(-a_0 y(t-2) + b_0 u(t-2) + e(t-1) + c_0 e(t-2)) \cdot e(t-1)] = \\ &= E[-a_0 y(t-2) \cdot e(t-1)] + E[b_0 u(t-2) \cdot e(t-1)] + E[e(t-1) \cdot e(t-1)] + E[c_0 e(t-2) \cdot e(t-1)] = \\ &= 0 + 0 + \sigma^2 + 0 = \sigma^2 \end{aligned}$$

Asimismo si se consideran las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned} E[y(t-1)^2] &\approx E[y(t)^2] \\ E[u(t-1)^2] &\approx E[u(t)^2] = \lambda^2 \\ E[e(t-1)^2] &\approx E[e(t)^2] = \sigma^2 \end{aligned}$$

entonces la ecuación (e.7) toma la forma

$$E[y(t)^2] = a_0^2 \cdot E[y(t)^2] - 2 \cdot a_0 \cdot c_0 \cdot \sigma^2 + b_0^2 \cdot \lambda^2 + \sigma^2 + c_0^2 \cdot \sigma^2$$

Luego, despejando  $E[y(t)^2]$  se obtiene:

$$E[y^2(t)] = \frac{b_0^2 \lambda^2 + (1 + c_0^2 - 2a_0 c_0) \sigma^2}{1 - a_0^2}$$

Finalmente se va a calcular  $E[y(t) \cdot y(t-1)]$

$$\begin{aligned} E[y(t) \cdot y(t-1)] &= E[(-a_0 y(t-1) + b_0 u(t-1) + e(t) + c_0 e(t-1)) \cdot y(t-1)] = \\ &= E[-a_0 y(t-1) \cdot y(t-1)] + E[b_0 u(t-1) \cdot y(t-1)] + E[e(t) \cdot y(t-1)] + E[c_0 e(t-1) \cdot y(t-1)] = \\ &= -a_0 \cdot E[y(t)^2] + 0 + 0 + c_0 \cdot \sigma^2 = \\ &= \frac{-a_0 \cdot b_0^2 \lambda^2 - a_0 \cdot (1 + c_0^2 - 2a_0 c_0) \sigma^2}{1 - a_0^2} + c_0 \cdot \sigma^2 = \\ &= \frac{-a_0 b_0^2 \lambda^2 + (c_0 - a_0)(1 - a_0 c_0) \sigma^2}{1 - a_0^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación normal toma la forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{b_0^2 \lambda^2 + (1 + c_0^2 - 2a_0 c_0) \sigma^2}{1 - a_0^2} & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_0 b_0^2 \lambda^2 - (c_0 - a_0)(1 - a_0 c_0) \sigma^2}{1 - a_0^2} \\ b_0 \cdot \lambda^2 \end{bmatrix}$$

Resolviéndola se obtienen las siguientes estimas:

$$a = \frac{a_0 b_0^2 \lambda^2 - (c_0 - a_0)(1 - a_0 c_0) \sigma^2}{b_0^2 \lambda^2 + (1 + c_0^2 - 2a_0 c_0) \sigma^2}$$

$$b = b_0$$

Que se puede expresar equivalentemente en la forma:

$$a = a_0 + \frac{-c_0(1 - a_0^2) \sigma^2}{b_0^2 \lambda^2 + (1 + c_0^2 - 2a_0 c_0) \sigma^2} \quad (\text{e8})$$

$$b = b_0$$

Se observa que la estima  $a$  del parámetro  $a_0$  está *polarizada*.

Si el sistema no tiene ruido correlacionado ( $c_0=0$ ) la estima de los parámetros coincide con el valor real. Sin embargo, si el ruido está correlacionado no se puede estimar bien el parámetro  $a_0$ , se dice que la estima está polarizada. En este caso no importa cuantas medidas se tomen ya que siempre se obtendrá una medida polarizada.

Por otro parte, si la relación señal- ruido ( $\lambda^2/\sigma^2$ ) aumenta, disminuye la polarización en la estima  $a$ .

$$a = a_0 - \lim_{\frac{\lambda^2}{\sigma^2} \rightarrow \infty} \left( \frac{c_0(1 - a_0^2)}{b_0^2 \frac{\lambda^2}{\sigma^2} + (1 + c_0^2 - 2a_0 c_0)} \right) = a_0,$$

En un sistema con  $a_0 = -0.8$ ,  $b_0 = 1$ ,  $c_0 = -0.8$ ,  $\lambda = \sigma = 1$  se obtiene la estima  $a = -0.588$ ,  $b = 1.0$ .

◆

## 5.2.3 Estima de mínimos cuadrados recursiva

### 5.2.3.1 Formulación

En el método de identificación de los mínimos cuadrados descrito en la sección anterior los datos se registran y almacenan y después se realizan los cálculos de identificación utilizando todas las medidas a la vez. La identificación se puede hacer, a partir de los datos

almacenados, en un único paso, como en el método anterior, o bien mediante algoritmos iterativos, como en el método de máxima verosimilitud. Este tipo de métodos se denominan "off-line" o de *procesamiento por lotes (batch)*.

En los *métodos recursivos u "on-line"* la estima de los parámetros se realiza procesando cada medida que se realiza para obtener una nueva estima. Esto quiere decir que si existe una estima  $\theta(t-1)$  basada en los datos del experimento hasta el tiempo  $t-1$ , el valor  $\theta(t)$  se calcula mediante alguna *modificación sencilla* de  $\theta(t-1)$ , teniendo en cuenta en los cálculos los datos en  $t$ .

Las características generales de estos métodos de identificación son:

- Forman parte de los sistemas adaptativos.
- No se almacenan todos los datos a la vez, por lo que sus necesidades de memoria son modestas.
- Se pueden implementar como algoritmos de tiempo real para el seguimiento de parámetros variables con el tiempo.
- Se pueden usar como elemento inicial en los algoritmos de detección de fallos.

Por la definición de  $P(t)$  dada en (5.7)

$$P(t) = \left( \sum_{i=1}^t \phi(i)\phi^T(i) \right)^{-1} \quad (5.8)$$

se sigue que

$$P^{-1}(t) = \left( \sum_{i=1}^{t-1} \phi(i)\phi^T(i) + \phi(t)\phi^T(t) \right)$$

luego

$$P^{-1}(t) = P^{-1}(t-1) + \phi(t)\phi^T(t) \quad (5.9)$$

Si se evalúa la ecuación normal en el instante  $t-1$

$$\left( \sum_{i=1}^{t-1} \phi(i) \cdot \phi^T(i) \right) \cdot \hat{\theta}(t-1) = \left( \sum_{i=1}^{t-1} \phi(i) \cdot y(i) \right)$$

la estima de mínimos cuadrados se puede expresar en la forma:

$$\hat{\theta}(t) = P(t) \cdot \left( \sum_{i=1}^t \phi(i) \cdot y(i) \right) = P(t) \cdot \left( \sum_{i=1}^{t-1} \phi(i) \cdot y(i) + \phi(t) \cdot y(t) \right)$$

con lo que

$$\hat{\theta}(t) = P(t) \cdot [P^{-1}(t-1) \hat{\theta}(t-1) + \phi(t) \cdot y(t)] \quad (5.10)$$

Como

$$P^{-1}(t-1) = P^{-1}(t) - \phi(t) \phi^T(t) \quad (5.11)$$

Sustituyendo la expresión anterior en (5.10) se obtiene:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P(t) \cdot \phi(t) \cdot [y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t-1)] \quad (5.12)$$

El *error de predicción* es la diferencia entre la salida actual  $y(t)$  del sistema y aquella ( $\hat{y}(t | t-1)$ ) que para el tiempo  $t$  produce el modelo a partir de la estima en el tiempo  $t-1$  ( $\hat{\theta}(t-1)$ ).

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t | t-1) = y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t-1) \quad (5.13)$$

Si  $\varepsilon(t)$  es pequeño la estima es *buena* y no debe modificarse mucho.

La *ganancia de Kalman* se define como

$$K(t) = P(t) \cdot \phi(t)$$

debe interpretarse como un factor de peso o de ganancia que indica cuanto modificará el *error de predicción* a cada uno de los parámetros.

Se tiene por tanto el siguiente *algoritmo recursivo de estimación por mínimos cuadrados*:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + K(t)\varepsilon(t) \\
K(t) &= P(t)\phi(t) \\
\varepsilon(t) &= y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

La estima en el instante actual es una corrección de la estima en el instante anterior. Además la ganancia  $K$  es variable y depende de  $P$ . A su vez  $P$  también es variable y depende de la excitación de entrada  $u$ .

Se observa en el algoritmo que es necesario calcular  $P(t) = [\Phi^T \Phi]^{-1}$  lo que requiere la inversión de una matriz en cada paso. Esto supone una gran carga computacional. Utilizando el denominado “Lema de inversión de una matriz” es posible expresar  $P(t)$  de la siguiente forma:

$$P(t) = P(t-1) - P(t-1)\phi(t)\phi^T(t)P(t-1)[1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)]^{-1} \tag{5.15}$$

En la ecuación anterior aparece la inversión de un escalar pero no de una matriz. El algoritmo (5.14) se puede simplificar a la forma:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + K(t)[y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)] \\
K(t) &= P(t)\phi(t) = P(t-1)\phi(t)[1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)]^{-1} \\
P(t) &= (I - K(t)\phi^T(t))P(t-1)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

◆ **Ejemplo 5.3:** *Estima de una constante*

Para el sistema y el modelo dados por (e1) y (e2) respectivamente la estima  $\theta=b$  dada por (e3) se puede poner de forma recursiva, teniendo en cuenta que  $\phi(t) \equiv 1$ ,

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= \frac{1}{t} \left( \sum_{i=1}^{t-1} y(i) + y(t) \right) = \frac{1}{t} [(t-1)\theta(t-1) + y(t)] = \\
&= \theta(t-1) + \frac{1}{t} [y(t) - \theta(t-1)]
\end{aligned} \tag{e9}$$

La varianza de  $\theta(t)$  está dada, escalando por el factor  $\sigma^2$ , por

$$P(t) = (\Phi^T \Phi)^{-1} = \frac{1}{t}$$

De forma recursiva

$$P^{-1}(t) = t = P^{-1}(t-1) + 1$$

de donde se obtiene

$$P(t) = \frac{1}{P^{-1}(t-1) + 1} = \frac{P(t-1)}{1 + P(t-1)} \quad (\text{e10})$$

La ecuación (5.15) es en este caso

$$P(t) = P(t-1) - \frac{P^2(t-1)}{1 + P(t-1)} = \frac{P(t-1)}{1 + P(t-1)}$$

que coincide con (e10). Ahora

$$K(t) = P(t) = 1/t$$

y teniendo en cuenta que  $\phi(t) \equiv 1$  se obtiene a partir de (5.16)

$$\theta(t) = \theta(t-1) + \frac{1}{t} [y(t) - \theta(t-1)]$$

que coincide con (e9).

♦

### 5.2.3.2 Elección de los valores iniciales

Para comenzar la identificación en el algoritmo recursivo son necesarios unos valores iniciales para  $\hat{\theta}(0)$  y para  $P(0)$ . Como  $P(t)$  es, salvo un factor de  $\sigma^2$ , la covarianza de la estima es razonable pensar en  $\hat{\theta}(0)$  como una estima a priori del vector real de parámetros y en  $P(0)$  como una indicación de la confianza en dicha estima.

Si  $P(0)$  es pequeño también lo será  $K(t)$  para todos los valores de  $t$ , y eso hará que los parámetros no varíen mucho de actualización a actualización; si por el contrario,  $P(0)$  es grande, la estima pronto se alejará del valor  $\hat{\theta}(0)$ . Si no se dispone de información a priori del vector de parámetros se suele escoger

$$\theta(0) = 0, \quad P(0) = \rho I$$

donde  $\rho$  es un valor elevado.

Se puede optar también por realizar una estimación inicial por el método de los mínimos cuadrados ordinarios. Supongamos que se realiza esto hasta el instante  $t_0$ , de modo que se tiene

$$P(t_0) = (\Phi'(t_0)\Phi(t_0))^{-1}$$
$$\theta(t_0) = P(t_0)\Phi'(t_0)Y(t_0)$$

Se pueden considerar como valores iniciales  $\theta(0) = \theta(t_0)$ ,  $P(0) = P(t_0)$ . En un tiempo  $t$  se verificará

$$P(t) = (P^{-1}(t_0) + \Phi'(t)\Phi(t))^{-1}$$

$P(t)$  se puede hacer tan próximo a  $(\Phi'(t)\Phi(t))^{-1}$  como se desee eligiendo  $P(t_0)$  suficientemente grande.

#### 5.2.4 Parámetros variables con el tiempo

La matriz  $P$  satisface la ecuación

$$P^{-1}(t) = P^{-1}(t-1) + \phi(t)\phi^T(t)$$

Se observa que  $P$  crece de forma monótona con el tiempo, luego la ganancia del algoritmo de mínimos cuadrados  $K(t) \rightarrow 0$ , cuando  $t$  crece. Esto es, llega un momento en que el estimador de mínimos cuadrados se *desconecta*.

Este comportamiento puede resultar adecuado si los parámetros son invariantes con el tiempo, pero no si el algoritmo debe seguir de forma continua a parámetros variables con el tiempo. Desde el punto de vista del control adaptativo, resulta adecuado para controladores autosintonizantes (controladores que se pueden sintonizar pero no ajustar a parámetros variables con el tiempo) pero no para controladores que necesitan sintonizarse inicialmente y siempre que cambie la dinámica del proceso (controladores con adaptación continua).

Existen numerosas soluciones para el seguimiento de los parámetros variables con el tiempo, destacan por su importancia los siguientes métodos:

- Introducción de un factor de olvido (mínimos cuadrados ponderados).
- Método del gradiente

- Modificación de la matriz de covarianza
- Reinicialización de la matriz de covarianza.

### 5.2.4.1 Introducción de un factor de olvido (mínimos cuadrados ponderados)

Si los parámetros están variando es lógico considerar que los datos mas recientes aportan más información sobre la estructura actual del sistema que los anteriores. En consecuencia, se les debe aplicar más valor (peso) a los datos recientes que a los pasados, los cuales se deben irán olvidando de forma exponencial. Esto se puede hacer considerando como función a minimizar

$$V(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t w_i \cdot \varepsilon(i)^2$$

donde  $w_i$  es el peso.

Una ponderación muy utilizada es

$$w_i = \lambda^{-i}, \quad 0 < \lambda \leq 1$$

donde  $\lambda$  *factor de olvido*, un valor usual de este parámetro es  $0.9 < \lambda \leq 0.995$ .

En esta función de coste al valor actual se le da un peso unidad ( $\lambda^0=1$ ), pero a los que tuvieron lugar hace  $n$  unidades de tiempo se les pesa por  $\lambda^n$ .

El olvido también se puede introducir de forma equivalente en la forma

$$P^{-1}(t) = \lambda P^{-1}(t-1) + \phi(t)\phi^T(t) \quad (5.17)$$

Se tiene por tanto el siguiente algoritmo recursivo:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + K(t)[y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)] \\ K(t) &= P(t)\phi(t) = P(t-1)\phi(t)[\lambda \cdot 1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)]^{-1} \\ P(t) &= (I - K(t)\phi^T(t))P(t-1) / \lambda \end{aligned} \quad (5.18)$$

De forma aproximada se puede considerar que el número de medidas o puntos significativos que entran en la estima es de  $1/(1-\lambda)$ .

El método tiene la desventaja de que el olvido se produce aunque no haya aporte de nueva información en los datos. Así, en sistemas servo con pocas perturbaciones, la mayor excitación al sistema se produce por cambios en el punto de consigna. Tales cambios pueden ser muy irregulares y si no existen cambios el vector  $P\phi$  es cero. En este caso, como se ve en la ecuación (5.17)

$$P(t) = \frac{1}{\lambda} P(t-1)$$

Luego  $P$  crece de forma exponencial si  $\lambda < 1$ .

Si no existe aporte de información durante mucho tiempo,  $P$  puede hacerse muy grande un pequeño cambio en la señal de control puede llevar entonces a cambios bruscos en el valor de los parámetros y de la señal de salida produciéndose el fenómeno conocido como *estallido*.

Un modo de evitar el fenómeno del estallido consiste en variar el factor de olvido  $\lambda$  dependiendo de la información contenida en los datos. Un algoritmo sencillo de este tipo es:

$$\lambda(t) = 1 - \lambda' \frac{\varepsilon^2(t)}{\varepsilon^2} \quad (5.19)$$

donde  $\varepsilon(t)$  es el error de predicción,  $\varepsilon^2$  es el valor medio de  $\varepsilon^2(t)$  sobre un cierto periodo de tiempo y  $\lambda'$  es una constante pequeña (1/1000).

Otra ley de adaptación es

$$\lambda(t) = 1 - \lambda' \frac{\varepsilon^2(t)}{1 + \phi'(t)P(t-1)\phi(t)} \quad (5.20)$$

Esta ley es similar a la anterior ya que  $1 + \phi'(t)P(t-1)\phi(t)$  es proporcional a  $\varepsilon^2$ .

De las ecuaciones (5.19) y (5.20) se deduce que si ocurre un cambio en la planta  $\varepsilon^2(t)$  aumenta y  $\lambda(t)$  disminuye, por lo que aumenta  $P$  produciéndose la adaptación. Después de la adaptación  $\varepsilon^2(t)$  disminuye y  $\lambda(t)$  vuelve a un valor muy próximo a uno.

Los algoritmos no evitan que  $P$  no crezca demasiado. Para evitar esto se puede examinar la traza de  $P$  ( $trP$ )

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{12n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{22n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{2n1} & P_{2n2} & \dots & P_{2n2n} \end{bmatrix}_{(2n \times 2n)} \quad \text{tr}P = \sum_{i=1}^{2n} P_{ii}$$

y si cae por debajo de un valor umbral entonces  $\lambda=1$  y se pasa a los mínimos cuadrados sin factor de olvido.

#### 5.2.4.2 Método del gradiente

Este algoritmo se obtiene del método de los mínimos cuadrados tomando  $P=I$  y haciendo

$$K(t) = \frac{\gamma \phi(t)}{\alpha + \phi'(t)\phi(t)}$$

donde normalmente  $\alpha = 1$ , y  $\gamma$  es un valor constante que se elige como un compromiso entre velocidad de seguimiento (velocidad grande si  $\gamma$  es grande) e influencia del ruido sobre las fluctuaciones de  $\theta$  ( si  $\gamma$  es pequeño también lo son las fluctuaciones de  $\theta$ ). Normalmente se elige

$$\gamma \tau_{max} \ll 1 \rightarrow \gamma \ll \frac{1}{\tau_{max}}$$

donde

$$\tau_{max} = \text{maximo autovalor de } E\{\phi(t)\phi'(t)\}.$$

Este algoritmo tiene la ventaja de su simplicidad, reduciendo el número de cálculo necesario considerablemente, pero tiene la desventaja de una velocidad de convergencia muy lenta por lo que sólo se suele utilizar en el caso de que los parámetros varíen muy lentamente.

#### 5.2.4.3 Modificación de la Matriz de Covarianza.

Este método se suele utilizar en lugar del método del factor de olvido en aquellos casos en que los parámetros varían de forma continua. El método surge al considerar el método de los mínimos cuadrados como un filtro de Kalman con la ecuación de estado

$$\begin{aligned}x(t+1) &= x(t) \\ y(t) &= \phi'(t)x(t) + e(t)\end{aligned}$$

donde el vector de estado está formado por los parámetros del modelo:  $x=\theta$ . El filtro de Kalman aplicado a la ecuación de estado anterior lleva directamente al método de los mínimos cuadrados recursivos. Una forma de modificar el algoritmo de estimación para que pueda seguir a parámetros variables con el tiempo es considerar que estos tienen una deriva o un camino aleatorio, lo que lleva a

$$x(t+1) = x(t) + v(t)$$

donde  $v(t)$  es una secuencia aleatoria no correlacionada de media nula y covarianza  $R$ .

Se tiene así el algoritmo siguiente:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \theta(t-1) + K(t)\varepsilon(t) \\ \varepsilon(t) &= y(t) - \phi'(t)\theta(t-1) \\ K(t) &= P(t)\phi(t) = P(t-1)\phi(t)[1 + \phi'(t)P(t-1)\phi(t)]^{-1} \\ P(t) &= (I - K(t)\phi'(t))P(t-1) + R\end{aligned}$$

Ahora la matriz  $P$  no puede decrecer hacia cero, lo que evita la desconexión del algoritmo y los parámetros se estarán identificando continuamente. Cuanto mayor sea la velocidad de variación de los parámetros mayor es  $R$ , y  $P$  permanece en un valor estacionario elevado. Se debe evitar que  $P$  pueda crecer demasiado, para lo que se examina la traza de  $P$  y si crece demasiado no se le añade la matriz  $R$ .

Con este método la velocidad de cambio de los parámetros se puede seleccionar de forma individual, seleccionando de forma adecuada los distintos elementos de la diagonal de la matriz  $R$ .

#### 5.2.4.4 Reinicialización de la Matriz de Covarianza.

El caso de que los parámetros de la planta varíen de forma abrupta se puede tratar reinicializando de forma periódica la matriz  $P$  al valor  $\rho I$ , donde  $\rho$  es un valor elevado. La inicialización de  $P$  se puede realizar en función de su traza, iniciándose cada vez que esta caiga por debajo de un determinado valor.

### 5.3 IDENTIFICACION DE SISTEMAS LINEALES ESTOCASTICOS

Considérese un sistema que obedece a la ecuación

$$A_0(q^{-1})y(t) = B_0(q^{-1})u(t) + v(t)$$

o de forma equivalente

$$y(t) = \phi(t)' \theta_0 + v(t)$$

Donde  $\theta_0$  es el vector de parámetros reales. Supóngase que  $v(t)$  es una señal estocástica independiente de la señal de entrada. Si la estima proporcionada por el método de mínimos cuadrados es buena, el valor  $\theta$  obtenido de la ecuación (5.7) debe estar próximo al valor  $\theta_0$ . Para ver si esto es cierto se calcula la diferencia entre estos valores

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= \left( \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \phi(i)\phi'(i) \right)^{-1} \left( \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \phi(i)y(i) - \left\{ \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \phi(i)\phi'(i) \right\} \theta_0 \right) \\ &= \left( \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \phi(i)\phi'(i) \right)^{-1} \left( \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \phi(i)v(i) \right) \end{aligned}$$

donde el último término tiende a los valores medios cuando  $t$  crece. La diferencia entre el valor estimado y el real se anula si

$$1) E[\phi(t)\phi'(t)] \text{ es no singular y } E[\phi(t)v'(t)] = 0$$

$$2) E[\phi(t)v^T(t)] = 0$$

La primera condición se cumple la mayoría de las veces salvo en los siguientes casos:

- La entrada no es de excitación persistente (ver sección 5.4.1) de un orden adecuado.
- La entrada se genera mediante realimentación por un controlador de orden pequeño. El modelo es demasiado grande y no existe ruido sobre el proceso ( $v(t)=0$ ) lo que lleva a que los polinomios  $A(q)$  y  $B(q)$  tengan factores comunes.

La segunda de las condiciones no se cumple la mayoría de las veces salvo si  $v(t)$  es una secuencia de ruido blanco. En este caso  $v(t)$  no está correlacionada con sus valores

previos y por lo tanto no lo estará con  $\phi(t)$  y al tener media nula el término se hace cero, y por lo tanto la estima tiende al valor real. Pero si  $v(t)$  no es ruido blanco, estará correlacionada con valores previos y por lo tanto con  $y(t)$  ya que este depende de  $v(s)$  para  $s \leq t$ .

De la forma más general un sistema lineal, invariante en el tiempo sometido a perturbaciones de tipo estocástico se puede representar mediante la ecuación

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) \quad (5.21)$$

donde  $G(q)$  modela la dinámica determinista del sistema y  $H(q)$  la parte estocástica. La secuencia  $\{e(t)\}$  representa una señal de ruido blanco de media nula.

De la observación de los datos  $\{u(t)\}$ ,  $\{y(t)\}$  se pueden calcular valores  $\varepsilon(t)$  para  $e(t)$ , denominados *errores de predicción*, en la forma

$$\varepsilon(t) = H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)] \quad (5.22)$$

Para unos valores de  $y(\cdot)$ ,  $u(\cdot)$  dados, estos errores son función del modelo utilizado, esto es de  $G$  y  $H$ . Los métodos de estimación paramétrica denominados de *error de predicción* estiman  $G$  y  $H$  de manera que se minimice la función de coste

$$V_r(G, H) = \sum_{i=1}^l \varepsilon^2(i)$$

El método de los mínimos cuadrados es del tipo de error de predicción con

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}, \quad H(q) = \frac{1}{A(q)}$$

Se va a considerar ahora el caso más general dado por

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}, \quad H(q) = \frac{C(q)}{A(q)}$$

donde  $A(q)$  representa el mínimo común múltiplo de los denominadores de las partes determinista y estocástica.

También es posible escribir el sistema en la forma

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t) \quad (5.23)$$

O equivalentemente como la ecuación en diferencias

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_ny(t-n) = b_1u(t-1) + \dots + b_nu(t-n) + e(t) + c_1e(t-1) + \dots + c_n e(t-n)$$

donde algunos coeficientes pueden ser nulos. Ahora el vector de parámetros tiene la forma

$$\theta' = [a_1 \dots a_n \quad b_1 \dots b_n \quad c_1 \dots c_n] \quad (5.24)$$

Este modelo describe la parte observable de cualquier sistema dinámico, lineal, invariante en el tiempo.

El polinomio  $C(q^{-1})$  tiene sus raíces dentro del círculo unidad si no existen perturbaciones periódicas y dentro o sobre el círculo unidad si existen perturbaciones periódicas.

### 5.3.1 Mínimos cuadrados extendidos (MCE)

El modelo (5.23) puede ponerse en la forma

$$C(q)(y(t) - e(t)) = B(q)u(t) + (C(q) - A(q))y(t)$$

Si se representa al error de predicción del modelo (5.23) por

$$\hat{y}(t) = y(t) - e(t)$$

Entonces se tiene

$$\hat{y}(t) = B(q) \frac{u(t)}{C(q)} + [C(q) - A(q)] \frac{y(t)}{C(q)} \quad (5.25)$$

La expresión anterior indica que la predicción se obtiene filtrando las señales  $u(.)$  e  $y(.)$  por  $C(q)$ . La ecuación (5.25) se puede expresar también como

$$\hat{y}(t) = [1 - A(q)y(t)] + B(q)u(t) + [C(q) - 1](y(t) - \hat{y}(t)) \quad (5.26)$$

Los valores

$$y(t) - \hat{y}(t) = \varepsilon(t) \quad (5.27)$$

dan los errores de predicción. Estos valores no tienen porque coincidir con  $e(t)$  ya que el filtrado de las señales  $u(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$  para estimar  $\hat{y}(\cdot)$  comenzando en  $t=0$ , necesita conocer los valores

$$\hat{y}(0), \hat{y}(-1), \dots, \hat{y}(-n+1), y(0), y(-1), \dots, y(-n+1), u(0), u(-1), \dots, u(-n+1)$$

Si estos valores no se conocen, se pueden tomar como ceros, en cuyo caso la predicción  $\varepsilon$  difiere de  $e$  por un cierto error que decrece como  $C\mu^t$  siendo  $\mu$  el cero de mayor magnitud de  $C(q)$ .

Se debe expresar por tanto (5.26) en la forma de la ecuación de *regresión lineal*.

$$\hat{y}(t) = \phi'(t)\theta \quad (5.28)$$

Ahora el vector de regresión tiene la forma

$$\phi'(t) = [-(y(t-1), \dots, -y(t-n), u(t-1), \dots, u(t-n), \varepsilon(t-1), \dots, \varepsilon(t-n))] \quad (5.29)$$

El método de los mínimos cuadrados se puede utilizar ahora para la ecuación de regresión lineal (5.28). Dicho método se conoce como *Mínimos Cuadrados Extendidos* (MCE) ya que, con respecto al método de los mínimos cuadrados, el vector de regresión se ha extendido con los residuos, y el vector de parámetros con los coeficientes del polinomio  $C(q)$ .

El algoritmo recursivo (5.16) se aplica ahora con el vector de parámetros definido por (5.24) y con el vector de regresión dado por (5.29) con

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \phi'(t)\theta(t-1)$$

El método de los MCE se puede considerar que se obtiene de minimizar la función de coste

$$V(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \varepsilon^2(i)$$

suponiendo la relación lineal entre los parámetros

$$\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta} = \frac{\partial [y(t) - \phi'(t)\theta]}{\partial \theta} = -\phi(t)$$

Es decir, se hace la aproximación de que  $\varepsilon(t)$  no es función del vector de parámetros  $\theta$ , cosa que no es cierta, ya que como se ve por (5.23)

$$C(q, \theta)\varepsilon(t) = A(q, \theta)y(t) - B(q, \theta)u(t) \quad (5.30)$$

siendo  $C(q, \theta)$ ,  $A(q, \theta)$ ,  $B(q, \theta)$  los polinomios con los parámetros estimados.

### 5.3.2 Algoritmo de Máxima Verosimilitud (MV)

Si se deriva (5.30) se tiene

$$\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta} = z(t) = \frac{1}{C(q)} \phi(t)$$

El vector  $z(t)$  se puede calcular de forma recursiva como

$$z(t+1) = \begin{bmatrix} M & & \\ & M & \\ & & M \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} y(t) \\ 0 \\ \cdot \\ u(t) \\ 0 \\ \cdot \\ \varepsilon(t) \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} -c_1 & \dots & -c_n \\ 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

El algoritmo recursivo que se denomina de *Máxima Verosimilitud (MV)* es el siguiente

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta(t-1) + K(t)[y(t) - \phi^T(t)\theta(t-1)] \\ K(t) &= P(t)z(t) = P(t-1)z(t)[1 + z^T(t)P(t-1)z(t)]^{-1} \\ P(t) &= (I - K(t)z^T(t))P(t-1) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Comentarios:

- Los métodos de MCE y MV permiten identificar la dinámica del ruido y evitan el tener estimas polarizadas para el modelo determinista.
- La estimación por el método MV es en general más rápida que con el método MCE.
- La discusión sobre la elección inicial de la matriz de covarianza y del vector de parámetros que se para los mínimos cuadrados se extiende a los métodos MCE y MV.
- Para la estima de parámetros variables en el tiempo se puede utilizar cualquiera de los métodos expuestos en los mínimos cuadrados.

**5.3.3 Método de la Variable Instrumental (VI)**

El método de la *variable instrumental* (VI) se utiliza para identificar modelos de la forma

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + v(t)$$

donde  $v(t)$  es una señal de ruido blanco correlacionado. En este caso el método de los mínimos cuadrados produce una estima correlacionada. Si no interesa estimar un modelo para el ruido (es decir no interesa conocer  $H(q)$ ), se puede utilizar el método de la variable instrumental.

En este método se pretende minimizar la función de coste

$$V(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \|z(i)\| \varepsilon^2(i)$$

donde  $z(i)$  es un vector de dimensión igual a la del vector de parámetros conocida como *variable instrumental*. Se tiene ahora

$$\theta(t) = \left( \sum_{i=1}^t z(i)\phi^T(i) \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^t z(i)y(i) \right) \quad (5.34)$$

Luego en este caso

$$\begin{aligned}\theta - \theta_0 &= \left( \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t z(i) \phi^T(i) \right)^{-1} \left( \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t z(i) y(i) - \left\{ \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t z(i) \phi^T(i) \right\} \theta_0 \right) \\ &= \left( \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \phi(i) \phi^T(i) \right)^{-1} \left( \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t z(i) v(i) \right)\end{aligned}\quad (5.35)$$

Si  $z(t)$  se elige de manera que no exista correlación entre ella y el ruido sobre el sistema el último término de (5.35) se anula y por lo tanto se tiene una *estima consistente*, es decir,  $(\theta \rightarrow \theta_0, t \rightarrow \infty)$ .

De forma recursiva

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \theta(t-1) + K(t)[y(t) - \phi^T(t)\theta(t-1)] \\ K(t) &= P(t)z(t) = P(t-1)z(t)[1 + \phi^T(t)P(t-1)z(t)]^{-1} \\ P(t) &= (I - K(t)\phi^T(t))P(t-1)\end{aligned}\quad (5.36)$$

La variable instrumental se puede elegir de muchas formas; normalmente se toma

$$z(t) = [-g(t-1), \dots, -g(t-n) \ u(t-1), \dots, u(t-n)]$$

donde

$$\begin{aligned}g(t) &= z^T(t)\mathcal{G}(t) \\ \mathcal{G}(t) &= (1 - \beta)\mathcal{G}(t-1) + \beta\mathcal{G}(t-\tau)\end{aligned}$$

donde  $0.01 \leq \beta \leq 0.1$  y  $\tau$  es un entero entre 5 y 10.

## 5.4 SELECCIÓN DE LA SEÑAL DE ENTRADA

### 5.4.1 Grado de excitación persistente de una señal

Un sistema determinista, lineal, dinámico, invariante en el tiempo está caracterizado de forma única por su respuesta a un impulso. La respuesta a un impulso tiene un número infinito de elementos, pero si el sistema es estable la respuesta al impulso tiende a cero y puede truncarse, dando lugar a lo que se denomina *Modelo de Respuesta a un Impulso Finita* (FIR<sup>1</sup>), que se puede describir mediante la ecuación

$$\hat{y}(t) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + \dots + b_n u(t-n) \quad (5.37)$$

<sup>1</sup> Acrónimo inglés derivado de Finite Impulse Response

O de forma equivalente

$$y(t) = \phi(t)' \theta_0$$

donde

$$\theta_0' = [b_1 \dots b_n]$$

$$\phi'(t) = [u(t-1) \dots u(t-n)]$$

Resulta obvio que los parámetros del sistema (5.37) no pueden determinarse si la entrada no cumple algunos requisitos. La solución al problema de los mínimos cuadrados viene dada por los valores solución a la ecuación normal (5.5). Esta solución es única si la matriz  $(\Phi' \Phi)$  de la ecuación normal tiene rango máximo  $n$ . Para este modelo se tiene

$$\Phi^T \Phi = \begin{pmatrix} \sum_{n+1}^t u^2(i-1) & \sum_{n+1}^t u(i-1)u(i-2) & \dots & \sum_{n+1}^t u(i-1)u(i-n) \\ \sum_{n+1}^t u(i-1)u(i-2) & \sum_{n+1}^t u^2(i-2) & \dots & \sum_{n+1}^t u(i-2)u(i-n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{n+1}^t u(i-1)u(i-n) & \sum_{n+1}^t u(i-2)u(i-n) & \dots & \sum_{n+1}^t u^2(i-n) \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

Si la señal de entrada no excita suficientemente al sistema  $(\Phi' \Phi)$  no será de rango completo.

Además se tiene

$$\Phi^T Y = \begin{pmatrix} \sum_{n+1}^t y(i-1)u(i-1) \\ \sum_{n+1}^t y(i-1)u(i-2) \\ \dots \\ \sum_{n+1}^t y(i-1)u(i-n) \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

Para valores elevados de  $t$  los efectos finales son despreciables y todos los sumatorios de (5.38) y (5.39) se pueden tomar desde 1 a  $t$ . Si en ambas ecuaciones dividimos por  $t$  y representamos por  $r_u(k)$  la *covarianza empírica de la entrada*,

$$r_u(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{n+1}^t u(i)u(i-k)$$

y por  $r_{yu}(k)$  la *covarianza empírica entre la entrada y la salida*,

$$r_{yu}(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{n+1}^t y(i)u(i-k)$$

entonces la ecuación normal se puede poner como

$$\begin{pmatrix} r_u(1) & \dots & r_u(n-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ r_u(n-1) & \dots & r_u(1) \end{pmatrix} \theta = \begin{pmatrix} r_{yu}(1) \\ \dots \\ r_{yu}(n-1) \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

O de forma equivalente como

$$R_u(n) \cdot \hat{\theta} = R_{yu}(n) \quad (5.41)$$

La condición de unicidad de la matriz (5.38) se expresa ahora como unicidad de la matriz  $R_u(n)$ . Esto lleva a la siguiente definición:

**Definición:** Una señal de cuadrado sumable  $u$  se denomina de *excitación persistente* (EP) de orden  $n$  si la matriz  $R_u(n)$  definida por (5.40) es definida positiva, es decir, todos sus autovalores son positivos.

Para el modelo FIR la estima es consistente ( $\theta \rightarrow \theta_0, t \rightarrow \infty$ ) si la señal de entrada es de EP de orden  $n$ .

En general para un sistema dinámico con ruido no correlacionado la estima es consistente si la señal de entrada es de EP de grado  $2n$ , es decir, coincide con el número de parámetros que posee el modelo.

♦ **Ejemplo 5.4:**

Considérese el ejemplo 5.2 de un sistema de primer orden en el que la entrada  $u(t)$  es una señal escalón de amplitud  $\lambda$ . En el estado estacionario la ganancia estática del sistema es:

$$S = \frac{b_0}{1+a_0} \quad (e11)$$

Luego

$$y = S \cdot u$$

Y por tanto:

$$\begin{aligned} E[u(t)] &= \lambda \\ E[y(t)] &= S \cdot \lambda \end{aligned}$$

En consecuencia las ecuaciones (e7) toman la forma:

$$\begin{aligned} E y^2(t) &= S^2 \lambda^2 + \frac{(1 + c_0^2 - 2a_0 c_0) \sigma^2}{1 - a_0^2}, \\ E y(t) u(t) &= S \lambda^2, \\ E u^2(t) &= \lambda^2, \\ E y(t) y(t-1) &= S^2 \lambda^2 + \frac{(c_0 - a_0)(1 - a_0 c_0) \sigma^2}{1 - a_0^2}, \\ E y(t) u(t-1) &= S \lambda^2 \end{aligned} \tag{e12}$$

Con lo que finalmente resolviendo la ecuación normal se llega a

$$\begin{aligned} a &= a_0 - \frac{c_0(1 - a_0^2)}{1 + c_0^2 - 2a_0 c_0}, \\ b &= b_0 - b_0 c_0 \frac{1 - a_0}{1 + c_0^2 - 2a_0 c_0} \end{aligned} \tag{e13}$$

Se observa, que las estimas son distintas de los valores reales, es decir, están polarizadas. Además, I son independientes del valor de la amplitud  $\lambda$  de la señal de entrada.

Si no existiera ruido correlacionado sobre el sistema, entonces  $c_0 = 0$ , y se obtendría

$$\begin{aligned} a &= a_0 \\ b &= b_0 \end{aligned}$$

Si, por ejemplo  $c_0 = a_0$ , entonces

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= \frac{b_0}{1 + a_0} \end{aligned}$$

que se desvía claramente de los valores reales.

Es interesante observar que de (e13) se deduce que siempre se verifica la relación

$$\frac{b}{1+a} = \frac{b_0}{1+a_0}$$

Es decir la ganancia estática se determina perfectamente.

En el caso de que no haya ningún ruido actuando sobre el proceso, esto es  $\sigma^2 = 0$ , entonces la matriz en (e6) se hace singular

$$\lambda^2 \begin{pmatrix} S^2 & -S \\ -S & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso la solución está caracterizada por

$$\frac{b}{1+a} = S$$

En conclusión, con una entrada constante (EP de orden 1), y sin otro tipo de excitación, sólo se puede determinar perfectamente un parámetro: la ganancia estática de la planta.

◆

De acuerdo con esta definición para el sistema de primer orden del ejemplo 5.2 se obtiene una estima consistente ( $\theta \rightarrow \theta_0$ ,  $t \rightarrow \infty$ ) si la señal de entrada es de EP de orden 2.

Resulta interesante conocer el grado de excitación de algunas señales, lo que puede ayudar a la comprensión de este concepto.

- Sea  $u(t)$  una señal aleatoria de *ruido blanco* con media nula y varianza  $\lambda^2$ . Entonces  $R_u(n) = \lambda^2 I_n$  por lo que la señal es de EP de todos los grados.
- Sea  $u(t)$  un *escalón* de amplitud  $\lambda$  entonces  $r_u(k) = \lambda^2$  para todo  $k$ . Luego  $R_u(n)$  es no singular si y solo si  $n=1$ . Luego su grado de excitación es 1.
- Si  $u(t)$  es un *impulso*  $u(t)=1$  para  $t=0$  y 0 en cualquier otro caso luego  $r_u(k)=0$  para todo  $k$  y  $R_u(n)=0$  para todo  $n$ . Luego es de EP de grado 0.

Una propiedad importante es que si la señal escalar  $u(t)$  es de EP de grado  $n$  entonces su densidad espectral de potencia es distinta de cero en al menos  $n$  puntos. De esta propiedad se sigue que una señal suma de  $m$  sinusoides

$$u(t) = \sum_{i=1}^m a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad 0 < \omega_1 < \dots < \omega_m < \pi$$

es de excitación persistente de orden  $2m$ .

En general si se excita un sistema de  $N$  parámetros con una señal de EP de orden  $n < N$ , la señal de entrada no estaría excitando suficientemente al sistema para identificar todos sus parámetros.

Como se ha visto un escalón tiene grado 1 de EP y en el ejemplo 5.4 se puso de manifiesto que con esta entrada se podía determinar un único parámetro: la ganancia estática del sistema. Este valor corresponde al comportamiento del sistema a frecuencia cero.

Una senoide posee grado 2 de EP y se sabe que con una senoide de entrada se puede fijar la respuesta de un sistema a una determinada frecuencia, lo que necesita dos parámetros: la amplitud con que se modifica la señal al pasar por el sistema y el desfase que se introduce.

La señal de ruido blanco posee cualquier grado de EP y eso es así porque dispone de todas las frecuencias.

En el caso de no utilizar ruido blanco ¿que tipo de frecuencias debería contener la señal?. La respuesta es: aquellas en las que interese tener una buena fiabilidad del modelo. Si el rango de frecuencias de actuación del modelo se conoce se puede elegir como señal de entrada una suma de sinusoides distribuidas de forma regular sobre dicho rango. Si no se conoce el rango lo mejor es utilizar una señal lo mas parecida posible al ruido blanco, como por ejemplo una señal pseudo aleatoria binaria (PRBS<sup>2</sup>)

### 5.4.2 Señal pseudo aleatoria binaria (PRBS)

Como se ha visto en la sección anterior la mejor entrada para identificar un sistema es el ruido blanco. En la identificación de sistemas se suele utilizar en su lugar una señal denominada pseudo aleatoria binaria (PRBS) que tiene las siguientes propiedades:

---

<sup>2</sup> Acrónimo inglés derivado de Pseudo Random Binary Signal

- La señal tiene dos niveles  $\pm V$  y puede cambiar de uno a otro sólo en ciertos intervalos de tiempo  $t=0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$ . A  $\lambda$  se le conoce como tiempo de reloj.
- Si se va a producir o no el cambio de la señal en un determinado intervalo está "predeterminado". Luego la señal PRBS es determinista y los experimentos se pueden repetir.
- La señal es periódica con periodo  $T_0=N\cdot\lambda$ , siendo  $N$  un número entero impar.
- En un periodo  $T_0$  hay  $(N+1)/2$  intervalos de un nivel y  $(N-1)/2$  intervalos en el otro nivel.
- La señal de autocorrelación es

$$r_u(k) = V^2, \quad k=0, N\cdot\lambda, 2\cdot N\cdot\lambda, 3\cdot N\cdot\lambda, \dots$$

$$r_u(k) = -V^2/N, \quad \lambda(1+i\cdot N) < k < \lambda(N-1+i\cdot N), \quad i=0,1,2,\dots$$

- Las señales PRBS mas utilizadas son las que se basan en secuencias de longitud máximas, para las cuales  $N=2^n-1$ , siendo  $n$  un entero. Estas secuencias se pueden generar utilizando un registro de desplazamiento de  $n$ -estados con realimentación. Sólo unas pocas conexiones de realimentación llevan a una secuencia de longitud máxima para cualquier  $n$  elegida.
- Las señales PRBS son de EP de grado  $N$  pero no mayor que  $N$ , siendo  $N$  el periodo de la señal.

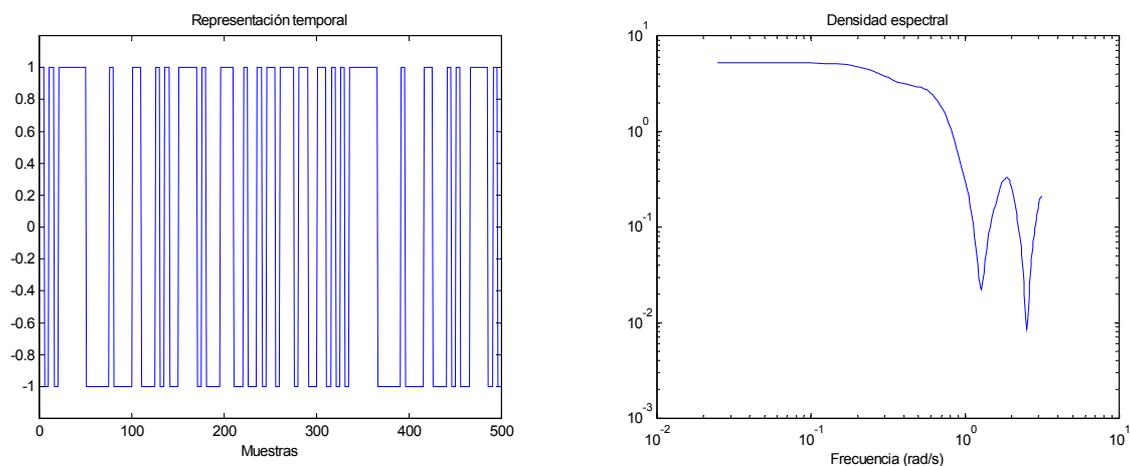


Figura 5.2: Representación temporal y espectro de potencia de una señal PRBS de ejemplo.

En la Figura 5.2 se muestra la representación temporal y el espectro de potencia de una señal PRBS de ejemplo.

### 5.4.3 Amplitud de la señal de entrada

Otra consideración importante a realizar es la selección de la amplitud de la señal de entrada. Para su elección se deben tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Pueden existir limitaciones físicas y económicas sobre la máxima variación de las señales de entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$  durante la realización del experimento.
- Si el modelo corresponde a una linealización de un sistema no lineal, su validez estará limitada a una determinada zona, por lo que no se debe escoger la señal de entrada de modo que saque al sistema fuera de la zona de validez del modelo. No obstante, tras la identificación del modelo puede resultar interesante realizar otro experimento con una amplitud mayor para determinar la zona de validez de este.
- El aumento de la amplitud de la señal de entrada aumenta la relación entre la señal y el ruido del sistema y por lo tanto cabe esperar una mejora en la identificación del sistema.

## 5.5 IDENTIFICACION EN LAZO CERRADO

En muchos casos puede ser necesario identificar al sistema en lazo cerrado. El sistema en lazo abierto puede ser inestable por lo que es imposible obtener ningún tipo de registro significativo si el sistema no se controla sin una realimentación que lo estabilice. En otros casos razones de orden económico pueden impedir realizar la identificación en lazo abierto del sistema. También puede ser conveniente la utilización de un regulador de estabilización del sistema durante la identificación por razones de seguridad.

Para el sistema dinámico (5.1) la matriz  $\Phi$  es

$$\Phi = \begin{pmatrix} -y(n) & \dots & -y(1) & u(n) & \dots & u(1) \\ -y(n+1) & \dots & -y(2) & u(n+1) & \dots & u(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(t-1) & \dots & -y(t-n) & u(t-1) & \dots & u(t-n) \end{pmatrix}$$

Una ley de realimentación de orden suficientemente pequeño introduce dependencias lineales entre las columnas de la matriz  $\Phi$  lo que hace que los parámetros no se puedan identificar de forma única, ya que  $(\Phi^T \Phi)$  no tendría rango completo.

♦ **Ejemplo 5.5:**

Se va a considerar el sistema de primer orden del ejemplo 5.2 de con  $c_0=0$ . Además se utiliza la siguiente ley de control

$$u(t) = -ky(t)$$

La ecuación normal es ahora

$$\sum y^2(i-1) \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sum y(i)y(i-1) \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$$

La matriz  $(\Phi^T \Phi)$  es singular y no existe solución única.

El mismo aspecto se pone de manifiesto si se multiplica a la ley de control por un valor arbitrario  $\alpha$  y se le suma a la ecuación del sistema

$$y(t) + a_0 y(t-1) = b_0 u(t-1) + (\alpha u(t-1) - \alpha u(t-1)) + e(t)$$

Recolocando términos se obtiene

$$y(t) = -(a_0 - \alpha k)y(t-1) + (b_0 + \alpha)u(t-1) + e(t)$$

Esto muestra que cualquier par de parámetros que cumplan

$$\begin{aligned} a &= a_0 - \alpha k \\ b &= b_0 + \alpha \end{aligned}$$

dan la misma relación de entrada salida y por lo tanto todos ellos son solución a la ecuación normal.

♦

El problema de la falta de identificabilidad debido a la realimentación desaparece si se utiliza una ley de realimentación lineal de orden elevado o si la ganancia de la realimentación es variable con el tiempo (se evita la dependencia lineal de las columnas de  $\Phi$ ).

Para asegurar la identificabilidad del sistema del Ejemplo 5.5 bastaría considerar una ley de control de la forma

$$u(t) = -k_1 y(t) - k_2 y(t-1)$$

Otra posibilidad es utilizar una ley de control de la forma

$$u(t) = -k(t)y(t)$$

donde la ganancia basta que varíe entre dos valores para asegurar la identificabilidad.

## 5.6 ELECCION DEL PERIODO DE MUESTREO

La elección del periodo de muestreo en el proceso de toma de datos de entrada/salida del sistema a identificar está ligada a las constantes de tiempo de dicho sistema. Además se deben tener en cuenta los siguientes aspectos:

- *La existencia de un intervalo de tiempo fijo para el experimento.* Como el periodo de muestreo no puede disminuirse una vez realizado el registro de los datos conviene muestrear a una velocidad rápida y realizar después la estimación considerando valores dobles, triples, etc del valor de muestreo.
- *El número total de datos a registrar fijo.* El periodo de muestreo se debe elegir entonces como un compromiso. Si es muy grande los datos contendrán poca información sobre la dinámica de alta frecuencia del sistema. Si el periodo es pequeño las perturbaciones pueden tener una influencia excesiva en el modelo y, además, puede haber poca información del comportamiento a baja frecuencia.
- *El objetivo final de la aplicación.* Para los sistemas en lazo abierto se aconseja tomar entre 2 y 4 muestras en el tiempo de subida. Para sistemas en lazo cerrado se aconseja también ese número de muestras en el tiempo de subida del sistema en lazo cerrado o bien entre 8 y 16 muestras en una oscilación amortiguada del sistema. Otro valor que se suele indicar es el de realizar entre 5 y 16 muestras en el tiempo de asentamiento al 95% de la respuesta del sistema en lazo cerrado a un escalón de entrada.
- *La fiabilidad del modelo resultante.* El uso de periodos de muestreo muy pequeños puede llevar a problemas prácticos, ya que los polos tienden a agruparse en torno al punto  $z=1$  del plano complejo y la determinación del

modelo se hace muy sensible, pudiendo resultar que pequeños errores en los parámetros tengan una influencia importante sobre las propiedades de entrada-salida del modelo. Además un muestreo muy rápido lleva a que el modelo sea de fase no mínima lo que puede causar problemas a la hora de diseñar la ley de control.

En general la elección del periodo de muestreo no suele resultar crítica en la mayoría de los casos ya que el rango entre los valores pequeños y grandes es relativamente amplio.

♦ **Ejemplo 5.6:**

Se tiene la siguiente expresión para la función de transferencia de una planta que posee a su entrada un retenedor de orden cero.

$$G(s) = \frac{K \cdot (1 + T_4 s) e^{-T_d s}}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}$$

$$K = 1; T_1 = 10; T_2 = 7; T_3 = 3; T_4 = 2; T_d = 4;$$

El modelo discreto equivalente que se obtiene considerando un periodo de muestreo  $T$  es:

$$G(z) = z^{-nk} \frac{(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3})}{(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3})}$$

La ganancia es

$$K = \frac{\sum b_i}{1 + \sum a_i}$$

En la Tabla 5.2 se muestran los valores de los coeficientes de  $G(z)$  en función del periodo de muestreo  $T$ .

Cuando el periodo de muestreo disminuye las magnitudes de los parámetros  $a$  se incrementa y la de los parámetros  $b$  decrece. Por ello, para un periodo de muestreo pequeño, por ejemplo  $T=1$ , se tiene

$$|b_i| \ll |a_i| \quad \text{y} \quad \left| \sum b_i \right| = \left| 1 + \sum a_i \right| \ll |a_i|$$

Pequeños errores en los parámetros pueden tener una influencia significativa en el comportamiento entrada-salida del modelo, ya que, por ejemplo, el valor de  $\sum b_i$  depende fuertemente de los valores de las cifras decimales cuarta y quinta.

T[seg.]	1	4	8	16
$a_1$	-2.48824	-1.49836	-0.83771	-0.30842
$a_2$	2.05387	0.70409	0.19667	0.02200
$a_3$	-0.56203	-0.09978	-0.00995	-0.00010
$b_0$	0	0	0.06525	0.37590
$b_1$	0.00462	0.06525	0.25598	0.32992
$b_2$	0.00169	0.04793	-0.02850	0.00767
$b_3$	-0.00273	-0.00750	-0.00074	-0.00001
$\sum b_i$	0.00358	0.10568	0.34899	0.71348
$1+\sum a_i$	0.00358	0.10568	0.34899	0.71348

Tabla 5.2: Coeficientes de  $G(z)$  en función del periodo de muestreo.

Por otra parte la elección de un periodo de muestreo muy grande puede llevar a una simplificación excesiva del modelo dando este una descripción muy pobre de su comportamiento dinámico. En el ejemplo se ve que para  $T=8\text{sec.}$  el modelo se reduce prácticamente a un sistema de segundo orden, porque

$$|a_3| \ll |1 + \sum a_i| \quad \text{y} \quad |b_3| \ll |\sum b_i|$$

Para  $T=16$  el modelo se reduce prácticamente a uno de primer orden.

◆

## 5.7 TRATAMIENTO DE LOS DATOS

Antes de iniciar el proceso de identificación es necesario realizar un tratamiento de los datos de entrada/salida medidos. Dicho tratamiento consta de las siguientes acciones:

- Filtrado.
- Eliminación de valores medios.
- Detección de outliers.

Siempre hay que analizar si es necesario llevar a cabo cada una de estas acciones. Dependiendo de la calidad de los datos de que se dispongan pueden ser necesario realizar todas, alguna o ninguna de estas acciones.

### 5.7.1 Filtrado de las señales

Un modelo tiene validez dentro de un rango limitado de frecuencias. No se pueden modelar efectos por encima de la frecuencia de Nyquist ( $f_s = \pi/T$ ,  $T =$  periodo de muestreo). Normalmente  $f_s$  se elige entre 5 y 10 veces superior a la máxima frecuencia de interés para evitar así la pérdida de fiabilidad entre las estimas. El filtrado analógico previo de las señales es necesario para evitar el aliasing (plegamiento de la función de densidad espectral de la señal) y de esta manera eliminar las perturbaciones con frecuencias superiores a la de Nyquist.

La anchura de banda del filtro es inversamente proporcional al periodo de muestreo. Como regla aproximada se suele considerar la relación

$$\omega_B T \approx 0.5 - 1$$

donde  $\omega_B$  es la anchura de banda del filtro.

El filtro debe tener ganancia constante y fase próxima a cero para valores bajos y medios de frecuencias, para no distorsionar de forma innecesaria a la señal. Para altas frecuencias la ganancia debe caer rápidamente. La eliminación de las altas frecuencias en la señal mejora la relación señal ruido y por lo tanto permite una mejor identificación del sistema.

Debido a que el filtro previo tiene una cierta dinámica esta se incluye en el modelo que se identifica (ver Figura 5.3).

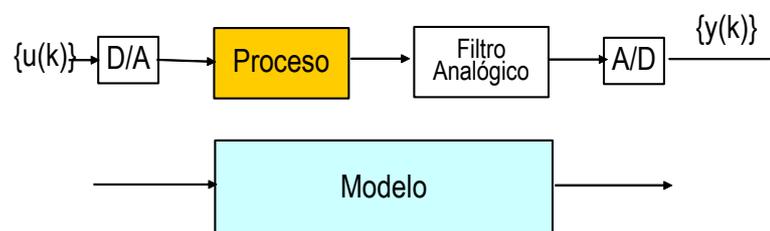


Figura 5.3: Diagrama de bloques que pone de manifiesto como el modelo que se identifica posee la dinámica del proceso y la del filtro analógico.

Si existen perturbaciones de baja frecuencia en el sistema éstas también deben ser filtradas. Para ello se suelen utilizar filtros digitales sobre las señales registradas como fase previa a la identificación. Ambas señales la de entrada y la de salida son filtradas usando un mismo tipo de filtro (ver Figura 5.4). Con ello se consigue elegir la banda de frecuencias en las que el modelo debe proporcionar una buena estima del sistema. Normalmente basta con utilizar filtros pasa alta de primer orden

$$u_F(k) = \alpha \cdot u_F(k-1) + u(k) - u(k-1)$$

$$y_F(k) = \alpha \cdot y_F(k-1) + y(k) - y(k-1)$$

donde

$$\alpha = e^{-T/\tau}$$

donde  $\tau$  la contante de tiempo del filtro. Además  $u_F(k)$  e  $y_F(k)$  son las señales filtradas que se utilizan en el algoritmo de identificación.  $\tau$  se debe elegir de manera que el filtro pasa alta no elimine la menor frecuencia de la señal de entrada. Para señales PRBS con intervalo de reloj  $\lambda$  y periodo  $N$  la constante de tiempo debe cumplir la relación

$$\tau > \frac{\lambda N}{2\pi}$$

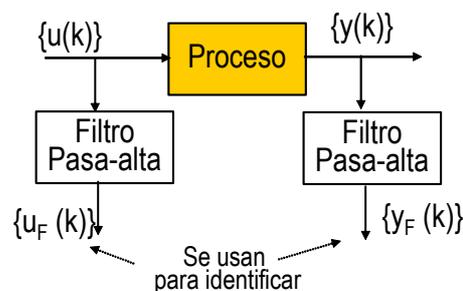


Figura 5.4: Filtrado de perturbaciones de baja frecuencia

### 5.7.2 Eliminación de valores medios

Un modelo lineal sólo suele ser valido para variaciones en torno a un punto de equilibrio, por lo que las señales de entrada y de salida normalmente tendrán un valor medio igual a los valores en las posiciones de equilibrio, por lo general diferirán del valor cero. Sin embargo en la identificación sólo se puede obtener el modelo real si los valores medios son nulos.

Se suelen seguir dos métodos para tratar medias distintas de cero:

- Estimar de forma explícita los valores medios.
- Usar modelos con valores incrementales.

### 5.7.2.1 Estimar de forma explícita los valores medios.

Para ello se puede proceder de dos formas:

#### A) Forma 1: Estimar, eliminar e identificar

Fijar una tendencia polinomial a la entrada y la salida mediante regresión lineal

$$y^*(t) = m_0 + m_1 t + \dots + m_r t^r$$

$$u^*(t) = n_0 + n_1 t + \dots + n_s t^s$$

Después calcular los datos eliminando las tendencias

$$\bar{y}(t) = y(t) - y^*(t)$$

$$\bar{u}(t) = u(t) - u^*(t)$$

Es a estos datos a los que se aplica el algoritmo de identificación.

Si los grados  $r$  y  $s$  son cero el procedimiento consiste simplemente en calcular los valores medios de las señales

$$y^* = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t)$$

$$u^* = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t)$$

y sustraerlos de las medidas. Con valores de  $r, s > 0$  se modela una deriva en los datos (tendencia polinomial).

#### B) Forma 2: Estimar los valores medios durante la fase de identificación

Se considera ahora el siguiente modelo

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + e(t) + m$$

donde  $m$  es un parámetro que también es estimado. Ahora

$$\theta_0' = [a_1 \dots a_n \ b_1 \dots b_n \ m]$$

es el vector de parámetros del proceso y

$$\phi'(t) = [-y(t-1) \dots -y(t-n) \ u(t-1) \dots u(t-n) \ 1]$$

es el vector de regresión. El modelo se puede generalizar introduciendo, en lugar de un valor constante, un polinomio en  $t$  (tendencia polinomial) en el que los coeficientes son parámetros a identificar.

### 5.7.2.2 Usar modelos con valores incrementales.

Sea  $\Delta$  el operador diferencia

$$\Delta = 1 - q^{-1}$$

Se utiliza el modelo

$$A(q^{-1})\Delta y(t) = B(q^{-1})\Delta u(t) + \Delta e(t)$$

Como se ve, ahora en el algoritmo de identificación se utilizan los datos diferenciados.

### 5.7.3 Detección de outliers

Cuando se realizan los experimentos ocurre a veces que hay grandes errores en las medidas. Estos errores, denominados *outliers*, pueden estar causados por perturbaciones, errores en las transmisiones de datos, fallos en la conversión, etc. Es importante detectar y eliminar esos errores antes de analizar los datos, ya que su influencia cambiará en gran medida los resultados de la identificación. Los outliers aparecen como picos en la secuencia de errores de predicción y por ello tendrán gran influencia en la función de coste.

Existen dos formas de tratar los outliers.

- Hacer un test de presencia de outliers y ajustar los datos erróneos.
- Usar una función de coste modificada.

### 5.7.3.1 Hacer un test de presencia de outliers y ajustar los datos erróneos.

En este caso se obtiene un modelo ajustando los datos sin prestar atención a los outliers. Después se obtienen los residuos  $\varepsilon(t, \theta)$  y se representan gráficamente. Se detecta la existencia de posibles picos en la secuencia  $\{\varepsilon(t, \theta)\}$ . Si por ejemplo  $|\varepsilon(t, \theta)|$  es anormalmente grande entonces la salida correspondiente  $y(t)$  se modifica. Una modificación sencilla es tomar

$$y(t) = 0.5 \cdot [y(t-1) + y(t+1)]$$

Otra posibilidad es tomar como valor  $y(t)$  el valor que predice  $\theta$

$$y(t) = \hat{y}(t|t-1, \theta)$$

La secuencia de valores obtenida haciendo las sustituciones anteriores se utiliza para obtener un nuevo modelo.

### 5.7.3.2 Usar una función de coste modificada.

El método consiste en modificar la función de coste de modo que se penalice más a las medidas que contienen outliers. Este método se suele utilizar en los cálculos on-line. En el algoritmo de los mínimos cuadrados se modifica el vector de ganancia de Kalman  $K(t)$  en la forma

$$K(t) = P(t-1)\phi(t) \left[ \frac{1}{\beta(t)} + \phi'(t)P(t-1)\phi(t) \right]^{-1}$$

donde

$$\beta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\varepsilon(t)| \leq \gamma \hat{\lambda}_t \\ \frac{\gamma^2 \hat{\lambda}_t^2}{\varepsilon^2(t)} & \text{si } |\varepsilon(t)| > \gamma \hat{\lambda}_t \end{cases}$$

donde  $\hat{\lambda}_t$  es una estimación de la desviación estándar de los errores de predicción

$$\hat{\lambda}_t = \left[ \frac{V_t(\theta(t))}{t} \right]^{1/2}$$

$$V_t(\theta(t)) = V_{t-1}(\theta(t-1)) + \frac{\varepsilon^2(t)}{\frac{1}{\beta(t)} + \phi'(t)P(t-1)\phi(t)}$$

El parámetro  $\gamma$  se elige como un compromiso entre robustez y fiabilidad de las estimas. Para valores pequeños de  $\gamma$  el estimador es muy robusto frente a la presencia de outliers pero puede dar una fiabilidad muy pobre, y viceversa si  $\gamma$  es grande. Un valor ajustado de  $\gamma$  es entre 2 y 4.

## 5.8 ELECCION DEL TIPO Y LA ESTRUCTURA DEL MODELO

### 5.8.1 Elección del tipo de modelo

En la identificación paramétrica de modelos discretos se distinguen principalmente cuatro tipos de modelos:

- Modelo ARX (AutoRegressive eXogenous).

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)$$

Son los más sencillos de identificar por eso siempre se recomienda su elección al principio de cualquier proceso de identificación.

- Modelo ARMAX (AutoRegressive Moving Average eXogenous)

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)$$

Presentan una mayor flexibilidad para tratar las perturbaciones y se suelen utilizar cuando éstas aparecen a la entrada del sistema.

- Modelos OE (Output Error)

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + e(t)$$

Se utilizan cuando las propiedades de las señales de perturbación no son modeladas. Permiten obtener una descripción correcta de la función de transferencia determinista sin importar la forma de las perturbaciones.

■ Modelos BJ (Box-Jenkins)

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t) + \frac{C(q)}{D(q)} e(t)$$

La dinámica del sistema está separada de la dinámica de las perturbaciones. Son unos modelos difíciles de estimar, aunque resultan adecuados cuando las perturbaciones aparecen en la salida.

La elección del modelo va estar fuertemente influida por el uso final al que se destine. La bondad final del modelo se pondrá de manifiesto cuando se use en la práctica y se comprueben los resultados obtenidos.

### 5.8.2 Elección de la estructura del modelo

Una vez seleccionada la familia o tipo de modelos con la que se va identificar, se procede a estimar modelos con distintos órdenes de los polinomios (estructuras) y realizar test de comparación entre ellos para determinar el más apropiado. Hay tres aspectos a considerar:

- 1) Ver si la estructura del modelo es lo suficientemente grande para contener al sistema real. Hay que determinar si el grado del modelo está subestimado.
- 2) Ver si el modelo es demasiado complejo (muchos parámetros). Hay que determinar si el grado del modelo está sobreestimado.
- 3) Ver que estructura de modelo se debe escoger entre dos o más posibles.

Será en la fase de validación del modelo donde se pondrán de manifiesto los tres aspectos mencionados y por tanto que estructura para el modelo es la mejor.

## 5.9 VALIDACION DE ESTRUCTURAS Y MODELOS

Para analizar la validez de los modelos estimados es conveniente realizar diferentes estudios:

- *Test sobre las funciones de coste (Criterios de información)*. El método más sencillo consiste en considerar la función de coste  $V$  como una función del grado  $n$  del modelo  $V(n)$ . Los valores de  $V$  para el valor real de

$n$  y para valores superiores a  $n$  no debe diferir de forma significativa. No obstante, por lo general siempre se reducirá la función de coste cuando se aumente el grado, por ello se utilizan test estadísticos para poner de manifiesto si la reducción es significativa. Los test más utilizados son: F-test (Test de la distribución F), AIC-test (Akaike Information Criterion) y FPE-test (Final Prediction Error).

- *Cancelación de polos y ceros.* Si el modelo identificado es de orden (por ejemplo  $n$ ) mayor que el real (por ejemplo  $n_0$ ) entonces aparecerán  $n-n_0$  pares de ceros-polos que se cancelan entre si de forma aproximada.
- *Análisis de los residuos del modelo.* Algunos métodos de identificación como el de los mínimos cuadrados, y en general todos los métodos de error de predicción, requieren que los residuos sean ruido blanco para asegurar de este modo que la estima no está polarizada. Este aspecto se suele analizar calculando la función de autocorrelación de los residuos. Si los residuos son ruido blanco la función de autocorrelación deberá ser aproximadamente cero en todos los puntos salvo en el origen.

Para comprobar si existe realimentación entre la entrada y la salida, lo que puede producir polarización en las estimas, se realiza un test sobre la correlación entre los residuos y las entradas. Si no existe realimentación la función de correlación debe ser aproximadamente nula en todos sus puntos.

- *Verificación del comportamiento de entrada-salida.* Para ello se realizan los siguientes test:
  - 1) Comparar la respuesta temporal medida y la calculada con el modelo.
  - 2) Comparar la respuesta en frecuencia obtenida por el modelo identificado con la calculada mediante transformada de Fourier a partir del registro de los datos.
  - 3) Comparar las funciones de correlación cruzada entre las salidas y las entradas producidas con datos medidos y con datos generados por el modelo.

- *Aplicación del modelo.* Es el test último y más importante, con el que se obtendrá la evaluación final del modelo obtenido.

Es muy importante tener en cuenta que en el proceso de validación de los modelos se debe usar un conjunto de datos distinto a los usados para estimar los modelos.



# APENDICE A

## TABLA DE TRANSFORMADAS Z

$y(t)$	$y(k \cdot T)$ o $y(k)$ o	$Y(s)$	$Y(z)$
-	Delta de Kronecker $\delta_0(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$	-	1
-	$\delta_0(n-k) = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$	-	$z^{-1}$
1(t)	1(k)	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
t	$k \cdot T$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T \cdot z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$e^{-a \cdot t}$	$e^{-a \cdot k \cdot T}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{1-e^{-a \cdot T} z^{-1}}$
$t \cdot e^{-a \cdot t}$	$k \cdot T \cdot e^{-a \cdot k \cdot T}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{T \cdot e^{-a \cdot T} \cdot z^{-1}}{(1-e^{-a \cdot T} z^{-1})^2}$
$e^{-a \cdot t} \cdot \text{sen}(\omega t)$	$e^{-a \cdot k \cdot T} \cdot \text{sen}(\omega \cdot k \cdot T)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{e^{-a \cdot T} \cdot z^{-1} \cdot \text{sen}(\omega T)}{1 - 2 \cdot e^{-a \cdot T} \cdot \cos(\omega T) \cdot z^{-1} + e^{-2 \cdot a \cdot T} \cdot z^{-2}}$
$e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega t)$	$e^{-a \cdot k \cdot T} \cdot \cos(\omega \cdot k \cdot T)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1 - e^{-a \cdot T} \cdot z^{-1} \cdot \cos(\omega T)}{1 - 2 \cdot e^{-a \cdot T} \cdot \cos(\omega T) \cdot z^{-1} + e^{-2 \cdot a \cdot T} \cdot z^{-2}}$
-	$a^k$	-	$\frac{1}{1-a \cdot z^{-1}}$



# BIBLIOGRAFIA

- ASTRÖM, K. J. y WITTENMARK, B. *Sistemas Controlados por Computador*. Ed. Paraninfo, 1996.
- OGATA, K. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall.1998.
- OGATA, K. *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. Prentice Hall.1996.
- SÖDERSTRÖM, T. y STOICA, P. *System Identification*. Prentice Hall. 1989.



**APUNTES DE**  
**AUTOMÁTICA II**

**(Segundo parcial)**

**Jose Manuel Díaz**

**Joaquín Aranda**

**Jesús Manuel de la Cruz**

**Departamento de Informática y Automática**  
**E.T.S.I. Informática**  
**U.N.E.D**



Apuntes de Automática II (Segundo parcial).

Última reimpresión: enero 2007.

ISBN:

Copyright © 2006 Jose Manuel Díaz, Joaquín Aranda y Jesús Manuel de la Cruz

Todos los derechos reservados. Prohibida la copia por cualquier medio de alguna de las partes de este manual sin el consentimiento por escrito de los autores.

Departamento de Informática y Automática

E.T.S.I Informática.

Universidad de Educación a Distancia (UNED).

C/ Juan del Rosal nº 16.

Madrid 28040 (España)



# INDICE

## TEMA 6: INTRODUCCION A LA OPTIMIZACION

6.1 EXTREMOS DE FUNCIONES.....	227
6.2 EXTREMOS CONDICIONADOS .....	231
6.3 OPTIMIZACION DE SISTEMAS DINAMICOS.....	234
6.4 SOLUCIONES NUMERICAS .....	242

## TEMA 7: CONTROL OPTIMO DE SISTEMAS DISCRETOS

7.1 INTRODUCCION .....	243
7.2 SOLUCION AL PROBLEMA GENERAL DE LA OPTIMIZACION DISCRETA .....	244
7.2.1 <i>Formulación del problema</i> .....	244
7.2.2 <i>Solución al problema</i> .....	246
7.3 CONTROL OPTIMO DE SISTEMAS DINÁMICOS, LINEALES Y DISCRETOS ...	250
7.3.1 <i>Formulación del problema</i> .....	250
7.3.2 <i>Solución del problema</i> .....	254
7.4 SOLUCION EN EL ESTADO ESTACIONARIO .....	263
7.4.1 <i>Consideraciones generales</i> .....	263
7.4.2 <i>Resultados en el dominio de la frecuencia</i> .....	267
7.5 ESTIMACION OPTIMA EN EL ESTADO ESTACIONARIO.....	275

## TEMA 8: CONTROL OPTIMO DE SISTEMAS CONTINUOS

8.1 INTRODUCCION .....	277
8.2 EL CALCULO DE VARIACIONES .....	277
8.2.1 <i>Planteamiento del problema</i> .....	277
8.3 SOLUCION AL PROBLEMA GENERAL DE LA OPTIMIZACION CONTINUA.....	279
8.3.1 <i>Formulación del problema</i> .....	279

8.3.2 Solución al problema .....	280
8.4 CONTROL OPTIMO PARA SISTEMAS LINEALES CONTINUOS.....	290
8.5 SOLUCION EN EL ESTADO ESTACIONARIO .....	296
8.6 RESULTADOS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.....	304

## **TEMA 9: CONTROL ESTOCASTICO DE SISTEMAS DISCRETOS**

9.1 INTRODUCCION .....	309
9.2 CONSIDERACIONES PREVIAS .....	310
9.2.1 Manipulación de polinomios .....	310
9.2.2 Modelo discreto del proceso considerado .....	311
9.2.3 Criterios de control considerados .....	313
9.3 PREDICCION OPTIMA.....	314
9.4 CONTROL DE VARIANZA MINIMA.....	319
9.4.1 CASO 1: B ESTABLE .....	319
9.4.2 CASO 2: B INESTABLE .....	322
9.4.3 Interpretación del control de varianza mínima como diseño mediante la ubicación de polos .....	326
9.5 CONTROL LQG .....	327
9.5.1 Ecuaciones del control LQG .....	327
9.5.2 Procedimiento computacional.....	329
9.5.3 Modos inestables y no controlables .....	334
9.5.4 Obtención de un control LQG mediante la combinación de un filtro de Kalman y un control óptimo .....	336

## **TEMA 10: CONTROL ROBUSTO QFT**

10.1 INTRODUCCION .....	339
10.2 CARACTERISTICAS BASICAS DE LA METODOLOGIA QFT.....	340
10.3 DESCRIPCION DE LAS ETAPAS DE LA METODOLOGIA QFT .....	342
10.3.1 Establecimiento de las especificaciones .....	344
10.3.2 Generación de las plantillas .....	349
10.3.3 Selección del conjunto de frecuencias de trabajo $\Omega$ .....	356
10.3.4 Cálculo de las curvas de restricción .....	358
10.3.5 Ajuste de la función de transferencia en lazo abierto .....	360
10.3.6 Ajuste del prefiltro.....	365
10.3.7 Validación del diseño.....	366

<b>APENDICE B: CALCULO DIFERENCIAL EN <math>\mathbb{R}^n</math></b>	369
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	377



# TEMA 6

## INTRODUCCION A LA OPTIMIZACION

Este tema introductorio a la optimización está dedicado al estudio de los extremos de una función de varias variables sin y con restricciones. Esto servirá para introducir la *optimización estática* u optimización cuando el tiempo no aparece como parámetro. Además, este tema sirve de preparación para tratar con sistemas variables con el tiempo y para introducir algunos aspectos matemáticos que son necesarios conocer para comprender mejor los Temas 7 y 8.

En el Apéndice B se dan algunas nociones de cálculo diferencial en  $\mathfrak{R}^n$  que pueden ser revisadas para un mejor seguimiento de este Tema.

### 6.1 EXTREMOS DE FUNCIONES

Considérese una función escalar  $J(x)$ , con  $x=[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathfrak{R}^n$ , es decir,  $J: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ . El *gradiente de  $J$  con respecto a  $x$*  es el vector columna<sup>1</sup>:

$$J_x \equiv \frac{\partial J}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \frac{\partial J}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{x_1} \\ \cdot \\ J_{x_n} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

El *Hessiano de  $J$  con respecto a  $x$*  es la derivada segunda

$$J_{xx} \equiv \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

---

<sup>1</sup> En algunos libros el gradiente se define como un vector fila, aunque se puede utilizar un vector columna tal y como se desprende de la definición (6.1)

que es una matriz simétrica de dimensión  $n \times n$ . En término del gradiente y del Hessiano, el desarrollo en serie de Taylor de  $J(x)$  en torno a  $x_0$  es:

$$J(x) = J(x_0) + J_x|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T \cdot J_{xx}|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + O(3) \quad (6.3)$$

Donde  $O(3)$  representa términos de orden 3, y donde  $J_x$  y  $J_{xx}$  están calculados en  $x_0$ . De forma incremental el desarrollo en serie se puede poner:

$$dJ = J_x^T \cdot dx + \frac{1}{2} dx^T \cdot J_{xx} dx + O(3) \quad (6.4)$$

El punto  $x_0$  es un *punto crítico o estacionario* cuando el incremental  $dJ$  es cero en una aproximación de primer orden, para todos los incrementos  $dx$ . Esto es, si

$$J_x = 0 \quad (6.5)$$

se tiene un *punto crítico*.

Supóngase que se está en un punto crítico, de modo que  $J_x=0$ . Para que el punto crítico sea un *mínimo local*, se requiere que:

$$dJ = \frac{1}{2} dx^T \cdot J_{xx} dx + O(3) \quad (6.6)$$

sea positiva para todos los incrementos  $dx$ . Esto se garantiza si la matriz  $J_{xx}$  es *definida positiva*

$$J_{xx} > 0 \quad (6.7)$$

Si  $J_{xx}$  es *definida negativa*, el punto crítico es un *máximo local*, y si  $J_{xx}$  es *indefinida*, el punto crítico es un *punto de silla* que es inestable. Si  $J_{xx}$  es *semidefinida*, se deben de examinar los términos de orden superior de la ecuación (6.4) para determinar el tipo de punto crítico. A la matriz  $J_{xx}$  se le conoce como *matriz de curvatura*.

Conviene recordar que  $J_{xx}$  es definida positiva (negativa) si todos sus autovalores son positivos (negativos), e indefinida si tiene autovalores negativos y positivos. Es semidefinida

si tiene algunos autovalores iguales a cero. Por lo que si  $\det[J_{xx}] = 0$ , el término de segundo orden no especifica completamente el tipo de punto crítico.

♦ **Ejemplo 6.1:**

Determinar los valores extremos de

$$J(x, y) = \text{sen}(x) + \text{sen}(y) + \text{sen}(x + y) \quad (1)$$

donde  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $0 \leq y \leq 2\pi$ .

Solución:

Notar que se pide encontrar el extremo de la función dentro del rectángulo de la Figura 1.1

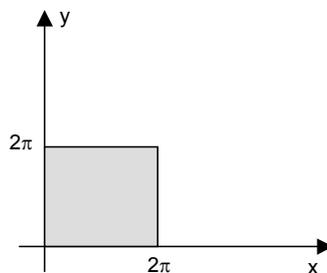


Figura 1.1

Los puntos críticos deben satisfacer simultáneamente las ecuaciones:

$$\begin{aligned} J_x &\equiv \cos(x) + \cos(x + y) = 0 \\ J_y &\equiv \cos(y) + \cos(x + y) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

De estas ecuaciones se deduce que los puntos críticos son aquellos para los que  $\cos(x) = \cos(y)$ , esto es,  $x = y \pm 2 \cdot n \cdot \pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Pero los puntos en cuestión deben estar dentro del cuadrado de la Figura 1.1, luego  $y = x$ . Con este valor de  $y$  en (2) se obtiene  $\cos(x) + \cos(2x) = 0$ , que es lo mismo que:

$$2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0 \quad (3)$$

ya que  $\cos(2x) = 2 \cdot \cos^2(x) - 1$ .

Las soluciones a la ecuación cuadrática (3) son  $\cos(x) = -1$  y  $\cos(x) = 1/2$ , por lo que  $x = \pi$ ,  $x = \pi/3$ ,  $x = 5\pi/3$ . Así hay tres puntos críticos en el interior del cuadrado,

$$(\pi, \pi), \quad (\pi/3, \pi/3), \quad (5\pi/3, 5\pi/3) \quad (4)$$

Para determinar la naturaleza de estos puntos, se debe evaluar el Hessiano en los puntos críticos:

$$\begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x+y) & -\operatorname{sen}(x+y) \\ -\operatorname{sen}(x+y) & -\operatorname{sen}(y) - \operatorname{sen}(x+y) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Para  $(\pi, \pi)$  el determinante del Hessiano es cero, luego la matriz es indefinida y no se puede determinar el tipo de punto crítico que es:

$$\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\pi & -\operatorname{sen}2\pi \\ -\operatorname{sen}2\pi & -\operatorname{sen}\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (6)$$

Para el punto  $(\pi/3, \pi/3)$ :

$$\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \\ -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\left| \begin{bmatrix} -\sqrt{3} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \equiv \begin{cases} \lambda = -0.8660 \\ \lambda = -2.5981 \end{cases}$$

El Hessiano es definido negativo, luego el punto produce un *máximo*  $J(\pi/3, \pi/3) = 3(3\sqrt{3})/2$ .

Finalmente para el punto  $(5\pi/3, 5\pi/3)$ :

$$\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{10\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{10\pi}{3} \\ -\operatorname{sen}\frac{10\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{10\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\left| \begin{bmatrix} \sqrt{3} - \lambda & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \equiv \begin{cases} \lambda = 0.8660 \\ \lambda = 2.5981 \end{cases}$$

El Hessiano es definido positivo, luego el punto produce un *mínimo*  $J(5\pi/3, 5\pi/3) = -(3\sqrt{3})/2$ .

Como no hay otros puntos críticos en el cuadrado se concluye que  $J(\pi, \pi) = 0$  no corresponde ni a un mínimo ni a un máximo.

Falta investigar el comportamiento de  $J(x, y)$  en la frontera o borde del cuadrado. En el borde que coincide con el eje  $x, y=0$ , luego  $J(x, 0) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(0) + \operatorname{sen}(x+0) = 2\operatorname{sen}(x)$ . Luego los valores extremos

de  $J(x,y)$  también varían entre 2 y -2. En definitiva, se concluye de este estudio que los valores extremos de  $J$  en la región considerada son  $-(3\sqrt{3})/2$  y  $(3\sqrt{3})/2$ .

♦

## 6.2 EXTREMOS CONDICIONADOS

La sección anterior se dedicó al cálculo del máximo y del mínimo de funciones de varias variables independientes. En muchos casos se requiere encontrar los valores máximos y mínimos de  $J(x)$  cuando las variables  $x_i$ , están conectadas por algunas relaciones de tipo funcional, de modo que las componentes  $x_i$  no son independientes.

Considérese que  $J(x_1, x_2, x_3)$  representa la temperatura en el punto  $(x_1, x_2, x_3)$  del espacio e interesa conocer el valor máximo o mínimo sobre una cierta superficie  $f(x_1, x_2, x_3)=0$ .

Si se pudiera despejar una de las variables en función de las otras, en la ecuación de la superficie, se podría sustituir dicho valor en  $J$  y obtener los valores extremos en función de las variables independientes. Por ejemplo si  $x_3=h(x_1, x_2)$ , entonces el problema se reduce a encontrar los valores extremos de:

$$H(x_1, x_2) = J(x_1, x_2, h(x_1, x_2))$$

En muchos casos, sin embargo, puede resultar imposible despejar unas variables en función de otras. El problema se puede complicar aún más si la temperatura se deseara conocer en los puntos de una curva del espacio, ya que en ese caso la restricción sobre las variables se expresa en la forma de intersecciones de dos curvas  $f_1(x_1, x_2, x_3)=0$  y  $f_2(x_1, x_2, x_3)=0$ .

Si se pudiera expresar a partir de estas dos ecuaciones, dos variables en función de la tercera, se podría sustituir dichas funciones en  $J$  y obtener así una función de una única variable. Desafortunadamente esto no suele ser posible. Se recurre entonces al *método de Lagrange*.

El método de Lagrange es como sigue:

Sea  $J(x_1, x_2, \dots, x_n)$  una función en  $\mathfrak{R}$ , cuyos valores extremos se piden cuando las variables están sometidas a las  $m$  condiciones o restricciones  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)=0, \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$ . Se introducen ahora los parámetros  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  y se forma la siguiente función que se denomina *Hamiltoniano*:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = J(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Si se define

$$\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \quad f^T = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

El Hamiltoniano puede ser escrito de la siguiente forma:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = J(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda^T f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Los números  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  que se introducen como ayuda para resolver el problema, se conocen como *multiplicadores de Lagrange*. Lagrange descubrió que si el punto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un *punto crítico*, entonces las derivadas parciales de  $H$  con respecto a las  $n+m$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  deben de ser nulas, es decir se debe satisfacer el sistema de  $n+m$  ecuaciones.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_1} &= \frac{\partial J(x)}{\partial x_1} + \lambda^T \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 0 = \frac{\partial J(x)}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \frac{\partial H}{\partial x_n} &= \frac{\partial J(x)}{\partial x_n} + \lambda^T \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = 0 = \frac{\partial J(x)}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} &= f_1(x) = 0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_m} &= f_m(x) = 0 \end{aligned} \tag{6.8}$$

O bien en forma compacta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial J(x)}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= f(x) = 0 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Este método proporciona una condición necesaria para que un punto sea un extremo de la función  $J$ . Los puntos así obtenidos deben comprobarse para determinar si originan un máximo, un mínimo, o ninguna de las dos cosas.

## ♦ Ejemplo 6.2:

Encontrar las distancias máxima y mínima desde el origen a la curva  $5x^2+6xy+5y^2-8=0$ .

Solución:

El problema consiste en determinar los valores extremos de  $J(x,y)=x^2+y^2$  con la condición  $f(x,y)=5x^2+6xy+5y^2-8=0$ .

En primer lugar, se construye el Hamiltoniano

$$H(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda \cdot (5x^2 + 6x \cdot y + 5y^2 - 8)$$

Las ecuaciones (6.8) toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial J}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x + \lambda \cdot (10 \cdot x + 6 \cdot y) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial J}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2y + \lambda \cdot (6 \cdot x + 10 \cdot y) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por  $y$  y la segunda por  $x$ , y restando se obtiene:

$$6\lambda \cdot (y^2 - x^2) = 0$$

Luego  $y = \pm x$ . Sustituyendo estos valores de  $y$  en la tercera de las ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned} x^2 &= 1/2 \Rightarrow J = 1 \\ x^2 &= 2 \Rightarrow J = 4 \end{aligned}$$

Luego el primer valor es un mínimo y el segundo valor es un máximo. Los puntos de mínimo son:

$$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \quad (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

Y los de máximo

$$(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad (-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$$

La curva corresponde pues, a una elipse de semiejes 2 y 1 cuyo eje mayor hace un ángulo de 45 grados con el eje  $x$ .

♦

### 6.3 OPTIMIZACION DE SISTEMAS DINAMICOS

Se va a introducir desde un punto de vista matemático, los elementos utilizados en el cálculo de extremos de funciones en el problema de la optimización de sistemas dinámicos. Con posterioridad se verá el porque de la optimización en el control de sistemas y sus interpretaciones físicas.

Considérese una función escalar  $J(x,u)$  o *índice de coste*, o también *índice de realización*; donde  $u$  es el *vector de control*,  $u \in \mathfrak{R}^m$  y  $x$  es el *vector de estados*,  $x \in \mathfrak{R}^n$ .

$$J(x,u) : \mathfrak{R}^{n \times m} \rightarrow \mathfrak{R}$$

Hay que comentar que el vector  $x$  de las secciones anteriores ahora está formado por las componentes del vector de estados del sistema (que se denomina también por  $x$ ) y por el vector de control  $u$ .

Supóngase que la descripción matemática del sistema esta dada por:

$$f(x,u) = 0 \tag{6.10}$$

El vector auxiliar  $x$  se determina para un  $u$  determinado a partir de la ecuación (6.10), luego  $f$  es un conjunto de  $n$  funciones escalares  $f \in \mathfrak{R}^n$ .

Se plantea el siguiente problema de extremos condicionados: *Encontrar el vector  $u$  que minimice la función  $J(x,u)$  y que satisfaga la condición  $f(x,u)=0$ .*

Para encontrar las condiciones necesarias y suficientes para un extremo local de  $J(x,u)$  que satisfaga además  $f(x,u)=0$ , se puede proceder como en la sección anterior.

Defínase el Hamiltoniano

$$H(x,u,\lambda) = J(x,u) + \lambda^T \cdot f(x,u) \tag{6.11}$$

donde  $\lambda \in \mathfrak{R}^n$ , es un multiplicador de Lagrange que debe determinarse. Como se vio en la sección anterior, los puntos de mínimo deben cumplir la condición necesaria:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x,u,\lambda) = f(x,u) = 0 \\ (b) \quad & \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial J}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ (c) \quad & \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial J}{\partial u} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Las ecuaciones (6.12) son similares a las ecuaciones (6.9) ya que el vector  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de la sección anterior equivale en este caso al vector  $(x, u)$ .

Las ecuaciones (6.12b) y (6.12c) representan en realidad una única ecuación, que señala que la derivada del Hamiltoniano con respecto a cada una de las variables de la función  $f$  es nula. La ecuación (6.12a) sólo hace constatar la ecuación de ligadura.

Se define el vector gradiente de una función escalar como un vector columna, luego:

$$H_\lambda \equiv \frac{\partial H}{\partial \lambda} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_m} \end{bmatrix}$$

Y de forma similar para:

$$H_x \equiv \frac{\partial H}{\partial x} \quad H_u \equiv \frac{\partial H}{\partial u}$$

El Jacobiano de  $f$  con respecto a  $x$  es una matriz de  $n \times n$

$$f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \equiv \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

De igual modo

$$f_u \equiv \frac{\partial f}{\partial u} \equiv \left[ \frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n} \right]$$

donde  $f$  es una matriz de  $n \times m$ .

De forma análoga se define  $J_x \equiv \frac{\partial J}{\partial x}$  y  $J_u \equiv \frac{\partial J}{\partial u}$ .

Luego las ecuaciones (6.12) se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (a) \quad & H_\lambda = f = 0 \\ (b) \quad & H_x = J_x + f_x^T \lambda = 0 \\ (c) \quad & H_u = J_u + f_u^T \lambda = 0 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Es interesante hacer notar lo siguiente. Los incrementos en  $H$  dependen de los incrementos en  $x$ ,  $u$  y  $\lambda$  en aproximación de primer orden de acuerdo con la ecuación:

$$dH = H_x^T dx + H_u^T du + H_\lambda^T d\lambda$$

Se observa que las ecuaciones (6.13) permiten tratar los incrementos  $dx$  y  $du$  como si fueran independientes, ya que de la condición de mínimo  $dH=0$ , se han deducido las ecuaciones (6.12). En realidad  $dx$  y  $du$  son incrementos dependientes, ya que  $x$  y  $u$  están relacionados por la ecuación (6.10), sin embargo, la introducción del vector de multiplicadores  $\lambda$  permite solucionar  $dx$  y  $du$  "como si" fueran independientes. Mediante la introducción de los multiplicadores de Lagrange se ha reemplazado el problema de minimizar  $J(x,u)$  sujeta a las ligadura  $f(x,u)=0$ , por el problema de minimizar  $H(x,u,\lambda)$  sin ligaduras.

Se va a obtener ahora una condición que garantice que el punto estacionario obtenido de (6.13) es un *mínimo*.

El desarrollo en serie de Taylor para los incrementos de  $J$  y  $f$  es:

$$dJ = \begin{bmatrix} J_x^T & J_u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ du \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} dx^T & du^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xu} \\ J_{ux} & J_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ du \end{bmatrix} + O(3) \quad (6.14)$$

$$df = \begin{bmatrix} f_x^T & f_u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ du \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} dx^T & du^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xu} \\ f_{ux} & f_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ du \end{bmatrix} + O(3) \quad (6.15)$$

donde  $f_{xu} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x}$  y así sucesivamente.

Para introducir el Hamiltoniano, se utilizan las ecuaciones anteriores para obtener:

$$[1, \lambda] \cdot \begin{bmatrix} dJ \\ df \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_x^T & H_u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ du \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} dx^T & du^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ du \end{bmatrix} + O(3) \quad (6.16)$$

Para un punto estacionario  $f=0$ , ya que esa es la ligadura para todo punto, y  $dJ$  debe ser también nulo, para incrementos de primer orden, para todos los incrementos  $dx$ ,  $du$ . Como  $f$  es igual a cero,  $df$  también es igual a cero, luego en aproximación de primer orden se debe verificar  $H_x=0$ ,  $H_u=0$  como en (6.13), luego el primer termino de (6.16) es nulo.

Para encontrar condiciones suficientes para el mínimo, nos fijamos en el segundo término de (6.16). Antes introducimos en (6.16) la dependencia de  $dx$  con respecto a  $du$ . En una aproximación de primer orden:

$$df = f_x dx + f_u du = 0 \quad \Rightarrow \quad dx = -f_x^{-1} \cdot f_u du \quad (6.17)$$

Sustituyendo esta relación en (6.16) se obtiene

$$dJ = \frac{1}{2} \cdot du^T \cdot \begin{bmatrix} -f_u^T \cdot f_x^{-T} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f_x^{-1} \cdot f_u \\ I \end{bmatrix} \cdot du + O(3) \quad (6.18)$$

Para que el punto estacionario sea un mínimo,  $dJ$  en (6.18) debe ser positivo para todos los incrementos  $du$ . Ahora bien, si sustituimos  $dx$  por su valor (6.17) en  $J(x,u)$  se obtiene que  $J$  es sólo función de  $u$ , luego la ecuación (6.14) queda al ser  $J_{xx}=J_{xu}=J_{ux}=0$ .

$$dJ = \frac{1}{2} \cdot du^T \cdot J_{uu}^f \cdot du \quad (6.19)$$

Donde  $J_{uu}^f$  se define como el valor de la derivada segunda de  $J$  con respecto al valor  $u$  cuando el valor de  $x$  se sustituye en función de  $u$ .

Igualando (6.17) y (6.18) se obtiene

$$J_{uu}^f = \begin{bmatrix} -f_u^T \cdot f_x^{-T} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f_x^{-1} \cdot f_u \\ I \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (6.20)$$

$$J_{uu}^f = H_{uu} - f_u^T \cdot f_x^{-T} \cdot H_{xu} - H_{ux} \cdot f_x^{-1} \cdot f_u + f_u^T \cdot f_x^{-T} \cdot H_{xx} \cdot f_x^{-1} \cdot f_u$$

Luego si “la matriz de curvatura con la ligadura  $f$  igual a cero” dada por (6.20) es:

- *Definida positiva* → el punto estacionario es un *mínimo*.
- *Definida negativa* → el punto estacionario es un *máximo*.
- *Indefinida* → el punto estacionario es un *punto de silla*.

♦ **Ejemplo 6.3:** Superficie cuadrática con ligadura lineal

Supóngase que la función de coste viene dada por la siguiente expresión:

$$J(x,u) = \frac{1}{2} [x, u] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + [0, 1] \cdot \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

Y la ligadura está dada por

$$f(x, u) = x - 3 = 0$$

El Hamiltoniano es:

$$H = J + \lambda^T f = \frac{1}{2}x^2 + xu + u^2 + u + \lambda \cdot (x - 3)$$

Donde  $\lambda$  es un escalar. Las condiciones para determinar un punto estacionario son (6.13) o

$$H_\lambda = x - 3 = 0$$

$$H_x = x + u + \lambda = 0$$

$$H_u = x + 2u + 1 = 0$$

Que tiene como solución  $x=3$ ,  $u=-2$ ,  $\lambda=-1$ , luego el punto estacionario es:

$$(x, u)^* = (3, -2)$$

Para verificar que este punto estacionario es un mínimo se determina la matriz de curvatura con la ligadura  $x=3$ .

$$J_{uu}^f = 2 = 2$$

Como  $J_{uu}^f$  es positiva, eso significa que el punto  $(x, u)^*$  es un mínimo. El valor de  $J$  en el mínimo es

$$J^*(3, -2) = 0.5$$

◆

◆ **Ejemplo 6.4:** *Índice de realización cuadrático con ligadura lineal.*

Considérese el siguiente índice de realización cuadrático

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$$

con la ligadura lineal

$$f(x, u) = x + mu - c$$

Los contornos de  $J(x,u)$  son elipses; si  $J(x,u) = l/2$ , los semiejes mayor y menor son  $a$  y  $b$ . La ligadura  $f(x,u)$  es una familia de líneas rectas parametrizadas por  $c$  (Notar que  $u$  es la variable independiente, estando  $x$  determinada por  $f(x,u)=0$ ).

El Hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \lambda \cdot (x + m \cdot u - c)$$

Las condiciones para un punto estacionario son:

$$H_\lambda = x + m \cdot u - c = 0 \quad (1)$$

$$H_x = \frac{x}{a^2} + \lambda = 0 \quad (2)$$

$$H_u = \frac{u}{b^2} + \lambda \cdot m = 0 \quad (3)$$

Para resolver este sistema de ecuaciones se utiliza la ecuación (3) para expresar el control óptimo  $u$  en términos del multiplicador de Lagrange.

$$u = -b^2 \cdot m \cdot \lambda$$

Sustituyendo este valor en (1) y resolviendo el sistema (1) y (2) se obtiene:

$$x = \frac{a^2 \cdot c}{a^2 + b^2 \cdot m^2} \quad \lambda = \frac{-c}{a^2 + b^2 \cdot m^2}$$

Con lo que el control óptimo es:

$$u = \frac{b^2 \cdot m \cdot c}{a^2 + b^2 \cdot m^2}$$

Para ver que este punto estacionario es un mínimo, se debe calcular la matriz de curvatura (6.20):

$$J_{uu}^f = \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

Puesto que  $J_{uu}^f$  es siempre positiva, entonces el punto estacionario es un mínimo.

El valor de la función de coste mínimo es:

$$J^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{a^2 + b^2 \cdot m^2}$$

◆

◆ **Ejemplo 6.5:** Ligaduras múltiples

Encontrar la distancia mínima entre la parábola  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + d$  y la línea recta  $y = x + c$ .

Solución:

En el problema hay dos ligaduras:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1) &= y_1 - a \cdot x_1^2 - b \cdot x_1 - d = 0 \\ f_2(x_2, y_2) &= y_2 - x_2 - c = 0 \end{aligned}$$

donde  $(x_1, y_1)$  es un punto de la parábola y  $(x_2, y_2)$  es un punto de la recta.

Se considera como función de coste la mitad del cuadrado de la distancia entre los dos puntos:

$$J(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2$$

Se introduce un multiplicador de Lagrange por cada ligadura. El Hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2 + \lambda_1 \cdot (y_1 - a \cdot x_1^2 - b \cdot x_1 - d) + \lambda_2 \cdot (y_2 - x_2 - c)$$

Las condiciones para un punto estacionario son:

$$H_{x_1} = x_1 - x_2 - 2 \cdot a \cdot \lambda_1 \cdot x_1 - \lambda_1 \cdot b = 0 \quad (1)$$

$$H_{x_2} = -x_1 + x_2 - \lambda_2 = 0 \quad (2)$$

$$H_{y_1} = y_1 - y_2 + \lambda_1 = 0 \quad (3)$$

$$H_{y_2} = -y_1 + y_2 + \lambda_2 = 0 \quad (4)$$

$$H_{\lambda_1} = y_1 - a \cdot x_1^2 - b \cdot x_1 - d = 0 \quad (5)$$

$$H_{\lambda_2} = y_2 - x_2 - c = 0 \quad (6)$$

De (5) se obtiene

$$y_1 = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + d \quad (7)$$

De (2) y (4) se obtiene

$$\lambda_2 = x_2 - x_1 = y_2 - y_1 \quad (8)$$

De (7) y (6) se obtiene

$$x_2 - x_1 = a \cdot x_1^2 + x_1 + d - x_2 - c \quad (9)$$

Luego

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot (a \cdot x_1^2 + (b-1) \cdot x_1 + d - c) \quad (10)$$

De (3) y (4),  $\lambda_1 = -\lambda_2$ , por lo que de (8) y (10)  $\lambda_1 = x_1 - x_2$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \cdot (a \cdot x_1^2 + (b-1) \cdot x_1 + d - c) \quad (11)$$

Por último fijarse que la ecuación de la parábola es:

$$(2a \cdot x_1 + (b-1)) \cdot \lambda_1 = 0 \quad (12)$$

o

$$(2 \cdot a \cdot x_1 + (b-1)) \cdot (a \cdot x_1^2 + (b-1) \cdot x_1 + d - c) = 0 \quad (13)$$

La ecuación cúbica (13) determina el  $x_1$  óptimo para unos valores dados de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ . Si la recta cruza la parábola, la(s) intersección(es) es la solución óptima. (En este caso  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ). En otro caso habrá un único par de puntos distintos  $(x_1, x_2)$ ,  $(y_1, y_2)$ .

Una vez conocido  $x_1$ , los valores de  $x_2$ ,  $y_1$  e  $y_2$  se determinan de (10), (7) y (8) respectivamente.

Sustituyendo estos valores en la función de coste se determina que la distancia mínima es  $\sqrt{2 \cdot J^*}$ .

◆

## 6.4 SOLUCIONES NUMERICAS

La solución analítica para el punto estacionario  $(x,u)^*$  y el valor mínimo  $J^*$  de la función de coste, sólo es posible determinarlos en casos muy sencillos. En la mayoría de los casos reales se deben utilizar métodos o algoritmos numéricos de optimización que se implementan en programas para ser ejecutados en computadores. Algunos de los métodos numéricos de optimización más utilizados son: el método del gradiente, el método del paso descendente, el método de Fletcher-Powell, el método del gradiente conjugado, etc.

El programa MATLAB dispone de una potente librería de funciones denominada *Optimization Toolbox* para la resolución de problemas de optimización.

# TEMA 7

## CONTROL OPTIMO DE SISTEMAS DISCRETOS

### 7.1 INTRODUCCION

En este capítulo se extiende el método del Tema 6 a la optimización de una función de índice o coste, asociada con un sistema dinámico discreto que varía con el tiempo.

En el tema anterior se introdujo la función de coste como una función escalar que se tenía que minimizar y después se introdujo las ligaduras entre las variables. En la optimización de sistemas dinámicos, el proceso siempre es a la inversa. En primer lugar se introducen las ecuaciones dinámicas que describen al sistema, y que constituyen ecuaciones de ligadura. Estas ecuaciones están *determinadas por la física del problema*. La función de coste se *selecciona por el ingeniero* para hacer que el sistema funcione de una manera determinada.

En los Temas 1 y 2 se ha estudiado diversos métodos de diseño de controladores para sistemas continuos y discretos, respectivamente. Estos métodos permiten colocar los polos del sistema en lazo cerrado (en el caso de que el sistema sea controlable y observable) en las posiciones que se especifiquen y que normalmente se fijan en función del comportamiento deseado en el transitorio y en el estacionario (velocidad de respuesta, sobreelongación máxima, tiempo de asentamiento, errores en el estado estacionario, etc.). No obstante, existen muchos casos en los que no resulta sencillo saber donde colocar los polos del sistema en lazo cerrado.

Por ejemplo, supóngase el caso de un motor del que se desea obtener una respuesta dinámica muy rápida. Lógicamente se deberán situar los polos muy alejados del origen del plano  $s$ , lo que hará que la señal de control tome valores muy elevados, que incluso pueden llegar a superar el valor máximo del actuador, haciendo que la señal de control se sature, es

decir, quede limitado a su valor máximo. Así, si la máxima salida que puede dar el actuador es de 5 Voltios, puede ocurrir que para conseguir una velocidad de respuesta muy rápida se requiera una señal de control superior a los 5 Voltios, como esta señal no puede ser suministrada por el actuador, la respuesta del motor no sería la establecida por los polos en lazo cerrado del sistema. Por ello en muchos casos es necesario limitar la velocidad de respuesta de un sistema al valor que puede conseguirse sin llegar a la saturación de la señal de control.

Existen también muchos problemas de control en que las especificaciones de diseño se hacen en forma de limitaciones de ciertas variables de estado y que resultan imposibles de especificar de forma sencilla como asignación de polos.

Otra razón para el control óptimo está en que el sistema puede que no sea controlable, por lo que existirá una región del espacio de estados a la que el sistema no puede llevarse, por lo que no todos los polos del sistema se podrán situar donde se desee. La teoría del control óptimo permitirá en estos casos, siempre que la parte no controlable sea estable, que el sistema se comporte de una forma aceptable.

## 7.2 SOLUCION AL PROBLEMA GENERAL DE LA OPTIMIZACION DISCRETA

### 7.2.1 Formulación del problema

Supóngase que la planta está descrita por la siguiente ecuación general dinámica, no lineal, discreta en el tiempo:

$$x_{k+1} = f^k(x_k, u_k) \quad (7.1)$$

La condición inicial es  $x_0$ . El superíndice en la función  $f$  significa que en general esta función será variable con el tiempo. Se supone que el vector de estado  $x_k$  es de dimensión  $n$ , y que el vector de control  $u_k$  es de dimensión  $m$ . La ecuación (7.1) es la *ecuación de ligadura* ya que permite determinar el valor del estado en  $k+1$  en función del vector de control y del vector de estado en el tiempo  $k$ . Claramente  $f \in \mathfrak{R}^n$ .

Supóngase que se tiene asociado una *función coste* o *índice de comportamiento* dado por la expresión general.

$$J_i = \phi(N, x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L^k(x_k, u_k) \quad (7.2)$$

Donde:

- $[i, N]$  es el intervalo de tiempo en el que se está interesado en el comportamiento del sistema.
- $\phi(N, x_N)$  es una función del tiempo final  $N$  y del valor del estado en dicho instante.
- $L^k(x_k, u_k)$  es una función del estado y del control en los instantes  $k$  del intervalo  $[i, N]$ , en general será variable con el tiempo (de ahí el superíndice  $k$ ).

El *problema de control óptimo* consiste en determinar el control  $u_k^*$  en el intervalo  $[i, N]$  que hace que el sistema (7.1) evolucione según los estados  $x_k^*$  de modo que se minimiza la función de coste (7.2)

♦ **Ejemplo 7.1:** *Algunas funciones de coste útiles*

a) Problemas de Tiempo Mínimo

Supóngase que se desea encontrar el control  $u_k$  que lleva al sistema de un estado inicial  $x_0$  a un estado final deseado  $x$  en un tiempo mínimo  $N$ . En este caso, es posible, seleccionar la función de coste como:

$$J = N = \sum_{k=0}^{N-1} 1$$

y especificar la condición frontera

$$x_N = x$$

En este caso  $\phi=N$  y  $L=0$ , o de forma equivalente  $\phi=0$  y  $L=1$ .

b) Problemas de Combustible Mínimo

Supóngase que la acción de control es función directa de la cantidad de combustible o fuente de energía necesaria para controlar el sistema, como en misiles, aviones o control de temperatura de hornos y calefacciones.

Para determinar el control escalar  $u_k$  que lleva al sistema desde  $x_0$  a un estado final deseado  $x$  en un tiempo fijo  $N$  utilizando el mínimo combustible, se puede utilizar:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k|$$

Ya que el combustible quemado es proporcional a la magnitud del vector de control. En este caso  $\phi = 0$  y  $L^k = |u_k|$ . La condición frontera es, también esta vez,  $x_N = x$ .

### c) Problemas de energía mínima

Supóngase que se desea determinar el vector de control  $u_k$  que minimice la energía del estado final y de todos los estados intermedios, así como la del control utilizado para conseguirlo. Supóngase que se fija el instante final en  $N$ . Se puede utilizar como función de coste:

$$J = \frac{1}{2} \cdot s \cdot x_N^T \cdot x_N + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (q \cdot x_k^T \cdot x_k + r \cdot u_k^T \cdot u_k)$$

Donde  $s$ ,  $q$  y  $r$  son factores escalares de peso. En este caso:

$$\phi = \frac{1}{2} \cdot s \cdot x_N^T \cdot x_N \quad L = \frac{1}{2} \cdot (q \cdot x_k^T \cdot x_k + r \cdot u_k^T \cdot u_k)$$

son funciones cuadráticas.

Minimizar la energía corresponde, de alguna manera, a mantener el estado y el control próximos a cero. En el caso de que sea más importante mantener pequeños a los estados intermedios, se debe elegir un valor de  $q$  elevado, para que influya más en  $J$ , función que se desea minimizar.

Por otra parte, si es más importante que la energía de control sea pequeña, entonces se debe seleccionar un valor elevado de  $r$ .

Finalmente si se está interesado en un valor pequeño del estado final, entonces el valor de  $s$  debe ser elevado.

Para mayor generalidad se pueden elegir matrices de peso  $Q$ ,  $R$  y  $S$  en lugar de escalares.

◆

## 7.2.2 Solución al problema

Para determinar la secuencia de control óptima  $u_i^*$ ,  $u_{i+1}^*$ , ...,  $u_{N-1}^*$  que minimiza  $J$  se utiliza el *método de los multiplicadores de Lagrange* (explicado en el Tema 6).

Como en cada instante  $k$  del intervalo  $[0, N]$  existe una ligadura dada por (7.1), se debe introducir un multiplicador de Lagrange en cada instante. Como la ligadura es un vector de

dimensión  $n$ , se introduce el multiplicador  $\lambda_k \in \mathfrak{R}^n$ , y se añade la ligadura (7.1) a la función de coste (7.2) para obtener una función de *coste aumentado*  $J^1$ .

$$J^1 = \phi(N, x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left[ L^k(x_k, u_k) + \lambda_{k+1}^T (f^k(x_k, u_k) - x_{k+1}) \right] \quad (7.3)$$

Se define el *Hamiltoniano* como:

$$H^k(x_k, u_k) = L^k(x_k, u_k) + \lambda_{k+1}^T f^k(x_k, u_k) \quad (7.4)$$

Por lo que la función de coste modificando algunos índices se puede escribir en la forma:

$$J^1 = \phi(N, x_N) - \lambda_N^T x_N + H^0(x_0, u_0) + \sum_{k=1}^{N-1} \left[ H^k(x_k, u_k) - \lambda_k^T x_k \right] \quad (7.5)$$

Con respecto al Tema 6 se tienen las siguientes diferencias: el Hamiltoniano no incluye a  $x_{k+1}$  y se define un Hamiltoniano para cada instante  $k$ .

Se van a examinar a continuación los incrementos en  $J^1$  debido a incrementos en las variables  $x_k$ ,  $u_k$  y  $\lambda_k$ . Supóngase que el tiempo final  $N$  es fijo. De acuerdo con la teoría de los multiplicadores de Lagrange, el incremento  $dJ^1$  debe de ser cero en un punto de mínimo. El incremento en la función de coste se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} dJ^1 &= \left( \phi_{x_N} - \lambda_N \right)^T \cdot dx_N + \left( H_{x_N}^0 \right)^T \cdot dx_0 + \left( H_{u_0}^0 \right)^T \cdot du_0 \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} \left[ \left( H_{x_k}^k - \lambda_k \right)^T \cdot dx_k + \left( H_{u_k}^k \right)^T \cdot du_k \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^N \left( H_{\lambda_k}^{k-1} - x_k \right)^T \cdot d\lambda_k \end{aligned} \quad (7.6)$$

Donde

$$H_{x_k}^k = \frac{\partial H_k}{\partial x_k}$$

y así sucesivamente. Las condiciones necesarias para un mínimo son ahora:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad x_{k+1} &= \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}} \quad k = 0, \dots, N-1 \\
 (b) \quad \lambda_k &= \frac{\partial H^k}{\partial x_k} \quad k = 0, \dots, N-1 \\
 (c) \quad 0 &= \frac{\partial H^k}{\partial u_k} \quad k = 0, \dots, N-1
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Estas condiciones se obtienen de los términos incluidos en los sumatorios y del coeficiente  $du_0$ . De los otros términos se obtiene:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad &\left( \frac{\partial \phi}{\partial x_N} - \lambda_N \right)^T \cdot dx_N = 0 \\
 (b) \quad &\left( \frac{\partial H^0}{\partial x_0} \right)^T \cdot dx_0 = 0
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Del examen de las ecuaciones (7.3) y (7.4) se puede ver que  $\lambda_0$  no aparece en  $J^1$ . La definición de los  $\lambda$  se ha hecho de modo que el índice inferior en (7.7b) se puede tomar 0 en lugar de como 1, ya que  $\lambda_0=0$ , obteniéndose así una notación más limpia.

Si se comparan las ecuaciones (7.7) con las (6.13), se puede ver que son muy similares, salvo que en este caso las ecuaciones se deben de verificar para cada instante  $k$  del intervalo  $[0, N-1]$ . A la condición (7.7c) se le denomina la *condición de estacionaridad*.

Si escribimos las ecuaciones (7.7) de forma explícita en términos de  $L^k$  y  $f^k$  utilizando la ecuación (7.4) se obtiene las fórmulas del Cuadro 7.1.

La igualdad (7.9a) es la ecuación de ligadura o *ecuación del sistema*. Es una ecuación recursiva que se evalúa hacia adelante para calcular los estados  $x_k$ . Por el contrario la ecuación (7.9b) es la *ecuación del co-estado* una ecuación recursiva para los multiplicadores  $\lambda_k$  que se evalúa hacia atrás.

Se obtiene, pues, que los multiplicadores de Lagrange, introducidos de forma ficticia, es una variable que tiene una ecuación dinámica propia. A  $\lambda$  se le suele denomina el *co-estado del sistema*, y la ecuación (7.9b) se denomina *sistema adjunto*. El sistema (7.9a) y el sistema (7.9b) son ecuaciones en diferencias acopladas, y definen un *problema de valores de frontera en dos puntos*, ya que las condiciones frontera necesarias para la solución, son el estado inicial  $x_0$  y el co-estado final  $\lambda_N$ .

<b>Problema general de optimización discreta</b>	
Modelo del sistema	$x_{k+1} = f^k(x_k, u_k)$
Función de coste	$J = \phi(N, x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L^k(x_k, u_k)$
Hamiltoniano	$H^k(x_k, u_k) = L^k(x_k, u_k) + \lambda_{k+1}^T f^k(x_k, u_k)$
<b>Controlador Optimo</b>	
Ecuación de estado	$x_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}} = f^k(x_k, u_k) \quad (7.9a)$
Ecuación del co-estado	$\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial x_k} = \left[ \frac{\partial f^k}{\partial x_k} \right]^T \cdot \lambda_{k+1} + \frac{\partial L^k}{\partial x_k} \quad (7.9b)$
Condición estacionaria	$0 = \frac{\partial H^k}{\partial u_k} = \left[ \frac{\partial f^k}{\partial u_k} \right]^T \cdot \lambda_{k+1} + \frac{\partial L^k}{\partial u_k} \quad (7.9c)$
Condiciones frontera	$\left( \frac{\partial L^0}{\partial u_0} + \left[ \frac{\partial f^0}{\partial x_0} \right]^T \cdot \lambda_1 \right)^T \cdot dx_0 = 0$ $\left( \frac{\partial \phi}{\partial x_N} - \lambda_N \right)^T \cdot dx_N = 0$

Cuadro 7.1

La *condición de estacionaridad* (7.9c) permite que el control óptimo  $u_k$  se exprese en términos del co-estado. Se da así la situación paradójica de que para obtener el control óptimo sea necesario previamente el cálculo del co-estado  $\lambda_k$ .

Las ecuaciones (7.8) especifican las condiciones frontera necesarias para resolver las ecuaciones en diferencias (7.9). La primera de ellas impone una condición en el instante final  $N$ , mientras que la segunda la impone en el instante inicial. En nuestras aplicaciones, el sistema comenzará siempre en un estado inicial conocido  $x_0$ . Por lo que al ser este valor fijo  $dx_0=0$ , y no existe pues ninguna restricción al valor de  $H^0_{x_0}$ . Por lo que siempre se puede ignorar (7.8b) y utilizar como condición inicial el valor  $x_0$ .

Para la ecuación (7.8a), si el estado final se fija, se usa el valor de dicho estado  $x_N$ , como condición terminal del sistema de ecuaciones, ya que en ese caso  $dx_N=0$ , y se cumple la condición (7.8a).

En el caso de que no se esté interesado en un determinado valor final del vector de estado, entonces  $x_N$  puede variarse en la búsqueda de la solución óptima. En este caso  $dx_0$  no es cero, por lo que la ecuación (7.8a) requiere que se verifique

$$\lambda_N = \frac{\partial \phi}{\partial x_N} \quad (7.10)$$

Que es la condición final del co-estado.

En resumen, la condición inicial para el problema del valor frontera en dos puntos es el estado inicial  $x_0$ . La condición final es, o bien un valor deseado para  $x_N$ , o el valor (7.10) de  $\lambda_N$ .

## 7.3 CONTROL ÓPTIMO DE SISTEMAS DINÁMICOS, LINEALES Y DISCRETOS

### 7.3.1 Formulación del problema

Supóngase que la dinámica del sistema viene dada por una ecuación en diferencias, lineal, discreta, en variables de estado de la forma

$$x_{k+1} = F \cdot x_k + G \cdot u_k \quad (7.11)$$

Donde:

$x$  es el vector de estados de dimensión  $n \times 1$ .

$u$  es el vector de control de dimensión  $m \times 1$ .

$F$  y  $G$  son matrices constantes conocidas de dimensiones  $n \times n$  y  $n \times m$  respectivamente.

El estado inicial  $x_0$  se supone conocido. Como en el caso del control por realimentación de variables de estado (ver sección 2.8), se busca una ley de control lineal de la forma:

$$u_k = -K \cdot x_k$$

Donde  $K$  es una matriz de ganancia que se determinará de modo que se minimice una determinada *función de coste* o *índice de realización*  $J$ , que se expresa como el sumatorio de una forma cuadrática en los estados y de una forma cuadrática en el control

$$J = \frac{1}{2} \cdot x_N^T \cdot S \cdot x_N + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T \cdot Q \cdot x_k + u_k^T \cdot R \cdot u_k) \quad (7.12)$$

Donde  $S$ ,  $Q$  y  $R$  son matrices simétricas, semidefinidas positivas y se supone, además, que  $|R|$  es distinto de cero. El intervalo de control es  $[0, N]$ , luego se debe encontrar la secuencia  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$  que minimiza  $J$ .

Normalmente el tiempo final será infinito, lo cual indica que se está interesado en la evolución del sistema de ahora en adelante, incluyendo pues los estados transitorio y estacionario. No obstante en algunos casos el tiempo  $N$  es finito y con un valor fijo, como ocurre en los problemas de guiado de misiles en los que se está interesado en la evolución del móvil hasta un instante de tiempo finito y fijo en el que se producirá el contacto con otro cuerpo, en estos casos, el intervalo de control va decreciendo hasta anularse, instante en el que finaliza el proceso de control.

Las matrices  $Q$ ,  $R$  y  $S$  se conocen como *matrices de peso del estado*, del *control* y del *estado final*, respectivamente. El problema estriba en dadas unas matrices  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $F$  y  $G$  encontrar la matriz  $K$  que minimiza la función de coste. En este punto, el problema deja de ser un problema de control para convertirse en un problema de cálculo numérico.

Surge la siguiente pregunta “¿Como se eligen las matrices  $S$ ,  $Q$  y  $R$ ?”. El problema no es sencillo, ni existe un método general aplicable a todos los casos. En realidad, rara vez se va a encontrar un problema real cuyo último objetivo de diseño sea minimizar una función de coste. Precisamente el problema suele residir en encontrar una formulación matemática que exprese los objetivos de diseño.

La ventaja de la formulación del objetivo de diseño en la forma realizada es que permite un compromiso práctico entre la formulación real del problema, que no se puede resolver, y la formulación de un problema artificial que si se puede resolver. Este método no es extraño y aparece en muchos contextos de las ciencias y de la ingeniería.

El objetivo del diseñador del sistema de control estriba, pues, fundamentalmente en la selección de las matrices  $S$ ,  $Q$  y  $R$ .

El término cuadrático  $x^T \cdot Q \cdot x$  es una medida de lo que se aparta el estado del sistema en el instante  $k$  del valor de origen  $x_0$ , y el término  $u^T \cdot R \cdot u$  representa la penalización o coste del control.

La matriz de peso  $Q$  especifica la importancia relativa de unos a otros que se concede a los elementos del vector de estado.

◆ **Ejemplo 7.2:**

Supóngase que  $x_1$  representa el error del sistema (diferencia entre variables de salida y valor de referencia deseado), y que  $x_2$  representa su derivada. Si sólo interesa imponer limitaciones al valor del error y no a su derivada, se puede seleccionar la matriz  $Q$  como

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo que produce la forma cuadrática

$$x^T \cdot Q \cdot x = x_1^2$$

Pero esta elección como función de peso del estado puede conducir a un sistema de control para el que la velocidad  $x_2$  es mayor de lo que se desea. Para limitar la velocidad, la forma cuadrática debe de incluir un factor de peso en la velocidad, por ejemplo

$$x^T \cdot Q \cdot x = x_1^2 + c^2 \cdot x_2^2$$

Lo que hace que la matriz de peso  $Q$  tenga la siguiente forma:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^2 \end{bmatrix}$$

◆

Un caso muy interesante surge cuando se está interesado únicamente en la influencia del estado en la salida del sistema.

$$y = Cx$$

Si el sistema es de una sola salida, entonces

$$y = C^T x$$

Si se quiere limitar las variaciones en la señal de salida un criterio apropiado de minimización es:

$$y^2 = x^T \cdot C \cdot C^T \cdot x$$

Luego en este caso

$$Q = C \cdot C^T$$

Lo dicho para el vector de estados y la matriz  $Q$  es extensible al vector de control, a la matriz  $R$ , al estado final y a la matriz  $S$ . Alguna de las matrices puede hacerse cero, lo que implicaría que no se pone ninguna restricción sobre dicho elemento.

Si por ejemplo  $R$  es nulo, la señal de control no está sometida a ninguna limitación, lo que puede hacer que la señal de control generada por el controlador sea superior a la máxima que puede producir el actuador (dispositivo físico que produce la señal de control que actúa sobre la planta), lo que hará que éste se sature. Esta saturación puede llevar incluso a la inestabilidad del sistema, aunque en el diseño, sin tener en cuenta la saturación, el sistema en lazo cerrado es estable.

La relación entre las matrices de peso  $Q$ ,  $S$  y  $R$  y el comportamiento dinámico del sistema en lazo cerrado depende, por supuesto, de las matrices  $F$  y  $G$ , y en general la relación es muy compleja. Como ya se ha señalado con anterioridad, lo normal es seguir un proceso interactivo, determinando el valor de  $K$  para distintos valores de las matrices de peso, y elegir aquellas que produzcan un mejor resultado en la simulación.

Para resolver el problema lineal, cuadrático se define, en primer lugar el Hamiltoniano, en la forma:

$$H^k = \frac{1}{2} (x_k^T \cdot Q \cdot x_k + u_k^T \cdot R \cdot u_k) + \lambda_{k+1}^T (F \cdot x_k + G \cdot u_k) \quad (7.13)$$

Teniendo en cuenta la relación existente entre la ecuación (7.4) y la (7.13), la solución del Cuadro 7.1 da las siguientes ecuaciones de estado y de co-estado o ecuación adjunta.

$$x_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}} = F \cdot x_k + G \cdot u_k \quad (7.14)$$

$$\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial x_k} = Q \cdot x_k + F^T \cdot \lambda_{k+1} \quad (7.15)$$

Y la ecuación de control o ecuación estacionaria

$$0 = \frac{\partial H^k}{\partial u_k} = R \cdot u_k + G^T \cdot \lambda_{k+1} \quad (7.16)$$

Se deben definir también las condiciones frontera. Como ya se ha señalado, el estado inicial  $x_0$  se supone conocido, lo que fija una de las condiciones. Para la otra, se supone que el estado final  $x_N$  no se fija, luego la condición frontera se obtiene de la ecuación (7.10), como  $\phi = (1/2) \cdot x_N^T \cdot S \cdot x_N$  toma la forma:

$$\lambda_N = \frac{\partial \phi}{\partial x_N} = S_N \cdot x_N \quad (7.17)$$

Se tiene perfectamente especificado el problema de control óptimo para sistemas lineales, discretos con función de coste cuadrático. Consiste en dos ecuaciones en diferencias (7.14) y (7.15), con el control dado por (7.16), con la condición inicial dada y con el valor final de  $\lambda$  dado por (7.17).

### 7.3.2 Solución del problema

Supóngase que se verifica una relación como la (7.17) para todo tiempo  $k \leq N$ .

$$\lambda_k = S_k \cdot x_k \quad (7.18)$$

Ahora (7.16) se puede poner

$$R \cdot u_k = -G^T \cdot S_{k+1} \cdot x_{k+1} = -G^T \cdot S_{k+1} \cdot (F \cdot x_k + G \cdot u_k)$$

Despejando  $u_k$  se obtiene

$$u_k = -(R + G^T \cdot S_{k+1} \cdot G)^{-1} \cdot G^T \cdot S_{k+1} \cdot F \cdot x_k \quad (7.19)$$

Sustituyendo (7.18) en (7.15) se obtiene

$$S_k \cdot x_k = F^T \cdot S_{k+1} \cdot x_{k+1} + Q \cdot x_k \quad (7.20)$$

Utilizando la ecuación (7.14) para  $x_{k+1}$ , se obtiene

$$S_k \cdot x_k = F^T \cdot S_{k+1} \cdot (F \cdot x_k + G \cdot u_k) + Q \cdot x_k \quad (7.21)$$

En la expresión anterior, utilizando (7.19) para  $u_k$  se obtiene:

$$S_k \cdot x_k = F^T \cdot S_{k+1} \cdot \left[ F \cdot x_k - G \cdot (R + G^T \cdot S_{k+1} \cdot G)^{-1} \cdot G^T \cdot S_{k+1} \cdot F \cdot x_k \right] + Q \cdot x_k$$

Y llevando todos los términos a un lado se obtiene

$$\left[ S_k - F^T \cdot S_{k+1} \cdot F + F^T \cdot S_{k+1} \cdot G \cdot (R + G^T \cdot S_{k+1} \cdot G)^{-1} \cdot G^T \cdot S_{k+1} \cdot F - Q \right] x_k = 0 \quad (7.22)$$

Como la ecuación (7.22) se debe verificar para cualquier  $x_k$ , la matriz debe ser idénticamente nula, de lo que se deduce la siguiente ecuación de recurrencia hacia atrás para  $S_k$ .

$$S_k = F^T \cdot \left[ S_{k+1} - S_{k+1} \cdot G \cdot (R + G^T \cdot S_{k+1} \cdot G)^{-1} \cdot G^T \cdot S_{k+1} \right] F + Q \quad (7.23)$$

La condición frontera para (7.23) es conocida y está dada por la relación (7.17). Se ha encontrado, pues, una secuencia de valores de  $S$  que hace que se cumpla la relación (7.18) para todo  $k \leq N$ .

Como la matriz  $S_N$  y las matrices  $Q$  y  $R$  son simétricas también lo son las matrices  $S_k$ . A la ecuación (7.23) se le denomina *ecuación de Riccati*. A menudo se suele escribir en la forma:

$$S_k = F^T \cdot M_{k+1} \cdot F + Q \quad (7.24)$$

donde:

$$M_{k+1} = S_{k+1} - S_{k+1} \cdot G \cdot (R + G^T \cdot S_{k+1} \cdot G)^{-1} \cdot G^T \cdot S_{k+1} \quad (7.25)$$

La matriz que debe invertirse  $(R + G^T \cdot S_{k+1} \cdot G)$  tiene la misma dimensión que el vector de control, que suele ser menor que el número de estados. Para sistemas de una entrada y una salida es, pues, un escalar.

Las ecuaciones (7.24) y (7.25) deben de resolverse hacia atrás con la condición inicial  $S_N$ . Para determinar  $u_k$  se utiliza (7.19) para obtener

$$u_k = -K_k \cdot x_k \quad (7.26)$$

donde

$$K_k = (R + G^T \cdot S_{k+1} \cdot G)^{-1} \cdot G^T \cdot S_{k+1} \cdot F \quad (7.27)$$

A  $K_k$  se le denomina *ganancia de Kalman* y es la ganancia de realimentación óptima que se estaba buscando. El procedimiento de cálculo se resume en el Cuadro 7.2.

1) Condiciones iniciales $K_N \leftarrow 0; S_N$
2) Hacer $k \leftarrow N$
3) Hacer $M_k \leftarrow S_k - S_k \cdot G \cdot (R + G^T \cdot S_k \cdot G)^{-1} \cdot G^T \cdot S_k$
4) Hacer $K_{k-1} \leftarrow (R + G^T \cdot S_k \cdot G)^{-1} \cdot G^T \cdot S_k \cdot F$
5) Guardar $K_{k-1}$
6) Hacer $S_{k-1} \leftarrow F^T \cdot M_k \cdot F + Q$
7) Hacer $k \leftarrow k-1$
8) Ir al paso 3

Cuadro 7.2: Algoritmo de cálculo

Independientemente de cual sea el estado inicial  $x_0$ , para aplicar el control a una planta dada, siempre se utilizan las ganancias calculadas con el algoritmo anterior, que deben por ello estar almacenadas en un computador.

De la ecuación de estados (7.11) y de la ley de control (7.26) se obtiene la función de transferencia en lazo cerrado

$$x_{k+1} = (F - G \cdot K_k) \cdot x_k \quad (7.28)$$

que permite calcular la trayectoria óptima de los estados.

Un aspecto importante que hay que hacer notar es que aunque el sistema es invariante en el tiempo (las matrices  $F$  y  $G$  son constantes) se obtiene una ley de realimentación variable en el tiempo, es decir, la ganancia  $K$  depende del instante  $k$ . No obstante, estos valores pueden ser calculados y guardados para su uso posterior, siempre que la longitud  $N$  del intervalo de control sea conocida. Esto es así debido a que, como se muestra en el Algoritmo 2.1, no se necesita el estado inicial  $x_0$  para el cálculo de las ganancias; luego, independientemente de cual sea el estado inicial del sistema, la ley de control es la misma.

<b>Regulador Discreto Lineal Cuadrático</b>	
Modelo del sistema	$x_{k+1} = F \cdot x_k + G \cdot u_k \quad k > 0, x_0 \text{ dado}$
Función de coste	$J = \frac{1}{2} \cdot x_N^T \cdot S \cdot x_N + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T \cdot Q \cdot x_k + u_k^T \cdot R \cdot u_k)$
Suposiciones	$S \geq 0, Q \geq 0, R \geq 0$ y simétricas
<b>Ley de realimentación óptima</b>	
$S_k = F^T \cdot [S_{k+1} - S_{k+1} \cdot G \cdot (R + G^T \cdot S_{k+1} \cdot G)^{-1} \cdot G^T \cdot S_{k+1}] \cdot F + Q \quad k < N, S_N \text{ dado}$	
$K_k = (R + G^T \cdot S_{k+1} \cdot G)^{-1} \cdot G^T \cdot S_{k+1} \cdot F \quad k < N$	
$u_k = -K_k \cdot x_k \quad k < N$	
$J^* = \frac{1}{2} \cdot x_0^T \cdot S_0 \cdot x_0$	

Cuadro 7.3

Con la ley de control óptima se obtiene, después de algunos cálculos, que la función de coste óptima es:

$$J^* = \frac{1}{2} \cdot x_0^T \cdot S_0 \cdot x_0 \quad (7.29)$$

Este resultado es interesante. Como se ha visto, la secuencia  $S_k$  puede calcularse antes de que se aplique la ley de control, por lo que un estado inicial  $x_0$  se puede utilizar (7.29) para determinar el valor de la función de coste que se obtiene al aplicar el control óptimo ¡¡antes de que se aplique!!.

En general cualquier tiempo  $k$  del intervalo  $[0, N]$  puede considerarse como el intervalo inicial del subintervalo  $[k, N]$ , de modo que el valor de la función de coste para ese subintervalo es:

$$J_k^* = \frac{1}{2} \cdot x_k^T \cdot S_k \cdot x_k \quad (7.30)$$

Lo que significa que dado el estado actual  $x_k$  se puede calcular el “coste restante” de aplicar la ley de control desde los tiempos  $k$  a  $N$ .

En el Cuadro 7.3 resumen las ecuaciones de control óptimo para sistemas lineales, discretos, con función de coste cuadrática.

Aunque el problema se ha resuelto con las matrices  $F$ ,  $G$ ,  $Q$  y  $R$  constantes, el resultado del Cuadro 7.3 es válido para sistemas variables en el tiempo  $F_k$ ,  $G_k$ ,  $Q_k$  y  $R_k$ , sin más que añadir los subíndices a estas matrices en todos los resultados anteriores. Las demostraciones son idénticas. El hecho de haber considerado el caso invariante en el tiempo ha sido por simplificar un poco la notación.

Salvo en los casos más sencillos, la solución del problema de control óptimo requiere el uso de un computador. Existe un gran número de paquetes matemáticos que permiten resolver la ecuación de Riccati.

♦ **Ejemplo 7.3:** Control digital de un circuito RC

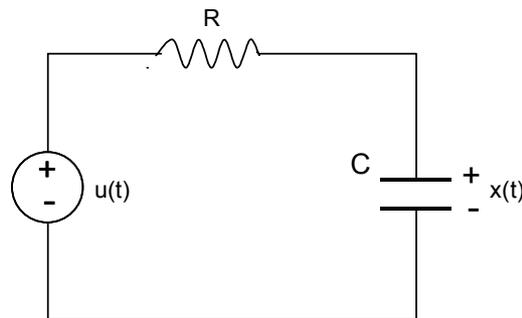


Figura 7.1: Circuito RC

El circuito RC de la Figura 7.1 tiene como ecuación de estado continua:

$$\dot{x} = \frac{-1}{\tau} \cdot x + \frac{1}{\tau} \cdot u$$

Con la constante de tiempo  $\tau = 5$ , de modo que se tiene

$$\dot{x} = -0.2 \cdot x + 0.2 \cdot u$$

Se desea controlar la tensión del condensador  $x(t)$  aplicando a la entrada  $u(t)$ , por un microprocesador, sólo en los instantes  $k \cdot T$ . El microprocesador también muestrea  $x(t)$  en cada

periodo de muestreo  $T$ . Se supone que  $T=0.5$  seg (para un buen control se debería seleccionar  $T < (\tau/10)$ ).

El sistema discreto tiene por ecuación:

$$x_{k+1} = f \cdot x_k + g \cdot u_k$$

Pasando de continuo a discreto se obtiene que

$$f = e^{-\frac{T}{\tau}} \quad g = \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)$$

En este caso  $f=0.9048$  y  $g=0.0952$ .

Supóngase que se desea que el control  $u_k$  y el estado  $x_k$  tomen un valor pequeño en un intervalo de 5 segundos, cualquiera que sea el valor inicial  $x_0$  de que se parta. En ese caso  $N=5/T=10$ . Para expresar estos objetivos matemáticamente, se selecciona la función de coste

$$J = \frac{1}{2} \cdot s \cdot x_N^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (q \cdot x_k^2 + r u_k^2)$$

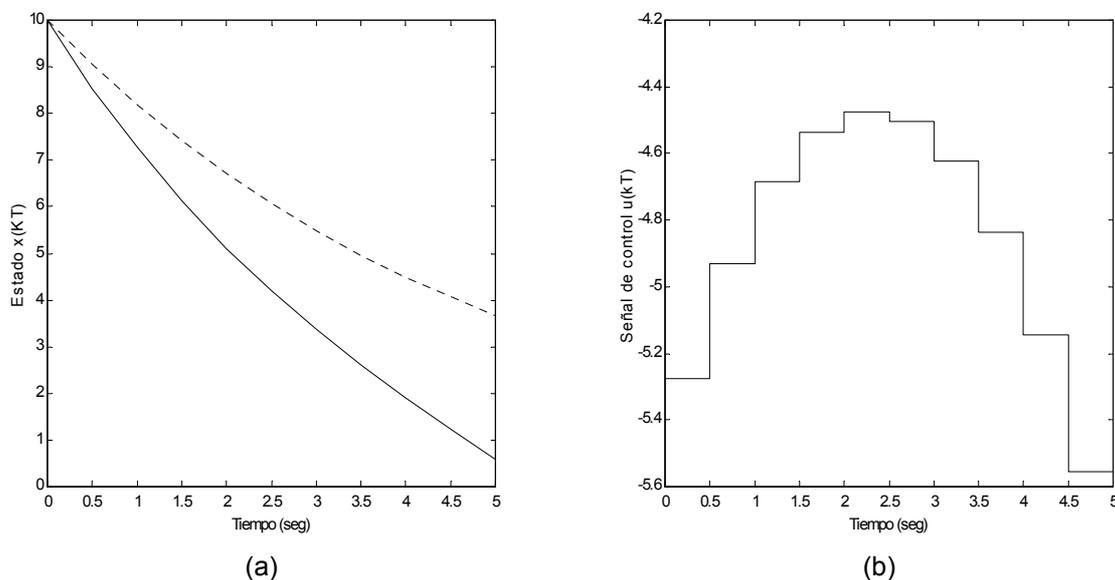


Figura 7.2: Simulación de la dinámica de la planta: (a) Estado  $x$  sin control (línea punteada) y con control óptimo con  $q=1$ ,  $r=1$ ,  $s_N=100$  y  $x_0=10$  (línea continua). (b) Señal de control  $u$ .

En este caso las ecuaciones (7.27) y (7.23) toman la forma:

$$K_k = \frac{f \cdot g \cdot s_{k+1}}{g^2 s_{k+1} + r}$$

$$s_k = \frac{f^2 \cdot r \cdot s_{k+1}}{g^2 \cdot s_{k+1} + r} + q$$

Haciendo  $s_N$  muy elevado se puede forzar a que el valor de  $x_N$  sea muy pequeño.

La Figura 7.2 muestra el valor del estado y del control cuando no existe ninguna acción de control, y cuando el control óptimo se determina con  $q=1$ ,  $r=1$ ,  $s_N=100$  y  $x_0=10$ .

♦

♦ **Ejemplo 7.4:** Control digital de un integrador doble

Muchos sistemas pueden describirse por la siguiente ecuación diferencial (por ejemplo la ley de Newton  $m \cdot a = F$ ).

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = u$$

Su función de transferencia es  $G(s)=1/s^2$ .

Si se introducen los estados  $x_1=y$ ,  $x_2=\dot{y}$ , se obtiene la representación de estados:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] x$$

Si se muestrea al sistema utilizando un retenedor de orden cero, con el periodo de muestreo  $T$ , se obtiene el siguiente modelo de estados discretos:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} T^2 / 2 \\ T \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = [1 \quad 0] x_k$$

Se supone un periodo de muestreo  $T=0.01$  seg. Las matrices de coste  $Q$  y  $S$  se eligen arbitrariamente como:

$$S = Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

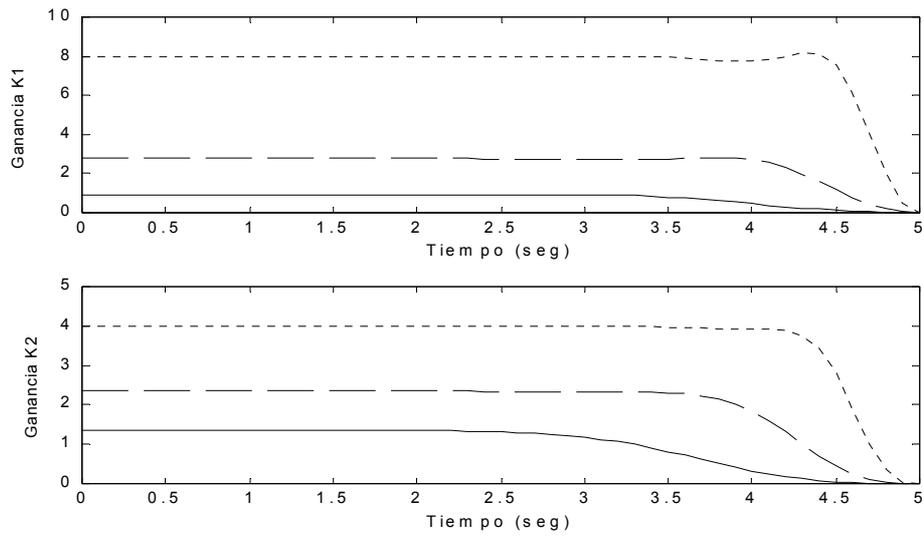


Figura 7.3: Ganancias  $k_1$  y  $k_2$  para  $r=1$  (línea sólida),  $r=0.1$  (línea discontinua) y  $r=0.01$  (línea punteada).

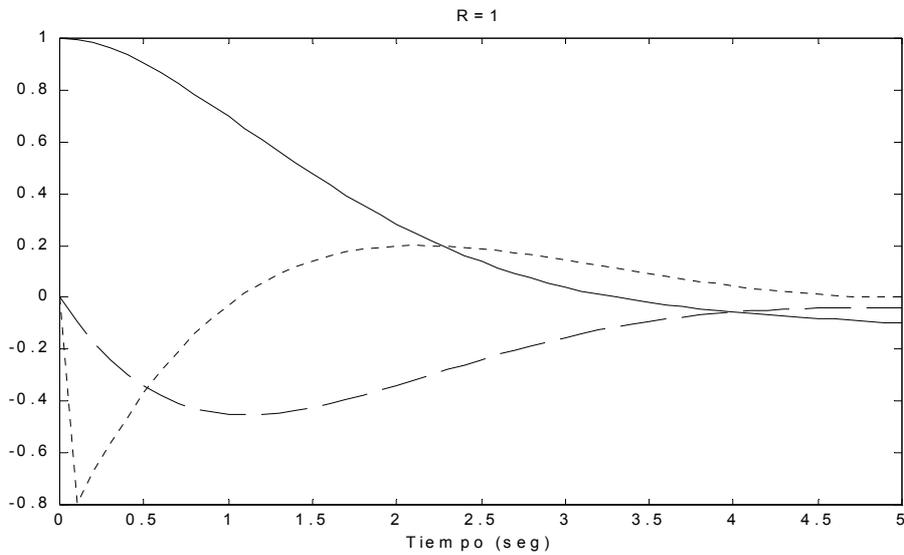


Figura 7.4: Representación de los estados  $x_1$  (línea sólida) y  $x_2$  (línea discontinua) y de la señal de control  $u$  (línea punteada) para  $r=1$ .

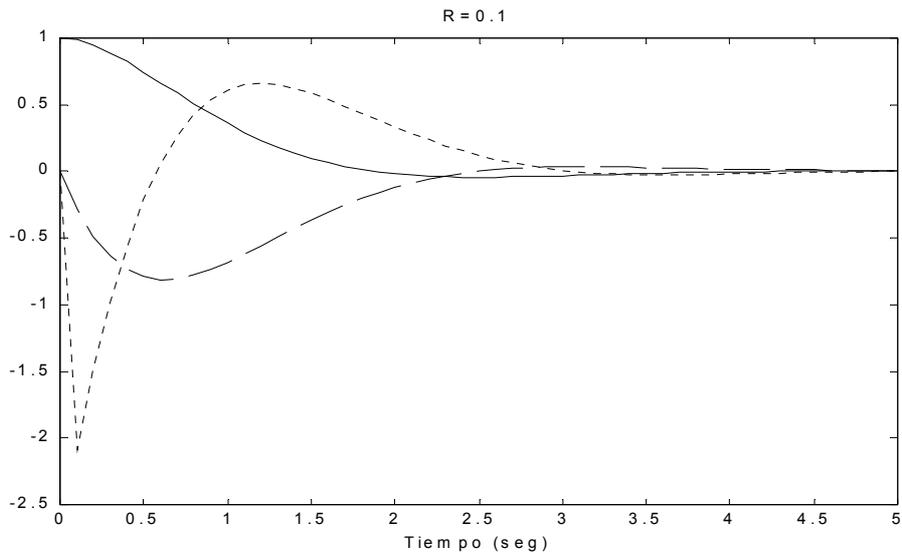


Figura 7.5: Representación de los estados  $x_1$  (línea sólida) y  $x_2$  (línea discontinua) y de la señal de control  $u$  (línea punteada) para  $r=0.1$ .

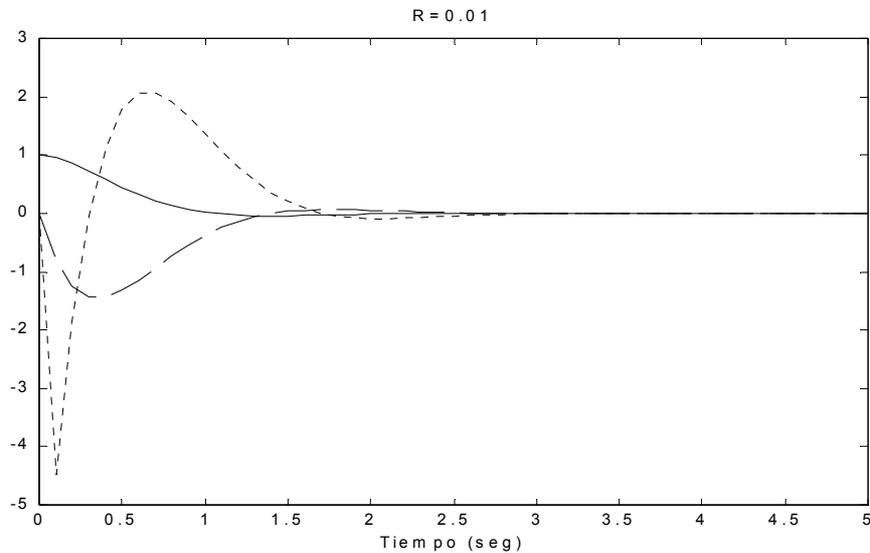


Figura 7.6: Representación de los estados  $x_1$  (línea sólida) y  $x_2$  (línea discontinua) y de la señal de control  $u$  (línea punteada) para  $r=0.01$ .

Estas matrices indican que se “pesa” el valor de la señal  $y$ , pero no el de la velocidad  $\dot{y}$ .

La matriz  $R$  es en este caso un escalar  $r$ , pues sólo hay una señal de control. Se puede investigar la influencia de este factor de peso, las Figuras 7.3 - 7.6 se muestran los valores de la ganancia  $K=[k_1, k_2]$ , de los estados  $x=[x_1, x_2]^T$  y del vector de control  $u$  para  $r = 1.0$ ,  $r = 0.1$  y  $r = 0.01$ . El número de

pasos considerado es de  $N=50$ , lo que para un periodo de muestreo de  $T=0.1$  seg, significa que el tiempo total es de  $t=5$  seg. Por otra parte, se considera como estado inicial  $x_1=1$  y  $x_2=0$ .

Como se puede observar, las ganancias permanecen constantes durante la mayor parte del intervalo de control, siempre que este sea grande comparado con el transitorio de las ganancias. Este importante aspecto será estudiado en la siguiente sección.

De las Figuras 7.4 - 7.6 se desprende que un aumento en el valor de  $r$  hace que disminuya la magnitud de la señal de control  $u$ .

♦

Incluso en los problemas más sencillos, como los presentados en los ejemplos anteriores, resulta muy laborioso realizar los cálculos de forma manual, por lo que estos se realizan con la ayuda de un computador.

El algoritmo indicado en el Cuadro 7.2 y la evolución del sistema (7.10), con el control (7.26) son muy fáciles de programar en un computador, lo que permite realizar el estudio con comodidad. En este sentido es muy recomendable resolver los ejemplos anteriores utilizando paquetes software tipo Matlab para el análisis y síntesis de controladores óptimos.

## 7.4 SOLUCION EN EL ESTADO ESTACIONARIO

### 7.4.1 Consideraciones generales

Como se ha visto, a pesar de considerar sistemas invariantes en el tiempo, la ganancia solución al problema de control óptimo  $K_k$  es variante en el tiempo. Supóngase que se desea encontrar en un intervalo de control infinito la ganancia de control  $K$  que minimiza la función de coste:

$$J_{\infty} = \frac{1}{2} x_{\infty}^T \cdot S \cdot x_{\infty} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T \cdot Q \cdot x_k + u_k^T \cdot R \cdot u_k) \quad (7.31)$$

En este caso el instante final es infinito  $N=\infty$ . La forma cuadrática en  $S$  se debe entender en el sentido que se impone un peso distinto al estado final que al resto de los estados. Como se verá más adelante, esto no plantea ninguna incongruencia en los casos que son de interés.

Supóngase que se parte de un estado inicial,  $S_{\infty}$ , para determinar la ley de control óptima según el algoritmo 2.1. Según se calcula  $S_k$  se pueden tener las siguientes formas de comportamiento de la secuencia:

- a) Converger a una matriz en el estado estacionario que puede ser cero, definida positiva o semidefinida positiva.
- b) No converger a ninguna matriz finita.

Si la secuencia converge, entonces para un número elevado de iteraciones se verifica que  $S \equiv S_k \equiv S_{k+1}$ . Por lo que en el límite la ecuación de Riccati toma la siguiente forma que no tiene ninguna dependencia temporal:

$$S = F^T \left[ S - S \cdot G (R + G^T \cdot S \cdot G)^{-1} \cdot G^T \cdot S \right] F + Q \quad (7.32)$$

A esta ecuación se le denomina *ecuación algebraica de Riccati* (EAR).

Al igual que la matriz  $S_N$ , la matriz  $S_\infty$  es simétrica y definida positiva. Sin embargo, la solución a la ecuación algebraica (7.32) puede tener soluciones no semidefinidas positivas, no simétricas e incluso complejas. Por lo que, para un  $S_\infty$  dado, no todas las soluciones a EAR son soluciones en el estado estacionario de la ecuación variante en el tiempo. Por supuesto si la solución límite o estacionaria a (7.23),  $\bar{S}$ , existe, es una solución de (7.32). En este caso la *ganancia de Kalman en estado estacionario* es:

$$\bar{K} = (R + G^T \cdot \bar{S} \cdot G)^{-1} \cdot G^T \cdot \bar{S} \cdot F \quad (7.33)$$

Se trata de una ganancia constante de realimentación. En algunos casos, en lugar del control óptimo (7.26) y (7.27) puede ser aceptable utilizar una ley de realimentación invariante en el tiempo

$$u_k = -\bar{K} \cdot x_k \quad (7.34)$$

El valor de la función de coste asociado a la estrategia de control estacionaria (7.34) se puede demostrar que está dada por:

$$J_\infty = \frac{1}{2} \cdot x_0^T \cdot \bar{S} \cdot x_0 \quad (7.35)$$

Otro resultado interesante en el estado estacionario es que si  $(F, G)$  es estabilizable y  $(F, C)$  observable entonces la ley de control constante  $u_k = -\bar{K} \cdot x_k$  es el control óptimo para un problema de control particular, aquel que minimiza la función de coste en un intervalo infinito de tiempo. Esto es, aquel que minimiza

$$J_{\infty} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T \cdot Q \cdot x_k + u_k^T \cdot R \cdot u_k) \quad (7.36)$$

◆ **Discusión adicional:**

Analizando los resultados obtenidos en esta sección pueden surgir las siguientes preguntas:

- 1) ¿Cuándo existe una solución estacionaria  $\bar{S}$  a la ecuación de Riccati para todas las elecciones de  $S_{\infty}$ ?
- 2) En general, la solución límite  $\bar{S}$  depende de la condición frontera  $S_{\infty}$ . ¿Cuándo es  $\bar{S}$  la misma para todas las elecciones de  $S_{\infty}$ ?
- 3) ¿Cuándo es el sistema en lazo cerrado estable?

Las respuestas a estas preguntas están ligadas a las propiedades dinámicas del sistema (7.11) con el índice de realización (7.12).

No se va a realizar un estudio detallado, sino que sólo se presentarán aquellos hechos que son importantes para la mayoría de los diseños. Estos hechos se resumen en los siguientes teoremas que además sirven para responder a las tres preguntas anteriormente formuladas.

- **Teorema 7.1:** Si el par  $(F, G)$  es estabilizable<sup>1</sup>, entonces para toda elección  $S_{\infty}$  existe una solución límite acotada  $\bar{S}$  a (7.23). Además,  $\bar{S}$  es una solución semidefinida positiva a la ecuación de Riccati (7.32).

Es importante hacer notar que ni la solución al problema de control óptimo del Cuadro 7.3, ni en los ejemplos posteriores se hizo ninguna referencia a la controlabilidad de la planta. Independientemente de las propiedades de controlabilidad de la planta, el control óptimo tratará de hacer lo mejor posible la minimización de la función de coste.

El teorema anterior muestra que si en realidad la planta es estabilizable, entonces existe una solución límite infinita,  $\bar{S}$ , a la ecuación de Riccati. Esto significa que cuando el intervalo de control  $[0, N]$  tiende a infinito, la función de coste óptimo  $J^*$  permanece acotada. Como  $R > 0$ , el hecho anterior garantiza que el control óptimo  $u_k^*$  tampoco tiende a infinito.

El Teorema 7.1 a veces se enuncia en términos de la condición más fuerte de alcanzabilidad (la cual implica la estabilizabilidad), y que puede comprobarse examinando el rango de la matriz de alcanzabilidad discreta (que es igual que la matriz de controlabilidad discreta).

<sup>1</sup> Un sistema se dice que es *estabilizable* si todos los modos inestables de su matriz  $F$  son alcanzables.

$$M_{cd} = [G, F \cdot G, \dots, F^{n-1} \cdot G]$$

Siendo  $n$  la dimensión del vector de estado.

El Teorema 7.2 que se enuncia a continuación sirve para responder a la segunda y tercera preguntas que se han formulado.

- **Teorema 7.2:** Sea  $C$  una raíz cuadrada de la matriz de peso  $Q$ , de modo que se verifica  $Q=C^T \cdot C \geq 0$ . Supóngase que  $R>0$  y que el par  $(F, C)$  es observable. Entonces el par  $(F, G)$  es estabilizable si y solo sí:

- Existe una única solución definida positiva a la solución límite  $\bar{S}$  de la ecuación de Riccati (7.23). Además,  $\bar{S}$  es la única solución definida positiva de la ecuación algebraica de Riccati (7.32).
- El sistema en lazo cerrado  $x_{k+1} = (F - G \cdot \bar{K})x_k$  es asintóticamente estable, donde  $\bar{K}$  está dada por (7.33)

Se va a proceder a discutir algunas implicaciones de este teorema y como es posible utilizarlo.

- La parte a) del Teorema 7.2 dice que si el intervalo  $[0, N]$  es suficientemente elevado, entonces la función de coste óptima del control es:

$$J_{\infty} = \frac{1}{2} \cdot x_0^T \cdot \bar{S} \cdot x_0$$

Es decir, que es finita e independiente del valor seleccionado para el peso del estado final  $S_{\infty}$ . Por lo que, tanto si se pesa mucho o poco el estado final de la función de coste, el valor óptimo de esta función o *coste óptimo*, es el mismo.

- Como  $R>0$ , la finitud de  $J$  significa que el control óptimo es también finito, todos los objetivos se pueden lograr con un control finito.
- El teorema también garantiza la existencia de una ganancia estacionaria  $\bar{K}$  que estabiliza la planta. Esto significa dos cosas:
  - Al comienzo de la acción de control, lejos del estado final, el sistema en lazo cerrado  $(F - G \cdot K_k)$  es prácticamente  $(F - G \cdot \bar{K})$ , por lo que en su arranque el sistema es estable.
  - Si se decide utilizar una ganancia constante igual a  $\bar{K}$ ,  $u_k = -\bar{K} \cdot x_k$  para todo  $k$ , se tiene garantizada la estabilidad en lazo cerrado.

Estas propiedades son muy convenientes, para garantizar que se cumplen sólo se necesita asegurar que la planta es estabilizable y elegir adecuadamente  $Q$ .

La selección de  $Q = C^T \cdot C$  se debe hacer para algún  $C$  que haga que  $(F, C)$  sea observable. Esto se verificará siempre si se elige una  $Q$  definida positiva, ya que  $(F, C)$  es observable para cualquier  $C$  de rango  $n$ .

Intuitivamente todo lo anterior significa lo siguiente:

- Si la planta es observable a través de la salida ficticia dada por  $y_k = C \cdot x_k$ , entonces los movimientos en cualquier dirección del espacio  $\mathfrak{R}^n$  tienen una influencia en la función de coste. Si alguna componente del vector de estados se incrementa también lo hace la función de coste. Por lo que si  $J$  es pequeño también lo es el estado. Cualquier control que hace pequeño a  $J$  hace que el estado se mantenga próximo al origen.
- Si  $(F, C)$  no es observable, entonces si el estado tiende a infinito en una dirección no observable de  $\mathfrak{R}^n$ , este movimiento no tendrá repercusión en  $J$ . En este caso el que la función de coste permanezca acotada no garantiza que también lo esté el estado.

La hipótesis del Teorema 2.2 es demasiado fuerte de forma innecesaria. Todo lo que se requiere para que se verifique el Teorema es la detectabilidad de  $(F, C)$ . Es decir, sólo se requiere que sean observables a través de la función de coste los modos inestables. Sin embargo, en este caso sólo se puede garantizar que la solución estacionaria  $\bar{S}$  sea semidefinida positiva.

Un resultado de los dos teoremas anteriores es que proporcionan una forma de estabilizar cualquier sistema con múltiples entradas-salidas. Si  $Q$  y  $R$  son cualesquiera matrices definidas positivas de un orden apropiado, entonces la ley de control  $u_k = -\bar{K} \cdot x_k$  obtenida en (7.32) y (7.33), da una función de transferencia en lazo cerrado estable. Dependiendo de las matrices  $Q$  y  $R$  se obtendrán distintos polos para  $(F - G \cdot \bar{K})$ , pero estos polos serán siempre estables. Más adelante se verá como se localizan estas raíces.

Es importante hacer notar que en el caso de que la salida real del sistema esté dada por  $y_k = C \cdot x_k$  entonces la elección de  $Q = C^T \cdot C$  sólo pesa las salidas del sistema.

◆

## 7.4.2 Resultados en el dominio de la frecuencia

Los sistemas invariantes en el tiempo tienen, en el estado estacionario, una ley de realimentación constante, por lo que es posible examinar la ecuación característica en lazo cerrado para examinar la situación de los polos del sistema, lo que permitirá seguir un diseño para los controladores óptimos muy similar al método del lugar de las raíces.

En todo lo que sigue se supone que se verifican las condiciones del Teorema 7.2, es decir  $(F, G)$  es estabilizable y  $(F, C)$  es observable.

La ecuación característica del sistema en lazo abierto es:

$$\Delta(z) = |z \cdot I - F| \quad (7.37)$$

Y la ecuación característica del sistema en lazo cerrado es:

$$\Delta^c(z) = |z \cdot I - (F - G \cdot \bar{K})| = |I + G \cdot \bar{K} \cdot (z \cdot I - F)^{-1}| \cdot |z \cdot I - F| = |I + \bar{K} \cdot (z \cdot I - F)^{-1} \cdot G| \cdot \Delta(z) \quad (7.38)$$

De acuerdo con la Figura 7.7, el término  $-\bar{K} \cdot (z \cdot I - F)^{-1} \cdot G$  puede interpretarse como una matriz de ganancia del lazo de control. De modo que  $I + \bar{K} \cdot (z \cdot I - F)^{-1} \cdot G$  es una matriz de diferencia de retorno del lazo de control.

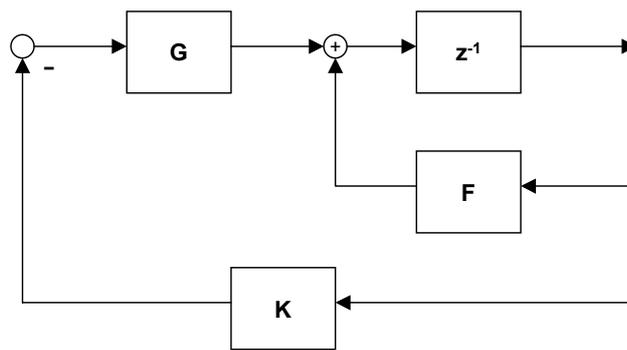


Figura 7.7: Control óptimo en lazo cerrado con el control óptimo representado como realimentación de estado.

Sea la salida real o ficticia del sistema la dada por la expresión:

$$y_k = C \cdot x_k \quad (7.39)$$

Se define la función de transferencia del sistema en lazo abierto, entre la entrada de control y la salida real o ficticia mediante la siguiente expresión:

$$H(z) = C \cdot (z \cdot I - F)^{-1} \cdot G \quad (7.40)$$

Usualmente se considera  $Q = C^T \cdot C$ , luego  $C = \sqrt{Q}$

Se verifica la siguiente relación entre los polos del sistema en lazo cerrado y los del sistema en lazo abierto

$$\Delta^c(z^{-1}) \cdot \Delta^c(z) = \left| H^T(z^{-1}) \cdot H(z) + R \right| \cdot \Delta(z^{-1}) \cdot \Delta(z) \cdot \left| G^T \cdot \bar{S} \cdot G + R \right|^{-1} \quad (7.41)$$

Esta relación se conoce como *ecuación de Chang-Letov* y proporciona un método de diseño, para el control óptimo en estado estacionario, muy similar al del lugar de las raíces. El término de la derecha se conoce perfectamente salvo una constante, ya que dado el sistema en lazo abierto y la función de coste, se tienen perfectamente determinados a  $H(z)$  (y por lo tanto a  $H(z^{-1})$ ) y a  $\Delta(z)$  (y por lo tanto a  $\Delta(z^{-1})$ ).

El término  $\left| G^T \cdot \bar{S} \cdot G + R \right|^{-1}$  depende del valor, todavía desconocido, de la solución de la ecuación algebraica de Riccati,  $\bar{S}$ , pero esto es irrelevante ya que el término representa sólo una constante de normalización.

Luego todo el término de la derecha de la ecuación de Chang-Letov es conocida salvo una constante multiplicativa.

El polinomio  $\Delta^c(z^{-1}) \cdot \Delta^c(z)$  de la izquierda tiene unas propiedades interesantes, sus raíces son las raíces  $z_i$  de  $\Delta^c(z)$  y sus recíprocas  $1/z_i$  (que son las raíces de  $\Delta^c(z^{-1})$ ).

La función de transferencia en lazo cerrado es estable, por lo que los polos en lazo cerrado óptimos se pueden determinar seleccionando las raíces estables del polinomio de la derecha de la ecuación de Chang-Letov.

La importancia de esta ecuación es evidente, ya que permite determinar directamente de  $F, G, Q$  y  $R$  que son conocidas, los polos en lazo cerrado óptimos.

Considérese el caso de tener una única entrada con  $Q=q \cdot I$ , entonces  $C = \sqrt{q} \cdot I$ . Luego:

$$H(z) = \sqrt{q} \cdot I \cdot (z \cdot I - F)^{-1} \cdot G = \sqrt{q} \cdot \frac{[adj(z \cdot I - F)] \cdot G}{\Delta(z)} = \sqrt{q} \cdot \frac{N(z)}{\Delta(z)} \quad (7.42)$$

donde  $N$  es un vector columna. Entonces, la ecuación de Chang-Letov es ahora:

$$\Delta^c(z^{-1}) \cdot \Delta^c(z) = \frac{(q/r) \cdot N^T(z^{-1}) \cdot N(z) + \Delta(z^{-1}) \cdot \Delta(z)}{1 + G^T \cdot S \cdot G / r} \quad (7.43)$$

En este caso al ser un escalar se ha representado a la matriz  $R$  por  $r$ . Las raíces de la parte derecha de la ecuación (7.44) son los ceros de:

$$1 + \frac{q}{r} \frac{N^T(z^{-1}) \cdot N(z)}{\Delta(z^{-1}) \cdot \Delta(z)} \quad (7.44)$$

La expresión (7.45) está en la forma exacta que se requiere para el análisis del lugar de las raíces. Por lo que toda la teoría sobre este método de diseño se puede aplicar. Evidentemente, cuando  $q/r$  varía de 0 (no se pesa el estado) a  $\infty$  (no se pesa el control), los polos del control óptimo se mueven de los polos estables de

$$G(z) = H^T(z^{-1}) \cdot H(z) \quad (7.45)$$

a sus ceros estables (se debe recordar que las raíces de  $G(z)$  son recíprocas, luego tiene igual número de raíces estables que inestables). Luego el peso  $r$  puede elegirse para obtener los polos en lazo cerrado deseados.

◆ **Ejemplo 7.5:** Control en estado estacionario de un sistema escalar

Sea la planta

$$x_{k+1} = f \cdot x_k + g \cdot u_k \quad (1)$$

con la función de coste

$$J_\infty = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (q \cdot x_k^T \cdot x_k + r \cdot u_k^T \cdot u_k) \quad (7)$$

El control óptimo que minimiza  $J_\infty$  es la realimentación constante

$$u_k = -k \cdot x_k \quad (3)$$

Donde la ganancia de Kalman es

$$k = \frac{f \cdot g \cdot s}{g^2 \cdot s + r} \quad (4)$$

Y  $s$  es la solución positiva a la ecuación algebraica de Riccati (7.32) que ahora es:

$$s = f^2 \cdot s - \frac{f^2 \cdot g^2 \cdot s^2}{g^2 \cdot s + r} + q \quad (5)$$

Con el control (3), el sistema en lazo cerrado es:

$$f^c = f - g \cdot k = \frac{f}{1 + \frac{g^2}{r} \cdot s} \quad (6)$$

La ecuación (5) se puede escribir en la forma:

$$g^2 \cdot s^2 + [(1 - f^2) \cdot r - g^2 \cdot q]s - q \cdot r = 0 \quad (7)$$

Si se define la variable auxiliar:

$$\Delta = \frac{g^2 \cdot q}{(1 - f^2) \cdot r} \quad (8)$$

se puede escribir (7) de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta}{q} \cdot s^2 + (1 - \Delta) \cdot s - \frac{\Delta r}{g^2} = 0 \quad (9)$$

Que tiene dos soluciones dadas por:

$$s = \frac{q}{2 \cdot \Delta} \cdot \left[ \pm \sqrt{(1 - \Delta)^2 + \frac{4 \cdot \Delta}{(1 - f^2)}} - (1 - \Delta) \right] \quad (10)$$

Se pueden considerar dos casos:

a) Sistema estable

Supóngase que  $|f| < 1$ , entonces  $(1 - f^2) > 0$  y  $\Delta > 0$ . En este caso la única solución no negativa de (7) es:

$$s = \frac{q}{2 \cdot \Delta} \cdot \left[ \sqrt{(1 - \Delta)^2 + \frac{4 \cdot \Delta}{(1 - f^2)}} - (1 - \Delta) \right] \quad (12)$$

y la ganancia en estado estacionario está dada por (4).

En el caso escalar, la observabilidad de  $(f, q^{1/2})$  es equivalente a  $q \neq 0$ , y la controlabilidad de la planta es equivalente a  $g \neq 0$ . Luego las condiciones de controlabilidad y observabilidad implican que  $\Delta > 0$  y por lo tanto  $s > 0$ . De estas condiciones se deduce de la ecuación (6) la relación

$$|f^c| < |f| \quad (11)$$

Luego el sistema en lazo cerrado es estable.

Como  $|f| < 1$ , si  $q=0$ , el sistema es detectable, es decir, el modo no observable es estable, y entonces  $\Delta=0$ , pero de acuerdo con la ecuación (6)  $f^c = f$ , y el sistema en lazo cerrado, aún así, es estable. En este caso  $s=0$  es semidefinida positiva.

b) Sistema inestable

Supóngase que  $|f| > 1$ , entonces  $(1-f^2) < 0$  y  $\Delta < 0$ . En este caso la única solución no negativa de (7) es:

$$s = -\frac{q}{2\Delta} \left[ \sqrt{(1-\Delta)^2 + \frac{4\Delta}{(1-f^2)}} - (1-\Delta) \right] \quad (13)$$

De nuevo, la observabilidad y controlabilidad implican que  $\Delta$  es estrictamente negativa, luego de acuerdo con (13)  $s > 0$ .

De acuerdo con (6), si  $\Delta < 0$ , todavía se verifica  $|f^c| < |f|$ , pero ahora no resulta fácil demostrar que  $|f^c| < 1$ . Sin embargo se tiene que

$$f^c = \frac{f}{1 - \frac{1-f^2}{2} \left[ \pm \sqrt{(1-\Delta)^2 + \frac{4\Delta}{(1-f^2)}} - (1-\Delta) \right]} \quad (14)$$

De modo que si  $|f| \gg 1$ , entonces  $\Delta \approx 0$  y

$$f^c \cong \frac{1}{f} \quad (15)$$

que ciertamente es estable.

Hay que hacer notar que  $f^c$  no depende de  $g$ ,  $q$  y  $r$  de forma individual, sino de la cantidad  $g^2 \cdot q/r$ . (Esto también es cierto si  $f$  es estable).

Si  $|f| > 1$ , entonces la observabilidad de  $(f, q^{1/2})$  es equivalente a  $q \neq 0$ , que es una condición necesaria para que (14) sea estable

♦

♦ **Ejemplo 7.6:** *Diseño de un regulador lineal cuadrático en el estado estacionario para un oscilador armónico.*

Se considera como sistema el oscilador armónico descrito por la siguiente ecuación:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\delta\omega \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \cdot u \quad (1)$$

con una frecuencia natural  $\omega = \sqrt{2}$  y un coeficiente de amortiguamiento  $\delta = -1/\sqrt{2}$ , de modo que:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \cdot u \quad (2)$$

La planta es inestable con polos en  $s=1 \pm j$ . Discretizando con  $T=25$  mseg se tiene

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.999 & 0.026 \\ -0.051 & 1.051 \end{bmatrix} \cdot x_k + \begin{bmatrix} 0.003 \\ 0.256 \end{bmatrix} \cdot u_k = F \cdot x_k + G \cdot u_k \quad (3)$$

Los polos en lazo abierto son:

$$z = 1.025 \pm 0.026 \quad (4)$$

Como función de coste se considera la siguiente función:

$$J_\infty = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (q \cdot x_k^T \cdot x_k + u_k^2) \quad (5)$$

Es decir  $Q=q \cdot I$ ,  $R=1$ , el intervalo de control infinito  $[0, \infty)$  significa que se está interesado en el control en el estado estacionario

La función de transferencia ficticia está dada por la ecuación (7.40), se considera  $C = \sqrt{Q} = \sqrt{q} \cdot I$ , luego

$$H(z) = q^{1/2} \cdot \frac{N(z)}{\Delta(z)} = q^{1/2} \cdot \frac{\begin{bmatrix} 0.003 \cdot z + 0.003 \\ 0.256 \cdot z - 0.256 \end{bmatrix}}{z^2 - 2.050 \cdot z + 1.051} \quad (6)$$

El diseño se basa en la función racional

$$G(z) = \frac{N^T(z^{-1}) \cdot N(z)}{\Delta(z^{-1}) \cdot \Delta(z)} \quad (7)$$

Como los ceros de

$$1 + \frac{q}{r} \cdot G(z) \quad (8)$$

son las raíces de  $\Delta^c(z^{-1}) \cdot \Delta^c(z)$ . Esta función es:

$$G = \frac{\begin{bmatrix} 0.003 \cdot z^{-1} + 0.003 \\ 0.256 \cdot z^{-1} - 0.256 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.003 \cdot z + 0.003 \\ 0.256 \cdot z - 0.256 \end{bmatrix}}{(z^{-2} - 2.050 \cdot z^{-1} + 1.051)(z^2 - 2.050 \cdot z + 1.051)} \quad (9)$$

$$G = \frac{-0.066z^3 + 0.131z^2 - 0.066z}{1.051z^4 - 4.025z^3 + 6.308z^2 - 4.205z + 1.051}$$

Conviene fijarse en la simetría de los coeficientes del numerador y del denominador, esto significa que si  $z$  es una raíz de uno de estos polinomios también lo es de  $z^{-1}$ .

La función  $G(z)$  puede factorizarse en la siguiente forma:

$$G(z) = \frac{-0.063 \cdot z \cdot (z - 0.975) \cdot (z - 1.025)}{[(z - 0.975)^2 + 0.024^2][(z - 1.025)^2 + 0.026^2]} \quad (10)$$

En la Figura 7.8 se representa el lugar de las raíces de (8) cuando  $q$  varía de 0 a  $\infty$ .

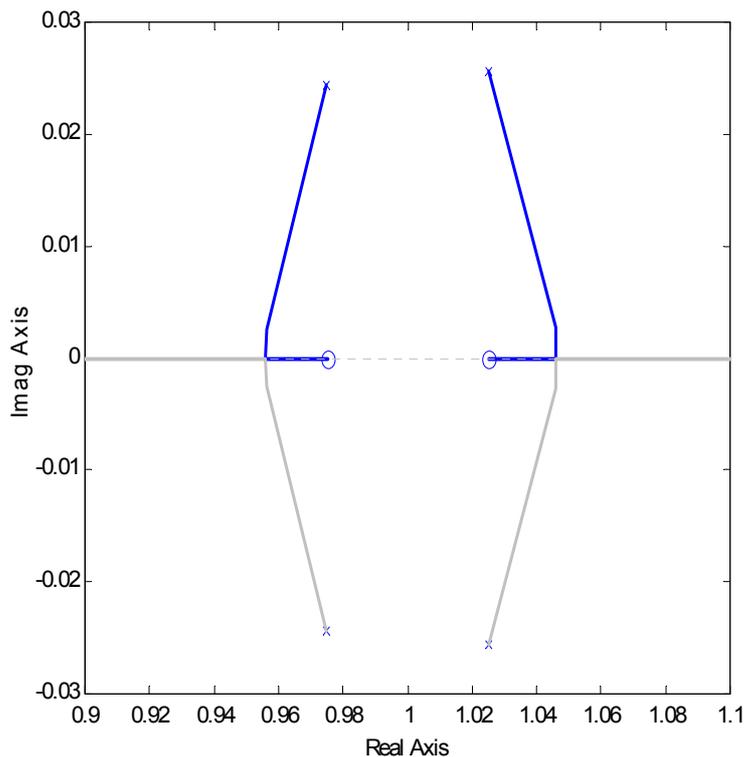


Figura 7.8: Lugar de las raíces de la ecuación (8) cuando  $q$  varía de 0 a  $\infty$

De acuerdo con la ecuación de Chang-Letov, los polos óptimos del sistema en lazo cerrado ( $F-G \cdot K$ ) con el regulador lineal cuadrático, son los ceros estables de (8) para cualquier valor de  $q$  y  $r$ . Cuando  $q=0$ , los polos en lazo cerrado son los polos de la planta reflejados dentro del círculo unidad (esto es,

los polos inestables  $z_i$  son sustituidos por  $z_i^{-1}$ , y cuando  $q \rightarrow \infty$ , son los ceros de  $H(z)$  reflejados dentro del círculo unidad.

Supóngase que se examina el lugar de las raíces y se decide que los polos en lazo cerrado correspondientes a  $q=0.07$  son satisfactorios para nuestros propósitos. Estos son 0.952 y 0.948. Luego el polinomio característico en lazo cerrado deseado es:

$$\Delta^c(z) = (z - 0.962) \cdot (z - 0.948) = z^2 - 1.910 \cdot z + 0.912 \quad (11)$$

La ganancia constante que sitúa los polos del sistema en lazo cerrado en las raíces de  $\Delta^c(z)$  se obtiene de la *fórmula de Ackerman*.

$$\bar{K} = [0 \quad 1] \cdot M_{cd}^{-1} \cdot \Delta^c(F) \quad (12)$$

Donde  $M_{cd}$  es la matriz de controlabilidad y  $\Delta^c(F)$  representa el polinomio matricial obtenido al sustituir la matriz  $F$  por la variable  $z$  en la ecuación característica

$$\Delta^c(F) = F^2 - 1.910 \cdot F + 0.912 \cdot I \quad (13)$$

$\Delta^c(F)$  que es una matriz real de dimensión  $2 \times 2$ . Por otra parte la matriz de controlabilidad es

$$M_{cd} = [G \quad FG] = \begin{bmatrix} 0.003 & 0.010 \\ 0.256 & 0.269 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Se obtiene así la ganancia

$$\bar{K} = [0.109 \quad 0.545] \quad (12)$$

♦

## 7.5 ESTIMACION OPTIMA EN EL ESTADO ESTACIONARIO

Para finalizar este tema y dado que ahora si se cuentan con las herramientas necesarias, se van a justificar las ecuaciones (4.19) y (4.20) que daban el comportamiento del filtro de Kalman (estudiado en el Tema 4) en el estado estacionario.

Las ecuaciones que se deben resolver para determinar la ganancia del estimador óptimo (ver sección 4.2) son:

$$P(k+1|k) = \Phi \cdot P(k|k) \cdot \Phi^T + R_1 \quad (7.46)$$

$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k) - P(k+1|k) \cdot C^T \cdot (R_2 + C \cdot P(k+1|k) \cdot C^T)^{-1} \cdot C \cdot P(k+1|k) \quad (7.47)$$

Si se compran estas ecuaciones con las relaciones de recursión (7.24) y (7.25) obtenidas para el problema de control óptimo discreto se observa que tienen la misma forma. Con la diferencia que la ecuación (7.47) se evalúa hacia adelante en lugar de hacia atrás como le ocurre a (7.24). Luego para determinar la solución en el estado estacionario se pueden intercambiar las variables y utilizar la solución al problema de control óptimo en estado estacionario como solución al problema de la estimación en el estado estacionario.

La Tabla 7.1 muestra la correspondencia que se obtiene de la comparación directa de los algoritmos de control y de estimación: (7.24) con (7.47) y (7.25) con (7.48).

Control óptimo	Estimación óptima
$F^T$	$\Phi$
$G$	$C^T$
$Q$	$R_1$
$R$	$R_2$
$S$	$P(k+1 k)$
$M$	$P(k k)$

Tabla 7.1: Dualidad entre control óptimo y estimación óptima

En el estado estacionario se cumple que

$$P(k+1|k) = P(k|k-1) = P$$

y resolviendo la ecuación algebraica de Riccati para el control óptimo discreto en el estado estacionario (7.32) con el cambio de variables indicado en la Tabla 7.1 se obtienen las ecuaciones (4.19) y (4.20), que se reproducen a continuación:

$$P = \Phi \cdot [P - P \cdot C^T \cdot (R_2 + C \cdot P \cdot C^T)^{-1} \cdot C \cdot P] \cdot \Phi^T + R_1$$

$$K^e = P \cdot C^T \cdot (R_2 + C \cdot P \cdot C^T)^{-1}$$

# TEMA 8

## CONTROL OPTIMO DE SISTEMAS CONTINUOS

### 8.1 INTRODUCCION

Existen varias diferencias entre los problemas de control óptimo para sistemas continuos y sistemas discretos, una de las cuales es la mayor simplicidad de las ecuaciones para el caso continuo.

Otra diferencia reside en los pasos iniciales que se deben seguir para la obtención de la ley de control. Para sistemas continuos es preciso distinguir *diferenciales* y *variaciones* de una cantidad, algo que no era necesario en el tema anterior. Esto implica que se va a utilizar el cálculo de variaciones, del que se hace un breve repaso en la siguiente sección.

Las deducciones en este tema son similares, en su mayoría, a la de los sistemas discretos, por lo que se intentará exponerlas sin duplicar en exceso lo dicho en el tema anterior.

### 8.2 EL CALCULO DE VARIACIONES

#### 8.2.1 Planteamiento del problema

Los cambios en  $J$  dependerán de los diferenciales del tiempo y del estado  $dt$  y  $dx$ , pero estas cantidades no son independientes. Lo que se pretende en esta sección es clarificar este aspecto y obtener relaciones útiles a posteriori.

Si  $x(t)$  es una función continua del tiempo  $t$ , entonces los diferenciales  $dx(t)$  y  $dt$  no son independientes. Sin embargo, se puede definir un pequeño cambio en  $x(t)$  que es independiente de  $dt$ .

**Definición:** Se define la variación en  $x(t)$ ,  $\delta x(t)$ , como el cambio incremental en  $x(t)$  cuando el tiempo  $t$  permanece fijo.

Para encontrar una relación entre  $dx$ ,  $\delta x$  y  $dt$  hay que fijarse en la Figura 8.1. En ella se muestra la función  $x(t)$ , y también una función muy próxima  $x(t)+dx(t)$ , en el intervalo  $[t_0, T]$ . Además del incremento  $dx(t)$  en cada instante de tiempo  $t$ , se ha incrementado también el tiempo final en  $dT$ . De la Figura 8.1, resulta claro que el incremento global de  $x$  en  $T$ ,  $dx(t)$ , depende de  $dT$ .

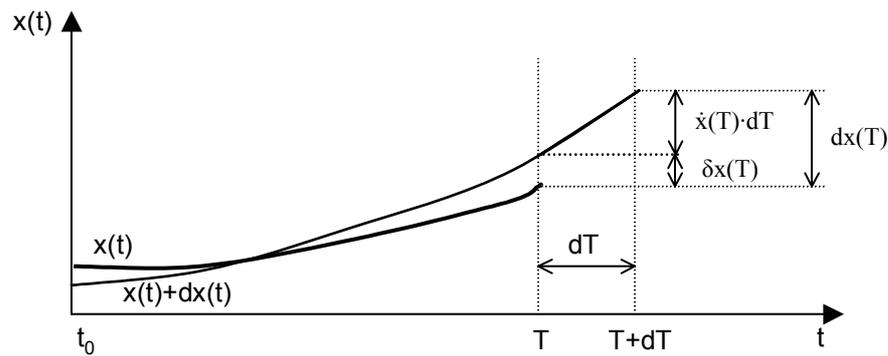


Figura 8.1: Relación entre la variación  $\delta x$  y el diferencial  $dx$ .

De acuerdo con su definición, la variación de  $\delta x(t)$ , como se muestra, tiene lugar en un valor fijo de  $t=T$  y es independiente de  $dT$ . Como  $x(t)$  y  $x(t)+dx(t)$  tienen aproximadamente la misma pendiente  $\dot{x}(T)$  en  $t=T$ , y como  $dt$  es pequeño, se tiene:

$$dx(T) = \delta x(t) + \dot{x}(T) \cdot dT \quad (8.1)$$

Otra relación útil es la *regla de Leibniz* para funcionales. Si  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  es una función de  $t$  y:

$$J(x) = \int_{t_0}^T h(x(t), t) dt \quad (8.2)$$

donde  $J(\cdot)$  y  $h(\cdot)$  son ambos funcionales escalares de tipo real (esto es, funciones de la función  $x(t)$ ), entonces:

$$dJ = h(x(T), T) \cdot dT - h(x(t_0), t_0) \cdot dt_0 + \int_{t_0}^T [h_x^T(x(t), t) \cdot \delta x] \cdot dt \quad (8.3)$$

Se ha utilizado la notación:  $h_x \equiv \frac{\partial h}{\partial x}$

Por comodidad, de ahora en adelante, se omitirá la dependencia de las variables con respecto al tiempo, cosa que siempre se debe suponer salvo que se señale lo contrario.

## 8.3 SOLUCION AL PROBLEMA GENERAL DE LA OPTIMIZACION CONTINUA

### 8.3.1 Formulación del problema

Supóngase que la planta está descrita por la siguiente ecuación dinámica, no lineal, variante en el tiempo:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (8.4)$$

Donde  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de estados y  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  es el vector de control. A este sistema se le va asociar la siguiente función de coste:

$$J(t_0) = \phi(x(T), T) \cdot dT + \int_{t_0}^T L(x(t), u(t), t) \cdot dt \quad (8.5)$$

Se considera que  $[t_0, T]$  es el intervalo de interés.

El problema de control óptimo consiste en determinar la entrada  $u^*(t)$  en el intervalo  $[t_0, T]$  que genera la trayectoria  $x^*(t)$  del sistema (8.4) de modo que se minimiza la función de coste (8.5), y tal que:

$$\Psi(x(T), T) = 0 \quad (8.6)$$

Siendo  $\Psi \in \mathfrak{R}^p$ .

La función  $\phi(x(T), T)$  es una función del estado final que se desea minimizar. Mientras que la función  $\Psi(x(T), T)$  es una función del estado final que se desea hacer exactamente cero. Ambas funciones no deben ser confundidas.

#### ◆ Ejemplo 8.1:

Considérese un satélite artificial con el estado  $x = [r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}]$  donde  $r$  y  $\theta$  son el radio y la posición angular respectivamente. Se puede elegir

$$\phi(x(T), T) = \frac{1}{2} \cdot x^T(T) \cdot S(T) \cdot x(T)$$

Siendo  $S(T)$  una función de peso. En este caso  $\phi$  es equivalente a la energía del sistema. Si se quiere situar el satélite en una órbita circular de radio  $R$ , se puede tomar como función del estado final que se debe anular a:

$$\Psi(x(T), T) = \begin{bmatrix} r(t) - R \\ \dot{r}(t) \\ \dot{\theta}(t) - \sqrt{\frac{\mu}{R^3}} \end{bmatrix}$$

Donde  $\mu = G \cdot M$ , siendo  $G$  la constante gravitacional de la masa  $M$ .

◆

### 8.3.2 Solución al problema

Para resolver el problema, se van a utilizar los multiplicadores de Lagrange para adjuntar las ligaduras (8.4) y (8.6) a la función de coste (8.5). Como la ecuación (8.4) se verifica para todo  $t \in [t_0, T]$  se necesita un multiplicador función del tiempo  $\lambda(t) \in \mathcal{R}$ . Además como (8.6) se verifica sólo en el instante  $T$ , se necesitará también un multiplicador constante  $v \in \mathcal{R}^p$  asociado a dicha ligadura. La función de coste aumentada es:

$$J' = \phi(x(T), T) + v^T \cdot \Psi(x(T), T) + \int_{t_0}^T [L(x, u, t) + \lambda^T(t) \cdot [f(x, u, t) - \dot{x}]] dt \quad (8.7)$$

Se define la *función Hamiltoniana* como:

$$H(x, u, t) = L(x, u, t) + \lambda^T \cdot f(x, u, t) \quad (8.8)$$

Introduciendo (8.8) dentro de la función de coste se obtiene:

$$J' = \phi(x(T), T) + v^T \cdot \Psi(x(T), T) + \int_{t_0}^T [H(x, u, t) - \lambda^T \cdot \dot{x}] dt \quad (8.9)$$

Utilizando la regla de Leibniz, el incremento en  $J'$  es función de los incrementos en  $x, \lambda, v, u$  y  $t$  es:

$$\begin{aligned} dJ' = & (\phi_x + \Psi_x^T v)^T \cdot dx|_T + (\phi_t + \Psi_t^T v)^T \cdot dt|_T + \Psi^T|_T \cdot dv + (H - \lambda^T \cdot \dot{x}) \cdot dt|_T - \\ & - (H - \lambda^T \cdot \dot{x}) \cdot dt|_{t_0} + \int_{t_0}^T [H_x^T \cdot \delta x + H_u^T \cdot \delta u - \lambda^T \cdot \delta \dot{x} + (H_\lambda - \dot{x})^T \cdot \delta \lambda] \cdot dt \end{aligned} \quad (8.10)$$

Para eliminar la variación en  $\dot{x}$ , hay que integrar por partes para ver que:

$$-\int_{t_0}^T \lambda^T \cdot \delta \dot{x} \cdot dt = -\lambda^T \cdot \delta x|_T + \lambda^T \cdot \delta x|_{t_0} + \int_{t_0}^T \dot{\lambda}^T \cdot \delta x \cdot dt \quad (8.11)$$

Si ahora se sustituye esta ecuación en (8.10), se obtienen términos en  $t=T$  que dependen de  $dx(t)$  y  $\delta x(T)$ . Se puede utilizar la ecuación (8.1) para expresar  $\delta x(T)$  en términos de  $dx(t)$  y  $dT$ . Realizando estas dos sustituciones, se obtiene:

$$\begin{aligned} dJ' = & (\phi_x + \Psi_x^T v - \lambda)^T \cdot dx|_T + (\phi_t + \Psi_t^T v + H - \lambda^T \cdot \dot{x} + \lambda^T \cdot \dot{x})^T \cdot dt|_T + \\ & + \Psi^T|_T \cdot dv - (H - \lambda^T \cdot \dot{x} + \lambda^T \cdot \dot{x}) \cdot dt|_{t_0} \\ & + \lambda^T \cdot dx|_{t_0} + \int_{t_0}^T [(H_\lambda + \dot{\lambda})^T \cdot \delta x + H_u^T \cdot \delta u + (H_\lambda - \dot{\lambda})^T \cdot \delta \lambda] dt \end{aligned} \quad (8.12)$$

Modelo del sistema:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \geq t_0 \quad t_0 \text{ fijado}$$

Función de coste:

$$J(t_0) = \phi(x(T), T) \cdot dT + \int_{t_0}^T L(x, u, t) \cdot dt$$

Ligadura en el estado final:

$$\Psi(x(T), T) = 0$$

### Controlador Óptimo

Hamiltoniano:

$$H(x, u, t) = L(x, u, t) + \lambda^T \cdot f(x, u, t)$$

Ecuación del estado:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f, \quad t \geq t_0$$

Ecuación del co-estado:

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f^T}{\partial x} \cdot \lambda + \frac{\partial L}{\partial x}, \quad t \leq T$$

Condición de estacionaridad:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial f^T}{\partial u} \cdot \lambda$$

Condición frontera:

$$x(t_0) \text{ dado}$$

$$(\phi_x + \Psi_x^T v - \lambda^T)|_T \cdot dx(T) + (\phi_t + \Psi_t^T v + H)|_T \cdot dt = 0 \quad (8.13)$$

Cuadro 8.1: Controlador continuo no lineal óptimo con una función del estado final fija.

De acuerdo con la teoría de Lagrange, el mínimo con ligaduras de  $J$  (8.5) se obtiene como el mínimo sin ligaduras de  $J'$  (8.7). Éste se obtiene cuando  $dJ=0$  para todos los incrementos independientes de sus argumentos. Por lo que igualando a cero los coeficientes de los incrementos independientes  $dv$ ,  $\delta x$ ,  $\delta u$  y  $\delta \lambda$  se obtienen las condiciones necesarias para obtener un mínimo (ver Cuadro 8.1). Para las aplicaciones en que estamos,  $t_0$  y  $x(t_0)$  se suponen conocidos y fijos, de modo que  $dt_0$  y  $dx(t_0)$  son ambos iguales a cero, luego los dos términos de (8.12) que se evalúan en  $t=t_0$  son iguales a cero.

La condición (8.13) del Cuadro 8.1 se debe a que  $dx(T)$  y  $dT$  no son independientes, como se puso de manifiesto en la sección 8.2. Por ello no se pueden poner de forma separada iguales a cero, sino que toda la expresión debe de anularse simultáneamente, en  $t=T$ . Esto se debe a que se ha permitido que el instante final pueda variar, hecho que se verifica en los problemas de tiempo mínimo.

Si el tiempo final es fijo, entonces  $dT=0$  y se tendría:

$$(\phi_x + \Psi_x^T v - \lambda^T) \Big|_T dx(T) = 0 \quad (8.13b)$$

Si el estado final se deja libre la condición frontera, puesto que  $dx(T) \neq 0$  y  $\Psi = 0$ , toma la forma:

$$\phi_x(T) = \lambda(T) \quad (8.13c)$$

En el Cuadro 8.1 muestra las condiciones de mínimo en términos de  $H$ ,  $L$  y  $f$ . Si se compara éste con el Cuadro 7.1, se puede observar que tanto en el caso discreto como en el continuo la ecuación del co-estado, también denominada *ecuación adjunta al estado*, se evalúa *hacia atrás* en el tiempo.

Como en el caso discreto, el control óptimo del Cuadro 8.1, depende de la solución a un problema de valores frontera en dos puntos, ya que  $x(t_0)$  se da y  $\lambda(T)$  se determina de (8.13). El valor de  $\lambda(t)$  no interesa, sin embargo se hace necesario su cálculo, como un paso intermedio para determinar el control óptimo  $u^*(t)$ , que depende de  $\lambda(T)$  mediante la condición de estacionaridad o *ecuación de control*.

◆ **Ejemplo 8.2:** *Principio de Hamilton en la Dinámica Clásica*

El principio de Hamilton para sistemas conservativos en física clásica afirma lo siguiente: “De todas las posibles trayectorias que puede seguir un sistema dinámico para ir de un punto a otro, dentro de

un intervalo de tiempo específico (consistente con las ligaduras), el sistema siempre sigue aquel que minimiza la integral temporal de la diferencia entre las energías cinética y potencial”.

a) Ecuaciones del movimiento de Lagrange

A partir de este principio se pueden obtener las ecuaciones de Lagrange del movimiento. Si se define:

$$\begin{aligned} q &\equiv \text{Vector de coordenadas generalizadas} \\ u = \dot{q} &\equiv \text{Vector de velocidad} \\ U(q) &\equiv \text{Energía potencial} \\ T(q, u) &\equiv \text{Energía cinética} \\ L(q, u) &\equiv \text{Lagrangiano del sistema} \end{aligned}$$

La “planta” está descrita ahora por:

$$\dot{q} = u = f(q, u) \quad (1)$$

Donde la función  $f$  se obtiene de la física del problema. Para encontrar la trayectoria, el principio de Hamilton dice que se debe minimizar la siguiente función de coste:

$$J(0) = \int_0^T L(q, u) \cdot dt \quad (2)$$

Luego el Hamiltoniano es:

$$H = L + \lambda^T u \quad (3)$$

Del Cuadro 8.1 se deduce que para un mínimo se necesita

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (4)$$

y

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + \lambda \quad (5)$$

Combinando estas ecuaciones se obtienen las *ecuaciones de Lagrange* del movimiento

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (6)$$

Luego se observa que en este contexto, la ecuación adjunta y la ecuación de control son equivalentes a la ecuación de Lagrange. En el contexto general de problemas variacionales, a la ecuación (6) se la conoce como *ecuación de Euler*.

**b) Ecuación del movimiento de Hamilton**

Si se define el *vector momento generalizado* de la siguiente forma:

$$\lambda = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (7)$$

Entonces, se pueden escribir las ecuaciones del movimiento en la siguiente forma:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (8)$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial q} \quad (9)$$

Las ecuaciones (8) y (9) son conocidas como las *ecuaciones de Hamilton* del movimiento. Así, el problema del control óptimo, la ecuación de estado y su ecuación adjunta son una formulación generalizada de las *ecuaciones del movimiento de Hamilton*.

♦

♦ **Ejemplo 8.3: Distancia mínima entre dos puntos**

La longitud de una curva  $x(t)$ , dependiente de un parámetro  $t$ , entre  $t=a$  y  $t=b$  está dada por:

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt \quad (1)$$

La curva debe unir los puntos del plano  $(a,A)$ ,  $(b,B)$ , luego se tienen las condiciones frontera:

$$x(a) = A \quad (2)$$

$$x(b) = B \quad (3)$$

Se desea encontrar la curva  $x(t)$  que une  $(a,A)$ ,  $(b,B)$  y que minimiza (1). Este problema se puede resolver expresándolo en la forma de un problema de control óptimo, para lo cual definimos la "entrada" (ver ejemplo anterior), en la forma:

$$\dot{x} = u \quad (4)$$

Esta es la ecuación de la "planta". Ahora (1) toma la forma:

$$J = \int_a^b \sqrt{1+u^2} dt \quad (5)$$

El Hamiltoniano es:

$$H = \sqrt{1+u^2} + \lambda u \quad (6)$$

Del Cuadro 8.1 se deducen las condiciones:

$$\dot{x} = H_\lambda = u \quad (7)$$

$$-\dot{\lambda} = H_x = 0 \quad (8)$$

$$0 = H_u = \lambda + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \quad (9)$$

De (9) se obtiene:

$$u = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad (10)$$

Pero de acuerdo a (8),  $\lambda$  es constante. Por lo tanto:

$$u = \text{const} \quad (11)$$

La ecuación (11) es el control óptimo (la pendiente de la curva es constante). De la ecuación (7) se obtiene, pues:

$$x(t) = c_1 t + c_2 \quad (12)$$

Para determinar  $c_1$  y  $c_2$ , se utilizan las condiciones frontera (2) y (3), con lo que se obtiene:

$$x(t) = \frac{(A-B)t + (aB - bA)}{a-b} \quad (12)$$

Luego la trayectoria óptima entre dos puntos del plano es una línea recta.

◆

◆ **Ejemplo 8.4:** *Control de temperatura*

Se desea calentar una habitación utilizando la mínima energía posible. Si  $\theta(t)$  es la temperatura en la habitación,  $\theta_a(t)$  es la temperatura ambiente fuera de la habitación, que se supone constante  $\theta_a(t) = \theta_a$ , y  $u(t)$  es el calor suministrado a la habitación, la ecuación dinámica del sistema es:

$$\dot{\theta} = -a \cdot (\theta - \theta_a) + b \cdot u \quad (1)$$

Donde  $a$  y  $b$  son unas ciertas constantes que dependen del aislamiento de la habitación y de otros factores. Se define el estado del sistema como:

$$x(t) = \theta(t) - \theta_a \quad (2)$$

La ecuación anterior permite escribir la siguiente ecuación de estado

$$\dot{x} = -a \cdot x + b \cdot u \quad (3)$$

Para controlar la temperatura en un intervalo fijo de tiempo  $[0, T]$  con la menor cantidad posible de suministro de energía se toma como función de coste:

$$J(0) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt \quad (4)$$

El Hamiltoniano es:

$$H = \frac{u^2}{2} + \lambda(-a \cdot x + b \cdot u) \quad (5)$$

De acuerdo con el Cuadro 8.1, el control óptimo se determina resolviendo las ecuaciones:

$$\dot{x} = H_{\lambda} = -a \cdot x + b \cdot u \quad (6)$$

$$\dot{\lambda} = -H_x = a \lambda \quad (7)$$

$$0 = H_u = u + b \cdot \lambda \quad (8)$$

La condición de estacionaridad indica que el control óptimo está dado por:

$$u(t) = -b \cdot \lambda(t) \quad (9)$$

Luego para determinar  $u^*(t)$  se debe determinar  $\lambda^*(t)$ . Si se sustituye (9) en (6), se obtienen las ecuaciones de estado y adjunta:

$$\dot{x} = -a \cdot x - b^2 \cdot \lambda \quad (10a)$$

$$\dot{\lambda} = a \cdot \lambda \quad (10b)$$

La solución de (10a) y (10b) dará los valores óptimos  $\lambda^*(t)$  y  $x^*(t)$ .

Todavía no se ha fijado  $\lambda(T)$ , pero supóngase que es conocido. La solución a (10b) es:

$$\lambda(t) = e^{-a(T-t)} \cdot \lambda(T) \quad (11)$$

Usando este valor en (10a) se obtiene:

$$\dot{x}(t) = -a \cdot x - b^2 \cdot \lambda(T) \cdot e^{-a(T-t)} \quad (12)$$

Utilizando la transformada de Laplace, se obtiene:

$$X(s) = \frac{x(0)}{s+a} - \frac{b^2 \cdot \lambda(T) \cdot e^{-aT}}{(s+a)(s-a)} = \frac{x(0)}{s+a} - \frac{b^2}{a} \cdot \lambda(T) \cdot e^{-aT} \left( \frac{-1/2}{(s+a)} + \frac{1/2}{(s-a)} \right) \quad (13)$$

Luego:

$$x(t) = x(0) \cdot e^{-at} - \frac{b^2}{a} \lambda(T) \cdot e^{-aT} \cdot \sinh(at) \quad (14)$$

Donde *senh* es el seno hiperbólico.

Las ecuaciones (11) y (14) dan los valores óptimos de  $\lambda$  y de la trayectoria  $x^*(t)$  en función del valor, todavía no especificado  $\lambda(T)$ . El valor inicial  $x(0)$  se considera conocido.

Considérese ahora dos objetivos de control distintos, que darán dos formas de determinar  $\lambda(T)$ :

a) Estado final fijo:

Supóngase que la temperatura inicial de la habitación es  $\theta_a=60^\circ$ . Entonces:

$$x(0) = 0^\circ \quad (15)$$

Considérese como objetivo de control llevar la temperatura exactamente a  $70^\circ$  en el intervalo fijo de  $T$  segundos. En este caso se pide que el estado final tenga un valor fijo de:

$$x(T) = 10^\circ \quad (16)$$

Obsérvese en que como el instante final  $T$  y el estado final  $x(T)$  se han fijado,  $dT$  y  $dx(T)$  son nulos, de modo que se verifica la ecuación (8.13). De (15) y (16) se debe determinar  $\lambda(T)$ ; después, se puede hallar  $\lambda(t)$  utilizando (11) y la ley de control óptima utilizando (9). Para encontrar  $\lambda(T)$ , se usa (14):

$$x(T) = x(0) \cdot e^{-a \cdot T} - \frac{b^2}{2a} \lambda(T) \cdot (1 - e^{-2aT}) \quad (17)$$

Que con los valores de  $x(T)$  y  $x(0)$  dados en (15) y (16) da:

$$\lambda(T) = -\frac{20a}{b^2(1 - e^{-2aT})} \quad (18)$$

Por lo que la trayectoria óptima es:

$$\lambda^*(t) = -\frac{10 \cdot a \cdot e^{a \cdot t}}{b^2 \cdot \sinh(a \cdot T)} \quad (19)$$

Finalmente, la ley de control óptima está dada por (9):

$$u^*(t) = \frac{10 \cdot a \cdot e^{at}}{b \cdot \sinh(a \cdot T)} \quad 0 \leq t \leq T \quad (20)$$

Si se sustituye (20) en (3) y resolviendo el sistema se haya que efectivamente:

$$x^*(t) = 10 \frac{\sinh(a \cdot t)}{\sinh(a \cdot T)} \quad (21)$$

Por lo tanto,  $x^*(T) = 10$  como se deseaba.

#### b) Estado final libre:

Supóngase que el objetivo de control no es llevar el estado final exactamente a  $10^\circ$ , sino que se desea que el control minimice:

$$J(0) = \frac{1}{2} s \cdot (x(T) - 10)^2 + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt \quad (22)$$

El valor de  $s$  será seleccionado a posteriori. Si  $s$  es elevado, la solución óptima hará que  $x(T)$  esté próximo a  $10^\circ$ , ya que sólo de esta manera se logrará que el primer término de (22), tenga una pequeña contribución en el coste.

De acuerdo con el Cuadro 8.1 la ecuación de estado y su ecuación adjunta son todavía válidas, así como la condición de estacionaridad, luego (10) y (9) se mantienen; (11) y (14) siguen siendo válidas.

La condición inicial es todavía (15), pero la condición final debe ser determinada usando (8.13). El tiempo final  $T$  está fijado, así que  $dT=0$  y el segundo término de (8.13) es automáticamente igual a 0. Puesto que  $x(T)$  no está fijado,  $dx(T)$  es distinto de cero. Por lo tanto se requiere que:

$$\lambda(T) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_T = s \cdot (x(T) - 10) \quad (23)$$

(Obsérvese que no existe ninguna función  $\Psi$  en este problema). Ésta es la nueva condición terminal y de (15) y de (23) se debe determinar  $\lambda(T)$ . Para hacer este cálculo hay que darse cuenta de que:

$$x(T) = \frac{\lambda(T)}{s} + 10 \quad (24)$$

Y usarlo en (15) y (17). Se obtiene que el co-estado final es:

$$\lambda(T) = \frac{-20 \cdot a \cdot s}{2 \cdot a + b^2 \cdot s \cdot (1 - e^{-2aT})} \quad (25)$$

Usando (11) se obtiene la trayectoria del co-estado óptimo:

$$\lambda^*(t) = \frac{-10 \cdot a \cdot s \cdot e^{at}}{a \cdot e^{aT} + s \cdot b^2 \cdot \sinh(aT)} \quad (26)$$

Finalmente de (9) se obtiene el control óptimo:

$$u^*(t) = \frac{10 \cdot a \cdot b \cdot s \cdot e^{at}}{a \cdot e^{aT} + s \cdot b^2 \cdot \sinh(aT)} \quad (27)$$

Para comprobar el resultado, se simula el control utilizando  $u^*(t)$  en la planta (3). Resolviendo para la trayectoria del estado óptimo se obtiene:

$$x^*(t) = \frac{10 \cdot s \cdot b^2 \cdot \sinh(at)}{a \cdot e^{aT} + s \cdot b^2 \cdot \sinh(aT)} \quad (28)$$

En el instante final:

$$x^*(T) = \frac{10 \cdot s \cdot b^2 \cdot \sinh(aT)}{a \cdot e^{aT} + s \cdot b^2 \cdot \sinh(aT)} \quad (29)$$

c) Discusión:

El valor final  $x^*(T)$  en (29) es diferente al valor deseado de  $10^\circ$ . Éste es función del peso del estado final  $s$  en la función de coste. Cuando  $s$  aumenta, se le está dando más importancia relativa a que  $x(T)$  sea igual a  $10^\circ$  que a que  $u^2(t)$  sea pequeño en  $[0, T]$ . De hecho, en el límite  $s \rightarrow \infty$ , el co-estado (26), el control (27) y la trayectoria del estado (28) tienden a la expresión encontrada en el apartado a). En este límite, el estado final  $x^*(T)$  en (29) no llega a ser, de hecho, exactamente  $10^\circ$ .

Examinado (29), se puede determinar  $x^*(T)$  para varios valores de  $s$  y seleccionar un valor que proporcione un buen compromiso entre llevar a  $x(t)$  al valor final deseado y conservar la energía del control. Usando este valor de  $s$  en (27) se obtiene el control óptimo que se aplicaría para calentar la habitación.

♦

## 8.4 CONTROL OPTIMO PARA SISTEMAS LINEALES CONTINUOS

Considérese un sistema lineal, continuo e invariante en el tiempo:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (8.14)$$

Donde  $x(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$ . Considérese que la función de coste es de tipo cuadrático y está dada por:

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \cdot x^T(T) \cdot S(T) \cdot x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x^T \cdot Q \cdot x + u^T \cdot R \cdot u) dt \quad (8.15)$$

El intervalo de tiempo en el cual se está interesado para el control de la planta es  $[t_0, T]$ . Se desea determinar el control óptimo  $u^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$  que minimiza  $J$ .

Se supone que el tiempo final  $T$  es fijo y conocido, y que no se especifica ninguna función  $\Psi$  del estado final. Además, se supone que el estado inicial del sistema  $x_0(t)$  es conocido. Las matrices  $S(T)$  y  $Q$  se consideran simétricas y semidefinidas positivas.  $R$  se considera simétrica y definida positiva. El Cuadro 8.1 permite escribir la solución a este problema.

El Hamiltoniano es:

$$H(t) = \frac{1}{2} (x^T \cdot Q \cdot x + u^T \cdot R \cdot u) + \lambda^T \cdot (A \cdot x + B \cdot u) \quad (8.16)$$

Donde  $\lambda(t)^T \in \mathfrak{R}^n$  es un multiplicador indeterminado. Las ecuaciones de estado y su adjunta son:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = A \cdot x + B \cdot u \quad (8.17)$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = Q \cdot x + A^T \cdot \lambda \quad (8.18)$$

La condición de estacionaridad es:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = R \cdot u + B^T \cdot \lambda \quad (8.19)$$

Esta condición proporciona el controlador óptimo en función del co-estado  $\lambda$ :

$$u(t) = -R^{-1} \cdot B^T \cdot \lambda(t) \quad (8.20)$$

La sustitución de este valor de  $u$  en (8.17) da:

$$\dot{x} = A \cdot x - B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot \lambda \quad (8.21)$$

Como el estado final es libre  $dx(T) \neq 0$ , y como se supone que el tiempo final es fijo  $dT=0$ , entonces la condición frontera (8.13) toma la forma:

$$\lambda(T) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_T = S(T) \cdot x(T) \quad (8.22)$$

El problema radica en resolver las ecuaciones (8.21) y (8.18) con las condiciones frontera  $x(t_0)$  y  $\lambda(T)$ , dado por (8.22).

Para determinar la solución se supone que  $x(t)$  y  $\lambda(t)$  satisfacen una ecuación como la (8.22) para  $t \in [t_0, T]$ , con una matriz  $S(t)$  todavía desconocida:

$$\lambda(t) = S(t) \cdot x(t) \quad (8.23)$$

Si se puede encontrar dicha matriz  $S$ , entonces la suposición será válida. Para determinar  $S(t)$  se deriva en (8.23) y se sustituye (8.21).

$$\dot{\lambda} = \dot{S} \cdot x + S \cdot \dot{x} = \dot{S} \cdot x + S(A \cdot x - B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S) \cdot x \quad (8.24)$$

Teniéndose en cuenta la ecuación del co-estado (8.18) y la relación (8.23), se obtiene para todo  $t$ :

$$-S \cdot \dot{x} = (A^T \cdot S + S \cdot A - S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S + Q) \cdot x \quad (8.25)$$

Como la ecuación anterior se debe de verificar para todas las trayectorias del vector de estado cualquiera que sea el  $x(t_0)$ , es necesario que se verifique:

$$-\dot{S} = A^T \cdot S + S \cdot A - S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S + Q, \quad t \leq T \quad (8.26)$$

Ésta es la ecuación de Riccati para sistemas continuos, y si  $S(t)$  es su solución con la condición final  $S(T)$ , entonces (8.23) se verifica para todo  $t \leq T$ , y la hipótesis es válida. En términos de la solución a la ecuación de Riccati, el control óptimo está dado por (8.20) y (8.23), como:

$$u(t) = -R^{-1} \cdot B^T \cdot S \cdot x(t) \quad (8.27)$$

Definiendo la ganancia de Kalman como:

$$K(t) = R^{-1} \cdot B^T \cdot S(t) \quad (8.28)$$

Se tiene

$$u(t) = -K(t) \cdot x(t) \quad (8.29)$$

El control óptimo se determina resolviendo la ecuación de Riccati (8.26), hacia atrás en el tiempo para  $S(t)$ . Esto se puede realizar de forma "off-line" antes de aplicar el control, ya que no se requiere conocer  $x(t)$ . Después se calcula  $K(t)$  y se almacena. Por último, durante la aplicación del control, se calcula  $u^*(t)$  por la ecuación (8.29) y se aplica a la planta.

El Cuadro 8.2 resume el controlador lineal cuadrático óptimo para sistemas continuos. En términos de la ganancia de Kalman, la ecuación de Riccati puede expresarse de la siguiente forma:

$$-\dot{S} = A^T \cdot S + S \cdot A - K^T \cdot R \cdot K + Q, \quad t \leq T \quad (8.30)$$

El control (8.29) es una ley de realimentación variable en el tiempo, a pesar de que  $A$ ,  $B$ ,  $Q$  y  $R$  son invariantes en el tiempo, ya que  $K(t)$  varía con el tiempo. La planta en lazo cerrado es:

$$\dot{x} = (A - B \cdot K) \cdot x \quad (8.31)$$

Esta ecuación permite determinar la trayectoria óptima del vector de estado  $x^*(t)$  a partir del estado inicial  $x(t_0)$ .

Modelo del sistema:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u, \quad t \geq t_0$$

Función de coste:

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \cdot x^T(T) \cdot S(T) \cdot x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x^T \cdot Q \cdot x + u^T \cdot R \cdot u) dt$$

Suposiciones:

$$S(t) \geq 0, \quad Q \geq 0, \quad R > 0, \quad \text{simétricas}$$

Control de realimentación óptimo:

$$-\dot{S} = A^T \cdot S + S \cdot A - S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S + Q, \quad t \leq T, \quad S(T) \text{ dado}$$

$$K = R^{-1} \cdot B^T \cdot S$$

$$u = -K \cdot x$$

$$J^*(t_0) = \frac{1}{2} \cdot x^T(t_0) \cdot S(t_0) \cdot x(t_0)$$

Cuadro 8.2: Controlador continuo lineal cuadrático (controlador continuo LQ).

Se puede demostrar que con el control óptimo (8.29) el valor de la función de coste en el intervalo  $[t, T]$  es:

$$J(t) = \frac{1}{2} \cdot x^T(t) \cdot S(t) \cdot x(t) \quad (8.32)$$

Este resultado es importante ya que, si se conoce el estado actual  $x(t)$  se puede, resolviendo la ecuación de Riccati, conocer el coste del control en el intervalo  $[t, T]$  antes de que se aplique el control o de que lo calculemos. Si el coste es muy alto, se puede cambiar las matrices  $S(T)$ ,  $Q$  y  $R$ , y encontrar una nueva ganancia  $K(t)$ , o se puede utilizar otro esquema de control. Se puede ver que:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial u^2} = R \quad (8.33)$$

Puesto que  $R > 0$ , el control óptimo efectivamente minimiza a  $J(t_0)$ . Seleccionando  $S(T)$  muy elevado, se puede garantizar que el control óptimo conducirá a  $x(T)$  muy próximo a cero para mantener a  $J(t_0)$  pequeño.

◆ **Ejemplo 8.5:** Control óptimo de un sistema escalar

Sea el sistema:

$$\dot{x}(t) = a \cdot x + b \cdot u \quad (1)$$

Con la función de coste:

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \cdot s(T) \cdot x^2(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (q \cdot x^2 + r \cdot u^2) dt \quad (2)$$

La ecuación de Riccati es:

$$-\dot{s} = 2 \cdot a \cdot s + q - \frac{b^2 s^2}{r} \quad t \leq T \quad (3)$$

Separando variables se obtiene:

$$\int_{s(t)}^{s(T)} \frac{ds}{\left(\frac{b^2}{r}\right) \cdot s^2 - 2 \cdot a \cdot s - q} = \int_t^T dt$$

Si se integra se obtiene:

$$s(t) = s_2 + \frac{s_1 + s_2}{\left[ \frac{s(T) + s_1}{s(T) - s_2} \right] \cdot e^{2\beta(T-t)} - 1} \quad (4)$$

Donde:

$$\beta = \sqrt{a^2 + \frac{b^2 \cdot q}{r}} \quad (5)$$

$$s_1 = \frac{r}{b^2} \cdot (\beta - a), \quad s_2 = \frac{r}{b^2} \cdot (\beta + a) \quad (6)$$

En el estado estacionario ( $T-t \rightarrow \infty$ ),  $s(t)$  está dado por  $s_2$  o, si  $a > 0$ :

$$s_{\infty} = \frac{q}{\gamma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma}{a}} \right) \quad (7)$$

Donde:

$$\gamma = \frac{b^2 q}{a \cdot r} \quad (8)$$

Si  $a < 0$ , se obtiene una relación similar.

La ganancia es:

$$K(t) = \frac{b}{r} s(t) \quad (9)$$

Y en el estado estacionario:

$$K_{\infty} = \frac{b}{r} s_{\infty} \quad (10)$$

Considérese el caso especial, muy interesante, en que  $q=0$ . Ahora  $\beta=|a|$  y

$$s(t) = \frac{s(T)}{\frac{b^2 s(T)}{2 \cdot a \cdot r} + \left( 1 - \frac{b^2 s(T)}{2 \cdot a \cdot r} \right) e^{-2a(T-t)}} \quad (11)$$

Si se desea asegurar que el control óptimo lleva a  $x(T)$  exactamente a cero, se puede hacer  $S(T) \rightarrow \infty$  para conseguir que  $x(T) \rightarrow 0$  en  $J(t_0)$ . Con este límite se tiene:

$$s(t) = \frac{\frac{2 \cdot a \cdot r}{b^2}}{1 - e^{-2a(T-t)}} \quad (12)$$

Luego el control óptimo es:

$$u(t) = -K(t) \cdot x(t) = \frac{\frac{2 \cdot a}{b^2}}{1 - e^{-2a(T-t)}} \cdot x(t) \quad (13)$$

O de forma equivalente:

$$u(t) = -\frac{a}{b} \frac{e^{a(T-t)}}{\sinh(a(T-t))} \cdot x(t) \quad (14)$$

Si el sistema es estable ( $a < 0$ ), entonces en el estado estacionario ( $T-t \rightarrow \infty$ ), se tiene  $S_\infty = 0$ , y el sistema en lazo cerrado es estable:

$$\dot{x}(t) = (a - b \cdot K_\infty) \cdot x = a \cdot x \quad (15)$$

Si  $a > 0$ , entonces:

$$s_\infty = \frac{2 \cdot a \cdot r}{b^2} \quad (16)$$

Y el sistema en lazo cerrado:

$$\dot{x}(t) = \left( a - \frac{b^2}{r} \cdot s_\infty \right) \cdot x = -a \cdot x \quad (17)$$

También es estable.

♦

## 8.5 SOLUCION EN EL ESTADO ESTACIONARIO

Cuando  $T$  tiende a infinito, la solución a la ecuación de Riccati puede exhibir distintos tipos de comportamiento:

- 1) Puede no estar acotada.
- 2) Puede tender a un valor límite o estacionario  $S_\infty$ , que puede ser cero, definida positiva o semidefinida positiva.

Si  $S(t)$  converge, entonces para  $t \ll T$ ,  $\dot{S} = 0$ , lo que lleva, en el límite, a la ecuación algebraica de Riccati (EAR):

$$0 = A^T \cdot S + S \cdot A - S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S + Q \quad (8.34)$$

La EAR puede tener varias soluciones, y éstas pueden ser reales o complejas, definida positivas o definida negativas, etc. Si  $S(T)$  se elige como simétrica, entonces la solución a la ecuación de Riccati  $S(t)$ , es simétrica y al menos semidefinida positiva para todo  $t \leq T$ .

$S(\infty)$  es siempre una solución a la EAR, pero no todas las soluciones a la EAR son una solución límite de Riccati para algún  $S(T)$  inicial. Si  $S(\infty)$  existe, entonces la ganancia en el estado estacionario es:

$$K(\infty) = R^{-1} \cdot B^T \cdot S(\infty) \quad (8.35)$$

En algunas circunstancias puede resultar aceptable utilizar, en lugar de la ley de control óptimo variante en el tiempo (8.29), la ley de realimentación constante:

$$u(t) = -K(\infty) \cdot x(t) \quad (8.36)$$

El primer aspecto que se debe intentar conocer es cuando existe una solución límite  $S_\infty$  a la ecuación de Riccati. El Teorema 8.1 da la respuesta.

**Teorema 8.1:** Supóngase que el par  $(A,B)$  es estabilizable. Entonces, para todo  $S(T)$  existe una solución límite  $S(\infty)$  a la ecuación de Riccati. Además,  $S(\infty)$  es una solución semidefinida positiva de la EAR.

Hasta ahora no se ha realizado ninguna suposición sobre la controlabilidad de la planta. Sin embargo, se verá que dicha propiedad proporciona propiedades muy deseables para el sistema en lazo cerrado, cuando el intervalo de control  $[t, T]$  crece.

Si se intenta utilizar una ley de control subóptima con una ganancia de realimentación constante  $K(\infty)$ , se debería asegurar que el sistema en lazo cerrado es estable. El Teorema 8.2 dice cuando se tiene dicha propiedad.

**Teorema 8.2:** Sea  $C$  una matriz que verifica  $Q=C^T \cdot C$ , supóngase que  $(A,C)$  es observable. Entonces  $(A,B)$  es estabilizable si y solo si:

- a) Existe una única solución límite definida positiva,  $S(\infty)$ , a la ecuación de Riccati. Además,  $S(\infty)$ , es la única solución definida positiva a la EAR (8.34).
- b) El sistema en lazo cerrado  $\dot{x} = (A - B \cdot K(\infty)) \cdot x$  es asintóticamente estable, donde  $K=K(\infty)$  está dada por (8.35).

Los comentarios al Teorema 8.2 se pueden repetir aquí. La observabilidad del par  $(A,C)$  no es necesaria, basta con que sea detectable, pero en este caso sólo se garantiza que  $S_\infty$  sea semidefinida positiva.

Lo que los Teoremas 8.1 y 8.2 dicen es que si la planta es estabilizable y seleccionamos  $Q$  de modo que  $(A,C)$  es observable (con  $Q=C^T \cdot C$ ), entonces la ganancia de realimentación constante  $K(\infty)$  da un sistema en lazo cerrado estable.

Hay que hacer notar que (8.35) es la ley de control óptima para la función de coste con un horizonte de control infinito.

$$J_{\infty} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T \cdot Q \cdot x + u^T \cdot R \cdot u) dt \quad (8.37)$$

Por lo que, cuando el intervalo de control  $[t_0, T]$  crece, tiene más sentido utilizar una ganancia de realimentación constante con  $K(\infty)$ .

Un aspecto importante de estos teoremas es que proporcionan un método para establecer un sistema estable. Sean  $Q$  y  $R$  cualesquiera matrices definidas positivas con las dimensiones apropiadas. Entonces  $u = -K_{\infty} \cdot x$ , donde  $K_{\infty} = R^{-1} \cdot B^T \cdot S$ , con  $S$  la solución definida positiva de (8.34), genera un sistema en lazo cerrado estable. Diferentes valores de  $Q$  y  $R$  darán lugar a diferentes polos de  $(A - B \cdot K(\infty))$  pero estos polos siempre serán estables.

El siguiente ejemplo demuestra que el controlador lineal cuadrático (LQ) en estado estacionario es a menudo fácil de encontrar.

♦ **Ejemplo 8.6:** *Control en el estado estacionario de un sistema escalar.*

La planta

$$\dot{x} = a \cdot x + b \cdot u \quad (1)$$

tiene la función de coste con horizonte infinito

$$J(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (q \cdot x^2 + r \cdot u^2) dt \quad (2)$$

El control óptimo es

$$u = -K(\infty) \cdot x \quad (3)$$

donde

$$K(\infty) = \frac{b}{r} \cdot s(\infty) \quad (4)$$

y  $s(\infty)$  es la solución definida positiva de la EAR

$$0 = 2 \cdot a \cdot s - \frac{b^2}{r} \cdot s^2 + q \quad (5)$$

Obsérvese que la planta es controlable ( $b \neq 0$ ) y observable ( $q \neq 0$ ). Resolviendo (5) se obtiene:

$$s(\infty) = \frac{r}{b^2} \left( a + \sqrt{a^2 + \frac{b^2 \cdot q}{r}} \right) \quad (6)$$

Luego

$$K(\infty) = \frac{1}{b} \left( a + \sqrt{a^2 + \frac{b^2 \cdot q}{r}} \right) \quad (7)$$

y el sistema en lazo cerrado es:

$$a^{cl} = a - b \cdot K(\infty) = -\sqrt{a^2 + \frac{b^2 \cdot q}{r}} \quad (8)$$

que es siempre estable

◆

◆ **Ejemplo 8.7:** Control en estado estacionario de un sistema integrador de segundo orden.

Considérese la planta

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \quad (1)$$

que corresponde a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = u(t)$$

que se puede asociar, por ejemplo a la ley de Newton.

$$m \frac{d^2 e}{dt^2} = F \Rightarrow \frac{d^2 e(t)}{dt^2} = \frac{F}{m}$$

Luego  $u=F/m$  es la fuerza aplicada por unidad de masa,  $x_1=e$  es el espacio recorrido y  $x_2=\dot{e}$  es la velocidad del cuerpo.

Como función de coste se tiene

$$J(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( x^T \begin{bmatrix} q_e & 0 \\ 0 & q_v \end{bmatrix} x + r \cdot u^2 \right) dt \quad (2)$$

Utilizando  $A$ ,  $B$ ,  $Q$  y  $r$  en la EAR se obtienen las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$0 = -\frac{s_2^2}{r} + q_e \quad (3)$$

$$0 = s_1 - \frac{s_2 \cdot s_3}{r} \quad (4)$$

$$0 = 2 \cdot s_2 - \frac{s_3^2}{r} + q_v \quad (5)$$

donde

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

ya que es simétrica.

La solución a las ecuaciones algebraicas es:

$$s_2 = \sqrt{q_e \cdot r} \quad (7)$$

$$s_3 = \sqrt{q_v \cdot r + 2 \cdot r \sqrt{q_e \cdot r}} \quad (8)$$

$$s_1 = \sqrt{q_e \cdot q_v + 2 \cdot q_e \sqrt{r}} \quad (9)$$

donde se ha escogido la solución definida positiva de  $S$ .

La ganancia óptima es:

$$K(\infty) = R^{-1} \cdot B^T \cdot S(\infty) = \left[ \sqrt{\frac{q_e}{r}}, \sqrt{\frac{q_v}{r} + 2\sqrt{\frac{q_e}{r}}} \right] \quad (10)$$

Puesto que depende de las razones  $q_e/r$  y  $q_v/r$ , se supone que  $r=1$ . La planta en lazo cerrado es:

$$A^c = (A - B \cdot K(\infty)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{q_e} & -\sqrt{q_v + 2\sqrt{q_e}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

La ecuación característica  $|sI - A^c|$  es

$$s^2 + \left( \sqrt{q_v + 2\sqrt{q_e}} \right) \cdot s + \sqrt{q_e} = 0 \quad (12)$$

Comparando esta ecuación con  $s^2 + 2\delta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2$ , se concluye que los polos del sistema en lazo cerrado son complejos conjugados con una frecuencia natural  $\omega_n$  y un coeficiente de amortiguamiento  $\delta$  de

$$\omega_n = q_e^{1/4} \quad (13)$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{q_v}{2\sqrt{q_e}}} \quad (14)$$

En el caso en que no se use ningún peso sobre la velocidad ( $q_v=0$ ), el coeficiente de amortiguamiento toma el valor  $1/\sqrt{2}$ . La frecuencia natural  $\omega_n$  depende sólo del peso sobre el espacio  $q_e$ , y el rozamiento depende sólo de la relación  $q_v/2\sqrt{q_e}$ .

A partir de las relaciones (13) y (14) se puede elegir  $q_e$  y  $q_v$  de modo que se obtenga un comportamiento deseado en lazo cerrado.

En el caso  $q_e=0$  de modo que  $(A,C) = (A, \sqrt{Q})$  no es detectable, uno de los polos en lazo cerrado se sitúa en  $s=0$  y el sistema deja de ser estable.

◆

#### ◆ Ejemplo 8.8: Péndulo invertido.

Las ecuaciones del movimiento de un péndulo invertido montado sobre un vehículo son:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Omega^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \quad (1)$$

donde  $x_1 = \theta$  es la posición angular,  $x_2 = \dot{\theta}$  es la velocidad angular,  $u$  es la fuerza externa aplicada al vehículo y  $\Omega^2$  es una constante que depende de las masas del péndulo, del vehículo y también de la longitud del péndulo.

Se desea encontrar una ley de control que minimice la función de coste:

$$J(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \theta^2 + \frac{u^2}{c^2} \right) dt \quad (2)$$

donde  $c$  es una constante. De esta función se deduce la siguiente relación para las matrices de peso:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \frac{1}{c^2} \quad (3)$$

Si se toma

$$S(\infty) = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix}$$

la ecuación algebraica de Riccati es en este caso:

$$0 = 2 \cdot s_2 \cdot \Omega^2 - c^2 \cdot s_2^2 + 1 \quad (4)$$

$$0 = s_1 + s_2 \cdot \Omega^2 - c^2 \cdot s_2 \cdot s_3 + 1 \quad (5)$$

$$0 = 2 \cdot s_2 - c^2 \cdot s_3^2 \quad (6)$$

La ganancia en estado estacionario es:

$$K(\infty) = R^{-1} \cdot B^T \cdot S = c^2 \cdot [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} = [c^2 \cdot s_2 \quad c^2 \cdot s_3] \quad (7)$$

La solución a las ecuaciones (4), (5) y (6) es sencilla. La ecuación (4) tiene como solución

$$s_2 = \frac{\Omega^2 \pm \sqrt{\Omega^4 + c^2}}{c^2}$$

Todavía se desconoce que signo es el correcto, se elegirá aquél que de como solución una matriz definida positiva. De la ecuación (6) se deduce

$$s_3 = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{2} \cdot s_2$$

Si en  $s_2$  se toma como solución el signo -,  $s_2$  será negativa y  $s_3$  será imaginaria, en conclusión se debe de usar el signo +. Luego

$$s_2 = \frac{\Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 + c^2}}{c^2} \Rightarrow s_3 = \frac{\sqrt{2}}{c^2} \cdot \left[ \Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 + c^2} \right]^{1/2}$$

Y la ganancia es:

$$K(\infty) = \begin{bmatrix} \Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 + c^2} & \sqrt{2} \cdot \left[ \Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 + c^2} \right]^{1/2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

El término  $s_1$  se obtiene de la ecuación (5), pero no se necesita en el control.

La matriz del sistema en lazo cerrado es:

$$A^c = A - B \cdot K(\infty) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Omega^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [K_1 \quad K_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{\Omega^4 + c^2} & -\sqrt{2} \cdot \left[ \Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 + c^2} \right]^{1/2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

y su ecuación característica es:

$$s^2 + \sqrt{2} \cdot \left[ \Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 + c^2} \right]^{1/2} \cdot s + \sqrt{\Omega^4 + c^2} = 0 \quad (10)$$

Las raíces de (10) son:

$$s = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[ \left[ \sqrt{\Omega^4 + c^2} + \Omega^2 \right]^{1/2} \pm j \cdot \left[ \sqrt{\Omega^4 + c^2} - \Omega^2 \right]^{1/2} \right] \quad (10)$$

La Figura 8.2 muestra el lugar de las raíces cuando el factor de peso  $c$  varía de  $\infty$  a 0. Cuando  $c$  aumenta, las raíces en lazo cerrado tienden a las asíntotas que forman  $45^\circ$  con el eje real, y se mueven hacia infinito siguiendo a estas asíntotas. Esto implica que el tiempo de respuesta tiende a cero y que el factor de amortiguamiento tiende a  $\delta = \sqrt{2}/2 = 0.707$ . Que el tiempo de respuesta tienda a cero no debe extrañar, ya que incrementando  $c$  decrece el coste del control ( $r$  disminuye) y esto hace posible obtener una respuesta rápida. El que se obtenga un coeficiente de amortiguamiento  $\delta = 0.707$  es razonable, ya que permite una buena respuesta sin apenas sobreelongación. Pero el porqué

precisamente  $\sqrt{2}/2$  y no otro valor se debe a que los sistemas de segundo orden en condiciones muy generales tienden a tener un factor de amortiguamiento de  $\sqrt{2}/2$ .

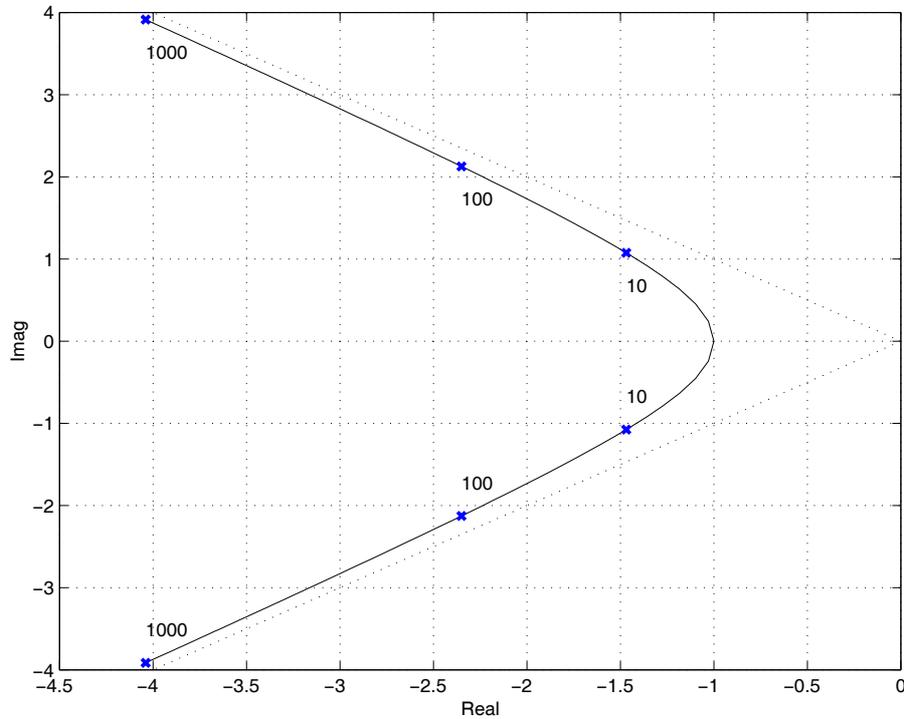


Figura 8.2: Lugar de las raíces del sistema en lazo cerrado cuando se varía el factor de peso  $c^2$ .

◆

## 8.6 RESULTADOS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Supóngase que  $(A,B)$  es controlable y que  $(A,C)$  es observable, con  $Q=C^T \cdot C$ .

Como se ha visto, el regulador óptimo en el estado estacionario está dado por una realimentación constante con  $K=R^{-1} \cdot B^T \cdot S$ , siendo  $S$  la única solución definida positiva de la ecuación de Riccati (8.34).

Se puede demostrar que los polos del sistema en lazo cerrado (Ver Figura 8.3) están dados, en este caso por:

$$\Delta^c(s) = \left| I + K \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \right| \cdot \Delta(s) \quad (8.38)$$

donde  $\Delta(s)$  son los polos del sistema en lazo abierto.

$$\Delta(s) = |s \cdot I - A| \quad (8.39)$$

De acuerdo con la Figura 8.3,  $I + K \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B$  puede interpretarse como una matriz de diferencia de retorno del lazo de control.

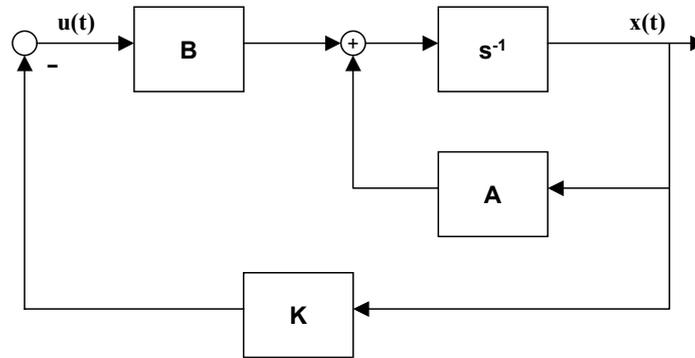


Figura 8.3: Lazo cerrado óptimo

Defínase

$$H(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \quad (8.40)$$

como la función de transferencia del sistema en lazo abierto entre la entrada de control  $u(t)$  y la salida real o ficticia  $y(t) = C \cdot x(t)$ , donde  $Q = C^T \cdot C$ .

Se verifica la siguiente relación entre los polos del sistema en lazo cerrado y los polos del sistema en lazo abierto:

$$\Delta^c(-s) \cdot \Delta^c(s) = |H^T(-s) \cdot H(s) + R| \cdot \Delta(-s) \cdot \Delta(s) \cdot |R|^{-1} \quad (8.41)$$

Esta relación, se conoce como *ecuación de Chang-Letov* para sistemas continuos. Se puede utilizar para diseñar reguladores lineales cuadráticos óptimos en el estado estacionario.

La parte derecha de (8.42) resulta conocida si se dan la planta y las matrices de peso, así es posible utilizar la ecuación de Chang-Letov para determinar los polos en lazo cerrado óptimos; como por el Teorema 8.4 ( $A - B \cdot K$ ) es estable, las raíces del sistema en lazo cerrado corresponden a las raíces estables de la parte derecha de la ecuación (8.42), Las raíces de  $\Delta^c(-s) \cdot \Delta^c(s)$  son siempre simétricas con respecto al eje imaginario, al igual que las raíces de  $\Delta(-s) \cdot \Delta(s)$ ; esto es, si  $s_1$  es una raíz, también lo es  $-s_1$ .

En el caso de los sistemas SISO (una sola entrada - una sola salida) con  $Q=q \cdot I$ , como  $Q=C^T \cdot C$  entonces  $C=q^{1/2}$ , se tiene:

$$H(s) = \sqrt{q} \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B = \frac{\sqrt{q} \cdot [\text{adj}(s \cdot I - A)] \cdot B}{\Delta(s)} = \sqrt{q} \cdot \frac{N(s)}{\Delta(s)} \quad (8.42)$$

$N(s)$  es un vector columna. La ecuación (8.42) toma la forma

$$\Delta^c(-s) \cdot \Delta^c(s) = \frac{q}{r} \cdot N^T(-s) \cdot N(s) + \Delta(-s) \cdot \Delta(s) \quad (8.43)$$

Las raíces de la parte derecha de la ecuación anterior son los ceros de

$$1 + \frac{q}{r} \cdot \frac{N^T(-s) \cdot N(s)}{\Delta(-s) \cdot \Delta(s)} = 1 + \frac{q}{r} \cdot H^T(-s) \cdot H(s) \quad (8.44)$$

La ecuación (8.45) que tiene la forma requerida para un análisis del lugar de las raíces en función del parámetro  $q/r$ . Éste muestra que cuando  $q/r$  varía desde cero (no se realiza peso sobre el estado,  $q=0$ ) a  $\infty$  (no se realiza peso en el control,  $r=0$ ), los polos óptimos en lazo cerrado se desplazan desde los polos estables de

$$G(s) = H^T(-s) \cdot H(s) \quad (8.45)$$

a sus ceros estables. Así pues, se puede seleccionar la relación  $q/r$  para tener los polos en lazo cerrado que se desean.

Hay que recordar que los polos estables de  $H^T(-s) \cdot H(s)$  son los polos de  $H(s)$  con sus polos inestables reflejados en el semiplano izquierdo, es decir  $\bar{s}_1 = -s_1$ . Por otro lado los ceros estables de  $H^T(-s) \cdot H(s)$  son los ceros de  $H(s)$  con sus ceros inestables reflejados en el semiplano izquierdo, es decir  $\bar{s}_1 = s_1$ .

#### ◆ Ejemplo 8.9:

Considérese el sistema descrito por la ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.417 & 1.0 \\ 2.860 & -1.183 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3.157 \end{bmatrix} \cdot u \quad (1)$$

El polinomio característico del sistema en lazo abierto es:

$$\Delta(s) = |s \cdot I - A| = s^2 + 2.6 \cdot s - 1.183 \quad (2)$$

Luego los polos en lazo abierto son:

$$s = -2.995, \quad s = 0.395 \quad (3)$$

Es decir, posee un polo estable y otro inestable.

Para estabilizar la planta y mantener la variable de estado  $x_2$  pequeña, se considera la siguiente función de coste:

$$J(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (q \cdot x_2^2 + r \cdot u) dt \quad (4)$$

De tal forma que:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \quad (5)$$

Una raíz de Q es:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{q} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Como  $(A,B)$  es controlable y  $(A,C)$  es observable si  $(q \neq 0)$ , entonces por los Teoremas 8.1 y 8.2 el sistema con el regulador lineal cuadrático estacionario es estable en lazo cerrado.

La función de transferencia (8.43) es:

$$H(s) = \frac{-\sqrt{q} \cdot (3.157 \cdot s + 4.473)}{s^2 + 2.6 \cdot s - 1.183} \quad (7)$$

El procedimiento de diseño de Chang-Letov se basa en la función racional

$$G(s) = H(-s) \cdot H(s) \quad (8)$$

Como el polinomio característico del sistema en lazo cerrado  $\Delta^c(s)$  es estable, sus raíces son los ceros estables de

$$1 + \frac{q}{r} \cdot G(s) \quad (9)$$

En este caso

$$G(s) = \frac{(3.157 \cdot s - 4.473)}{(s^2 - 2.6 \cdot s - 1.183)} \cdot \frac{(-3.157 \cdot s - 4.473)}{(s^2 + 2.6 \cdot s - 1.183)} = \frac{-9.97 \cdot (s - 1.417) \cdot (s + 1.417)}{(s + 0.395) \cdot (s - 0.2995) \cdot (s - 0.395) \cdot (s + 2.995)} \quad (10)$$

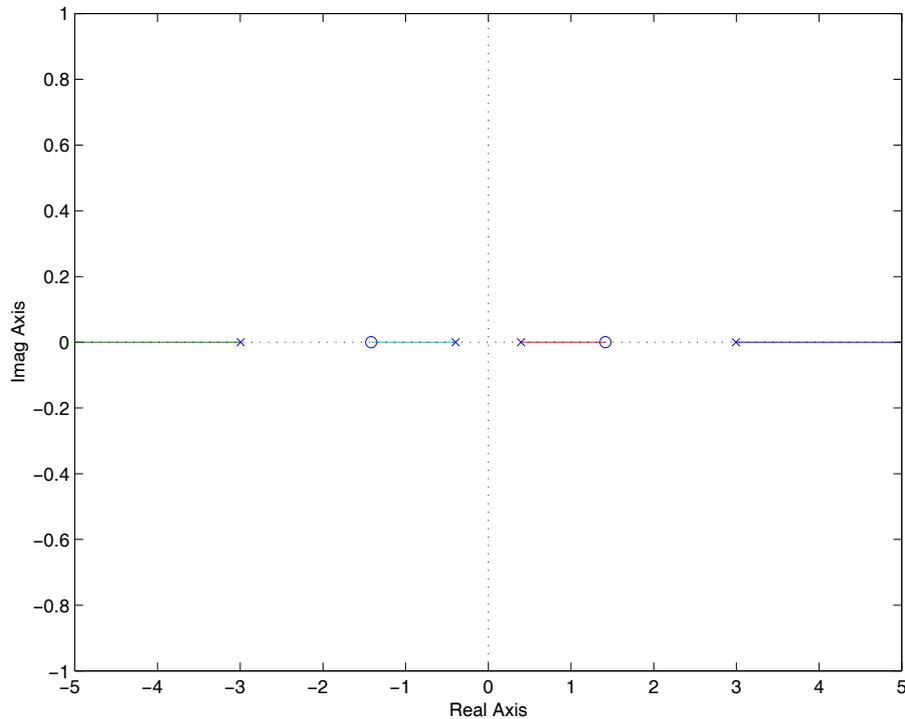


Figura 8.4: Lugar de las raíces de Chang-Letov

Los polos y los ceros de  $G(s)$  están dibujados en la Figura 8.4. Como se puede observar, están situados de forma simétrica en torno al eje imaginario. También se muestra el lugar de las raíces cuando  $q/r$  varía desde 0 hasta  $\infty$ . (Hay que hacer notar que como la ganancia en (10) es negativa, en realidad se está dibujando el lugar de las raíces para unas ganancias negativas  $-9.97 \cdot q/r$ .)

Si se selecciona  $q/r=1$ , entonces los ceros estables de (9) son:

$$s = -1.094, \quad s = -4.231 \quad (11)$$

Luego el polinomio característico del sistema en lazo cerrado es:

$$\Delta^c(s) = (s + 1.094) \cdot (s + 4.231) = s^2 + 5.324 \cdot s + 4.627 \quad (12)$$

Conocido el polinomio característico en lazo cerrado se puede determinar la ganancia de realimentación constante  $K$ , utilizando el método de Ackermann o de asignación de polos por realimentación constante de las variables de estado  $u(t) = -K \cdot x(t)$ .

◆

# TEMA 9

## CONTROL ESTOCÁSTICO DE SISTEMAS DISCRETOS

### 9.1 INTRODUCCION

En ocasiones el modelar un proceso real sometido a perturbaciones estocásticas mediante un modelo determinista puede conducir a resultados bastante pobres. Se debe considerar entonces un modelo que incluya también una parte estocástica. En estos modelos el estado no se puede conocer con exactitud debido a la presencia de ruido, por ello no es posible usar la teoría de control óptimo estudiada en los Temas 7 y 8. Para este tipo de modelos es conveniente usar *controles estocásticos* que son aquellos que consideran como criterio de control la minimización de alguna propiedad estadística (valor medio, varianza, valor cuadrático medio, etc) de alguna variable del sistema, típicamente la salida y/o la señal de control.

En esta tema se describen para sistemas discretos dos de los controles estocásticos más conocidos: el *control de varianza mínima* y el *control lineal cuadrático Gaussiano* comúnmente denominado como *control LQG*<sup>1</sup>. Con el objetivo de centrar la atención del alumno en los resultados fundamentales no se han incluido las demostraciones matemáticas de las ecuaciones asociadas a estas leyes de control. Los alumnos interesados pueden consultar la sección *Bibliografía*.

En este tema en primer lugar se realizan una serie de consideraciones previas relativas al modelo del sistema y a los criterios de control considerados. A continuación se dan unas nociones básicas sobre predicción óptima que sirven de preámbulo a la explicación del control de varianza mínima. Finalmente se describe el control LQG.

---

<sup>1</sup> Acrónimo inglés derivado de Linear Quadratic Gaussian

## 9.2 CONSIDERACIONES PREVIAS

### 9.2.1 Manipulación de polinomios

Sea un polinomio  $P(q)$ , su grado se denotará por  $\deg(P)$ . Siempre se considerará que  $\deg(P) \geq 0$ . Se denotará al *polinomio recíproco* de  $P(q)$  como  $P^*(q)$  y se obtiene de la siguiente forma:

$$P^*(q) = q^{\deg(P)} \cdot P(q^{-1})$$

Asimismo si se conoce el polinomio recíproco  $P^*(q)$  es posible calcular  $P(q)$  usando la expresión

$$P(q) = q^{\deg(P^*)} \cdot P^*(q^{-1})$$

Expresiones derivadas de las anteriores son:

$$P^*(q^{-1}) = q^{-\deg(P)} \cdot P(q)$$

$$P(q^{-1}) = q^{-\deg(P^*)} \cdot P^*(q)$$

#### ◆ Ejemplo 9.1:

Sean los polinomios:

$$A(z) = z + a$$

$$B^*(z) = 1 + b \cdot z$$

Su observa que  $\deg(A) = \deg(B^*) = 1$ .

El polinomio recíproco de  $A$  es:

$$A^*(z) = z^{\deg(A)} \cdot A(z^{-1}) = z \cdot (z^{-1} + a) = 1 + a \cdot z$$

El polinomio  $A^*(z^{-1})$  se obtendría a partir de  $A$  de la siguiente forma:

$$A^*(z^{-1}) = z^{-\deg(A)} \cdot A(z) = z^{-1} \cdot (z + a) = 1 + a \cdot z^{-1}$$

El polinomio original de  $B^*$  es:

$$B(z) = z^{\deg(B^*)} \cdot B^*(z^{-1}) = z \cdot (1 + b \cdot z^{-1}) = z + b$$

El polinomio  $B(z^{-1})$  se obtendría a partir de  $B^*$  de la siguiente forma:

$$B(q^{-1}) = z^{-\deg(B^*)} \cdot B^*(z) = z^{-1} \cdot (1 + b \cdot z) = z^{-1} + b$$

♦

## 9.2.2 Modelo discreto del proceso considerado

Se supone que el proceso que se desea controlar es lineal e invariante en el tiempo y que posee una sola entrada  $u$  y una única salida  $y$ . Se supone también que las perturbaciones pueden ser descritas como ruido blanco filtrado.

Se considera el siguiente modelo discreto para el proceso:

$$A(q) \cdot y_k = B(q) \cdot u_k + C(q) \cdot e_k \quad (9.1)$$

donde  $A(q)$ ,  $B(q)$  y  $C(q)$  son polinomios en el operador desplazamiento  $q$  y  $\{e_k\}$  es una secuencia de variables aleatorias independientes, no correlacionadas con media cero y desviación estándar  $\sigma$ . El modelo (9.1) es un modelo ARMAX (ver sección 5.8.1).

La ecuación (9.1) se puede normalizar para que el coeficiente principal de los polinomios  $A(q)$  y  $B(q)$  sea la unidad. A tales polinomios se les denomina *mónicos*.

El polinomio  $C(q)$  puede ser multiplicado por una potencia arbitraria de  $q$ , siempre que no se modifique la estructura de correlación de  $C(q) \cdot e_k$ . Esta propiedad se puede usar por ejemplo para normalizar  $C$  de tal forma que el grado de  $C$  sea igual al grado de  $A$ , es decir,  $\deg(C) = \deg(A)$ , aunque también se puede tener que  $\deg(C) = \deg(A) - 1$ .

Los polinomios  $A(q)$  y  $B(q)$  pueden tener sus raíces dentro o fuera del círculo unidad, mientras que las raíces de  $C(q)$  se encuentran todas dentro del círculo unidad. Por el teorema de factorización espectral (ver sección 3.5.3), el polinomio  $C(q)$  se puede cambiar para que todas sus raíces se encuentren dentro del círculo unidad o sobre él.

### ♦ Ejemplo 9.2: Modificación del polinomio $C$

Sea el polinomio

$$C(z) = z + 2$$

$C(z)$  posee una raíz en  $z=-2$  fuera del círculo unidad.

Considérese la señal:

$$n_k = C(q) \cdot e_k$$

donde  $\{e_k\}$  es una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas con valor medio cero y varianza unidad. La densidad espectral de  $n$  es

$$\phi(e^{i\omega T}) = \frac{1}{2\pi} \cdot C(e^{i\omega T}) \cdot C(e^{-i\omega T})$$

Puesto que

$$\begin{aligned} C(z) \cdot C(z^{-1}) &= (z+2) \cdot (z^{-1}+2) = (z+2) \cdot \left(\frac{1}{z}+2\right) \\ &= (z+2) \cdot \left(\frac{1+2z}{z}\right) = (2z+1) \cdot (2z^{-1}+1) \end{aligned}$$

la señal  $n$  puede ser representada mediante

$$n_k = C^*(q) \cdot e_k$$

donde

$$C^*(z) = (2z+1)$$

es el *recíproco* del polinomio  $C(z)$ .

◆

Luego si  $C(q)$  tiene sus ceros fuera del círculo unidad, el polinomio debe ser factorizado de la siguiente forma:

$$C = C^+ \cdot C^-$$

donde  $C^-$  posee todas sus raíces fuera del círculo unidad y  $C^+$  posee todas sus raíces dentro del círculo unidad. El polinomio  $C$  debe ser sustituido por

$$C = C^+ \cdot [C^-]^*$$

### 9.2.3 Criterios de control considerados

Para problemas de regulación en el estado estacionario en sistemas con componentes estocásticas y con una única salida se suele utilizar como criterio para diseñar el controlador la minimización de la varianza de la salida, es decir, la función de coste o criterio a minimizar sería:

$$J_{mv} = E[y_k^2] \quad (9.2)$$

que también se puede expresar en la forma:

$$J_{mv} = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2 \right] \quad (9.3)$$

Una ley de control que minimiza (9.2) se denomina *control de varianza mínima*. Para estos controladores la señal de control depende de forma crítica del periodo de muestreo. Así, un periodo de muestreo pequeño produce una varianza grande de la señal de control. Mientras que, un periodo de muestreo grande produce una varianza pequeña de la señal de control. En algunos casos es deseable llegar a un compromiso entre las varianzas de la señal de control y de la señal de salida. Esto se puede conseguir considerando la siguiente función de coste:

$$J_{lq} = E[y_k^2 + \rho \cdot u_k^2] \quad (9.4)$$

donde el parámetro  $\rho$  debe ser sintonizado por el diseñador en función de las prestaciones deseadas en su sistema. Una ley de control que minimiza una función de coste de este tipo se denomina *ley de control cuadrática*.

En la Figura 9.1 se representa la estructura de control que se va a considerar a lo largo de este tema. En ella el control que minimiza (9.2) o (9.4) está dado por la ley:

$$u_k = -\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} \cdot y_k$$

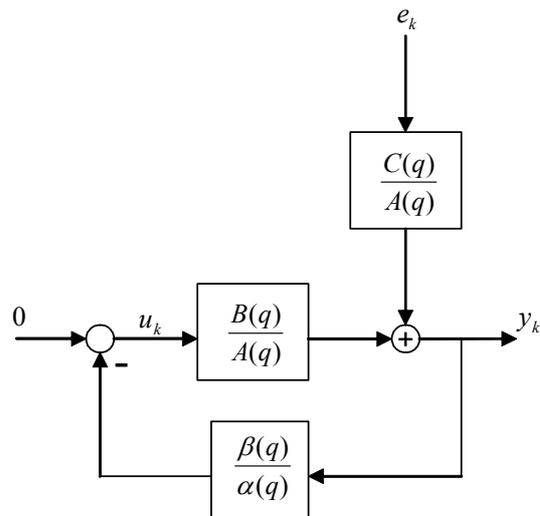


Figura 9.1: Estructura de control considerada

### 9.3 PREDICCIÓN OPTIMA

La teoría de predicción puede ser enunciada de diferentes formas, las cuales difieren en las suposiciones que se hacen sobre el proceso, el criterio o función de coste y los predictores admisibles. En esta sección se consideran las siguientes suposiciones:

- El proceso para ser predecido es generado mediante el filtrado de ruido blanco.
- El mejor predictor es aquel que minimiza el error de predicción cuadrático medio.
- Un predictor a  $m$  pasos admisible para  $y_{k+m}$  es una función arbitraria de la función  $y_k$ .

Sea  $\{y_k\}$  un proceso aleatorio generado por el siguiente modelo:

$$y_k = \frac{C(q)}{A(q)} \cdot e_k = \frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} \cdot e_k \quad (9.5)$$

donde  $\{e(k)\}$  es una secuencia de variables aleatorias independientes de valor medio cero y varianza  $\sigma^2$ . Se supone que  $A$  y  $C$  son de orden  $n$ . Además se supone que las raíces del polinomio  $C(z)$  están dentro del círculo unidad.

El predictor de varianza mínima sobre  $m$  pasos está dado por

$$\hat{y} = \hat{y}(k+m | k) = \frac{q \cdot G(q)}{C(q)} \cdot y_k = \frac{G^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})} \cdot y_k \quad (9.6)$$

donde los polinomios  $F$  y  $G$  son el cociente y el resto cuando se divide  $q^{m-1} \cdot C$  por  $A$ , es decir:

$$q^{m-1} \cdot C(q) = F(q) \cdot A(q) + G(q) \quad (9.7)$$

Se considera que el polinomio  $F$  es mónico de grado  $m-1$  y  $G$  es de grado menor que  $n$ :

$$\begin{aligned} F(q) &= q^{m-1} + f_1 \cdot q^{m-2} + \dots + f_{m-1} \\ G(q) &= g_0 \cdot q^{n-1} + g_1 \cdot q^{n-2} + \dots + g_{n-1} \end{aligned}$$

El predictor dado por (9.6) es un predictor lineal equivalente al predictor en el estado estacionario que se obtiene usando el filtro de Kalman (ver sección 7.5).

El error de predicción es una media móvil:

$$\tilde{y}(k+m | k) = y_{k+m} - \hat{y}(k+m | k) = F(q) \cdot e_{k+1} \quad (9.8)$$

El valor medio del error de predicción es:

$$E[\tilde{y}(k+m | k)] = F(q) \cdot E[e_{k+1}] = 0 \quad (9.9)$$

Y la varianza

$$E[\tilde{y}(k+m | k)^2] = J_m = [1 + f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_{m-1}^2] \cdot \sigma^2 = \sigma^2 \cdot \sum_{j=0}^{m-1} f_j^2 \quad (9.10)$$

Se observa que conforme aumenta el horizonte de predicción  $m$  la varianza del error de estimación aumentara, ya que el sumatorio tiene más términos. Se puede demostrar que la función  $J_m$  tiende a la varianza de  $y$  cuando  $m$  tiende a infinito. Una gráfica de  $J_m$  en función de  $m$  mostraría la bondad de la predicción sobre diferentes horizontes.

♦ **Ejemplo 9.3:**

Sea el sistema (9.5) con:

$$\begin{aligned} A(q) &= q^2 - 1.5 \cdot q + 0.7 \\ C(q) &= q^2 - 0.2 \cdot q + 0.5 \end{aligned}$$

La varianza de  $e_k$  es  $\sigma^2=1$ . Se desea determinar el predictor de la salida sobre 3 pasos, es decir,  $m=3$ . Para obtenerlo hay que usar (9.7):

$$q^2 \cdot [q^2 - 0.2 \cdot q + 0.5] = [q^2 + f_1 \cdot q + f_2] \cdot [q^2 - 1.5 \cdot q + 0.7] + [g_0 \cdot q + g_1]$$

Operando se obtiene:

$$q^4 - 0.2 \cdot q^3 + 0.5 \cdot q^2 = q^4 + f_1 \cdot q^3 + f_2 \cdot q^2 - 1.5 \cdot q^3 - 1.5 \cdot f_1 \cdot q^2 - 1.5 \cdot f_2 \cdot q + 0.7 \cdot q^2 + \dots + 0.7 \cdot f_1 \cdot q + 0.7 \cdot f_2 + g_0 \cdot q + g_1$$

Igualando los coeficientes asociados a las mismas potencias de  $q$  se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} q^3 : -0.2 &= f_1 - 1.5 \\ q^2 : 0.5 &= f_2 - 1.5 \cdot f_1 + 0.7 \\ q : 0 &= -1.5 \cdot f_2 + 0.7 \cdot f_1 + g_0 \\ q^0 : 0 &= g_1 + 0.7 \cdot f_2 \end{aligned}$$

Resolviendo se obtiene  $f_1=1.3$ ,  $f_2=1.75$ ,  $g_0=1.715$ ,  $g_1=-1.225$ . Luego los polinomios  $F(q)$  y  $G(q)$  son:

$$\begin{aligned} F(q) &= q^2 + 1.3 \cdot q + 1.75 \\ G(q) &= 1.715 \cdot q - 1.225 \end{aligned}$$

Luego el predictor de la salida sobre 3 pasos de acuerdo con (9.6) es

$$\hat{y}(k+3|k) = \frac{1.715 \cdot q^2 - 1.225 \cdot q}{q^2 - 0.2 \cdot q + 0.5} \cdot y_k$$

La varianza del error de estimación se obtiene aplicando (9.10)

$$E[\tilde{y}(k+3|k)^2] = J_m = [1 + f_1^2 + f_2^2] \cdot \sigma^2 = [1 + 1.3^2 + 1.75^2] = 5.7525$$

◆

La suposición de que el polinomio  $C(q)$  posee todos sus raíces dentro del círculo unidad garantiza que el predictor dado por (9.5) es estable en el estado estacionario. Recuérdese que por el Teorema de factorización espectral  $C$  puede ser seleccionado para que tenga sus ceros dentro o sobre el círculo unidad. Si el polinomio  $C$  tiene sus ceros sobre el círculo unidad el predictor óptimo es un sistema variable con el tiempo.

◆ **Ejemplo 9.4:**

Considérese el proceso

$$y_k = e_k - e_{k-1}$$

Equivalentemente este proceso puede expresarse en la forma:

$$y_k = e_k - q^{-1} \cdot e_k = (1 - q^{-1}) \cdot e_k$$

O en la forma:

$$q \cdot y_k = (q - 1) \cdot e_k$$

Comparando con un proceso cuya forma general es

$$A(q) \cdot y_k = C(q) \cdot e_k$$

se obtiene

$$A(q) = q$$

$$C(q) = q - 1$$

O equivalentemente:

$$A(z) = z$$

$$C(z) = z - 1$$

Se observa que el polinomio  $C(z)$  posee una raíz en  $z=-1$ , es decir, sobre el círculo unidad.

Si se calcula el predictor de la salida sobre  $m=1$  usando (9.7) y (9.6) se obtiene

$$\hat{y}(k + m | k) = \frac{-q}{q-1} \cdot y_k = -\frac{1}{1-q^{-1}} \cdot y_k$$

Y sustituyendo el valor de  $y_k$  dado por la ecuación en diferencias del proceso se obtiene:

$$\hat{y}(k + m | k) = -\left(\frac{1}{1-q^{-1}}\right) \cdot (1 - q^{-1}) \cdot e_k = -e_k$$

Si se intenta calcular  $e_k$  a partir de  $y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k0}$  se obtiene:

$$e(k) = e(k_0 - 1) + \sum_{i=k_0}^k y(i) = e(k_0 - 1) + z(k)$$

El término  $e(k_0-1)$  no tiende a 0 cuando  $k_0 \rightarrow -\infty$ . Esto es consecuencia de que  $C$  no es estable. En este caso se debe usar la teoría del filtro de Kalman (ver sección 4.2) sobre el proceso expresado en la forma

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= e_k \\y_k &= -x_k + e_k\end{aligned}$$

para obtener el predictor óptimo. Se puede demostrar que su expresión es:

$$\hat{y}(k+1|k) = -\frac{1}{k-k_0+2} \cdot \sum_{n=0}^{k-k_0} (n+1) \cdot y(k_0+n)$$

Se observa que el predictor óptimo es variable con el tiempo. Notar que la influencia de la condición inicial  $y(k_0)$  sobre el predictor tiende a 0 cuando  $k \rightarrow -\infty$  de la forma  $1/(k+2-k_0)$ . Este decrecimiento es mucho más lento que el caso de que el polinomio  $C$  fuese estable.

◆

#### ◆ Ejemplo 9.5:

El modelo

$$A(q) \cdot y_k = C(q) \cdot e_k + b$$

donde  $b$  es una constante desconocida, representa una señal con un offset. La constante  $b$  puede ser eliminada restando la ecuación del modelo en el instante  $k+1$  de la del modelo en el instante  $k$ . Con lo que se obtiene:

$$A(q) \cdot [y_{k+1} - y_k] = C(q) \cdot [e_{k+1} - e_k]$$

Que se puede expresar equivalentemente en la forma:

$$(q-1) \cdot A(q) \cdot y_k = (q-1) \cdot C(q) \cdot e_k$$

Definiendo

$$\tilde{C}(q) = (q - 1) \cdot C(q)$$

y como salida a

$$\Delta y = (q - 1) \cdot y_k$$

se obtiene el siguiente modelo

$$A(q) \cdot \Delta y_k = \tilde{C}(q) \cdot e_k$$

En este modelo el polinomio  $\tilde{C}(q)$  posee una raíz sobre el círculo unidad por lo que el predictor óptimo será variable con el tiempo. En consecuencia este modelo no es muy deseable.

♦

## 9.4 CONTROL DE VARIANZA MINIMA

### 9.4.1 CASO 1: B ESTABLE

Considérese el proceso descrito por la ecuación (9.1). Se supone que los polinomios  $B(q)$  y  $C(q)$  son estables, es decir, poseen todas sus raíces dentro del círculo unidad. Se puede demostrar que el *control de varianza mínima* está dado por

$$u_k = -\frac{G(q)}{B(q) \cdot F(q)} \cdot y_k \quad (9.11)$$

En las expresiones anteriores los polinomios  $G(q)$  y  $F(q)$  tienen la forma

$$\begin{aligned} F(q) &= q^{d-1} + f_1 \cdot q^{d-2} + \dots + f_{d-1} \\ G(q) &= g_0 \cdot q^{n-1} + g_1 \cdot q^{n-2} + \dots + g_{n-1} \end{aligned}$$

Los grados de los polinomios A, B, F y G son:

$$\begin{aligned} \deg(A) &= n \\ \deg(B) &= m \\ \deg(F) &= d - 1 \\ \deg(G) &= n - 1 \end{aligned}$$

Donde

$$d = (\deg(A) - \deg(B)) > 0$$

Es decir,  $m=(n-d)$ .

Los polinomios  $G$  y  $F$  se obtienen a partir de la expresión:

$$q^{d-1} \cdot C(q) = F(q) \cdot A(q) + G(q) \quad (9.12)$$

Por otra parte, multiplicando y dividiendo (9.11) por  $q^{n-1}$

$$u_k = -\frac{q^{n-1} \cdot G(q)}{q^{n-1} \cdot B(q) \cdot F(q)} \cdot y_k$$

Sustituyendo en el denominador  $q^{n-1} = q^{n-d} \cdot q^{d-1}$ , agrupando y considerando la definición de recíproco de un polinomio se obtiene la siguiente expresión equivalente para el control de varianza mínima:

$$u_k = -\frac{q^{n-1} \cdot G(q)}{[q^{n-d} \cdot B(q)] \cdot [q^{d-1} \cdot F(q)]} \cdot y_k = -\frac{G^*(q^{-1})}{B^*(q^{-1}) \cdot F^*(q^{-1})} \cdot y_k \quad (9.13)$$

Conocido la expresión del controlador es posible obtener la expresión de la salida del sistema en lazo cerrado. Sustituyendo (9.11) en (9.1) se obtiene

$$A(q) \cdot y_k = -\frac{B(q) \cdot G(q)}{B(q) \cdot F(q)} \cdot y_k + C(q) \cdot e_k$$

Se observa que el control de varianza mínima cancela todos los ceros  $B(q)$  del proceso. Agrupando términos y despejando se obtiene:

$$y_k = \frac{F(q) \cdot C(q)}{A(q) \cdot F(q) + G(q)} \cdot e_k$$

Sustituyendo el denominador por (9.13) se obtiene:

$$y_k = \frac{F(q) \cdot C(q)}{q^{d-1} \cdot C(q)} \cdot e_k = q^{-(d-1)} \cdot F(q) \cdot e_k$$

que se puede expresar equivalentemente como:

$$y_k = F^*(q^{-1}) \cdot e_k = e_k + f_1 \cdot e_{k-1} + \dots + f_{d-1} \cdot e_{k-d+1} \quad (9.14)$$

Por otra parte se observa, que la estrategia de varianza mínima se obtiene mediante la predicción de la salida sobre  $d$  pasos y seleccionando una ley de control que haga la predicción igual a la salida deseada. De esta forma este problema de control estocástico puede separarse en dos problemas: un problema de predicción óptima y un problema de control determinista.

♦ **Ejemplo 9.6:**

Dado el sistema (9.1) con

$$A(q) = q^3 - 1.7 \cdot q^2 + 0.7 \cdot q$$

$$B(q) = q + 0.5$$

$$C(q) = q^3 - 0.9 \cdot q^2$$

Se desea obtener el control de varianza mínima, la salida del proceso controlado y la varianza de la salida.

En primer lugar se observa que  $\deg(A)=3$  y que  $\deg(B)=1$  con lo que  $d=3-1=2$ . Luego para obtener los polinomios  $F$  y  $G$  hay que dividir el polinomio  $q^{d-1} \cdot C(q)$  entre el polinomio  $A(q)$ . El cociente de esta división es el polinomio  $F(q)$  y el resto es el polinomio  $G(q)$ . Luego realizando dicha división polinomial se obtiene

$$F(q) = q + 0.8$$

$$G(q) = 0.66 \cdot q^2 - 0.56 \cdot q$$

El control de varianza mínima es:

$$u_k = -\frac{0.66 \cdot q^2 - 0.56 \cdot q}{(q + 0.5) \cdot (q + 0.8)} \cdot y_k = -\frac{q \cdot (0.66 \cdot q - 0.56)}{(q + 0.5) \cdot (q + 0.8)} \cdot y_k$$

La salida del sistema controlado es:

$$y_k = e_k + 0.8 \cdot e_{k-1}$$

La varianza de la salida es:

$$\begin{aligned} E[y_k^2] &= E[(e_k + 0.8 \cdot e_{k-1}) \cdot (e_k + 0.8 \cdot e_{k-1})] = \\ &= E[e_k^2] + 0.8 \cdot E[e_k \cdot e_{k-1}] + 0.8 \cdot E[e_{k-1} \cdot e_k] + 0.64 \cdot E[e_{k-1}^2] \end{aligned}$$

Puesto que  $\{e_k\}$  es una secuencia de variables aleatorias independientes entonces  $E[e_k \cdot e_{k-1}] = 0$  y como su varianza es  $E[e_k^2] = \sigma^2$  se obtiene el siguiente resultado

$$E[y_k^2] = 1.64 \cdot \sigma^2$$

◆

### 9.4.2 CASO 2: B INESTABLE

Si el polinomio B es inestable, es decir, posee alguna de sus raíces fuera del círculo unidad, el sistema tiene modos inestables que serán excitados por la perturbación. Estos modos inestables están acoplados a la señal de control y provocan que ésta crezca exponencialmente. Sin embargo, la salida permanece acotada ya que estos modos inestables no están acoplados a la salida.

#### ◆ Ejemplo 9.7:

Sea el sistema (9.1) con

$$A(z) = (z - 1) \cdot (z - 0.7)$$

$$B(z) = 0.9 \cdot z + 1$$

$$C(z) = z(z - 0.7)$$

Se observa que  $B(z)$  posee una raíz en  $z = -10/9$ , la cual está fuera del disco unidad. El control de varianza mínima que se obtiene aplicando (9.11) es:

$$u_k = -\frac{(z - 0.7)}{(0.9 \cdot z + 1)} \cdot y_k$$

En la Figura 9.2 se muestra una simulación del sistema controlado con este control de varianza mínima. La presencia del modo inestable se aprecia claramente en la señal de control, pero no en la señal de salida. Este fenómeno se denomina *ringing*. Si la simulación continuase, la señal de control sería tan grande que se producirían un overflow o un error numérico en la computadora. En un problema práctico la señal de control se haría tan grande que la aproximación lineal ya no sería válida. Después de un pequeño tiempo el modo inestable también sería apreciado en la salida.

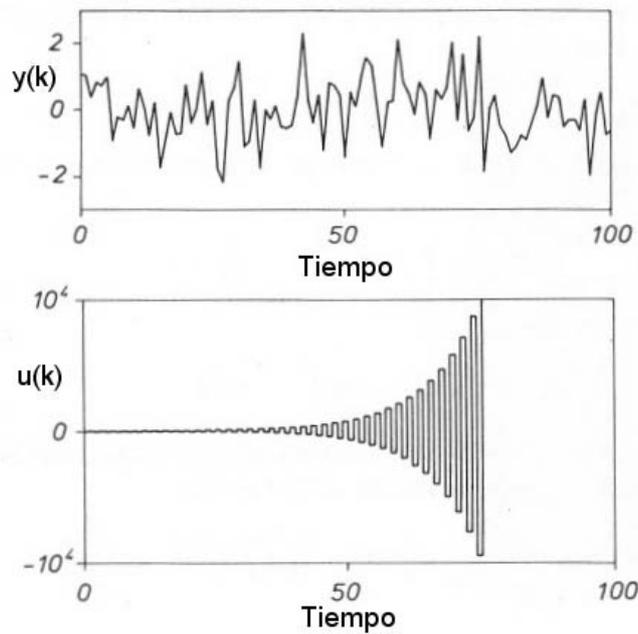


Figura 9.2: Simulación del sistema del ejemplo 9.5 con la ley de control (9.11) que cancela un cero inestable del proceso.

◆

El control de varianza mínima se puede extender al caso en que el polinomio  $B$  tiene raíces fuera del círculo unidad. Para ello se debe factorizar el polinomio  $B(z)$  de la siguiente forma:

$$B(z) = B^+(z) \cdot B^-(z) \quad (9.15)$$

donde  $B^+(z)$  representa a las raíces de  $B(z)$  dentro del círculo unidad y  $B^-(z)$  a las raíces que se encuentran fuera o sobre el disco unidad. Además es conveniente que  $B^*(q)$  sea mónico.

Suponiendo que todas las raíces del polinomio  $C(z)$  están dentro del disco unidad y que los polinomios  $A(z)$  y  $B^-(z)$  no poseen factores comunes se puede demostrar que la ley de varianza mínima es:

$$u_k = -\frac{G(q)}{B^+(q) \cdot F(q)} \cdot y_k \quad (9.16)$$

donde  $F(z)$  y  $G(z)$  son polinomios que satisfacen la siguiente ecuación Diofántica (ver sección 2.9.1):

$$q^{d-1} \cdot C(q) \cdot [B^-(q)]^* = A(q) \cdot F(q) + B^-(q) \cdot G(q) \quad (9.17)$$

en la cual

$$\begin{aligned} \deg F &= d + \deg B^- - 1 \\ \deg G &< \deg A = n \end{aligned}$$

La salida del sistema en lazo cerrado es:

$$y_k = \frac{F(q)}{q^{d-1} \cdot [B^-(q)]^*} \cdot e_k \quad (9.18)$$

◆ **Ejemplo 9.8:**

Sea el sistema

$$\begin{aligned} A(z) &= (z-1) \cdot (z-0.7) \\ B(z) &= 0.9 \cdot z + 1 \\ C(z) &= z(z-0.7) \end{aligned}$$

El grado de  $A(z)$  es 2 y el grado de  $B(z)$  es 1, luego  $d = \deg(A) - \deg(B) = 2 - 1 = 1$ .

Por otra parte se observa que el polinomio  $B(z)$  posee una raíz en  $z = -10/9$ , la cual está fuera del disco unidad.  $B(z)$  se puede factorizar de la siguiente forma:

$$B(z) = 1 \cdot (0.9 \cdot z + 1) = B^+(z) \cdot B^-(z)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} B^+(z) &= 1 \\ B^-(z) &= (0.9 \cdot z + 1) \end{aligned}$$

El recíproco de  $B^-(z)$  se calcula de la siguiente forma:

$$[B^-(z)]^* = z^{\deg B^-} \cdot B^-(z^{-1}) = z \cdot (0.9 \cdot z^{-1} + 1) = z + 0.9$$

Los grados de los polinomios  $F(q)$  y  $G(q)$  son:

$$\begin{aligned} \deg F &= d + \deg B^- - 1 = 1 + 1 - 1 = 1 \\ \deg G &= 1 < \deg A = 2 \end{aligned}$$

Por tanto estos polinomios tienen la siguiente forma:

$$F(z) = z + f_1$$

$$G(z) = g_0 \cdot z + g_1$$

Para obtener el valor de sus coeficientes hay que resolver la ecuación (9.17):

$$z \cdot (z - 0.7) \cdot (z + 0.9) = (z - 1) \cdot (z - 0.7) \cdot (z + f_1) + (0.9 \cdot z + 1) \cdot (g_0 \cdot z + g_1)$$

Si se evalúa la ecuación anterior en las raíces de  $A(z)$  ( $z=0.7$  y  $z=1$ ) y en las raíces de  $B(z)$  ( $z=-10/9$ ) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$0.7 \cdot g_0 + g_1 = 0$$

$$g_0 + g_1 = 0.3$$

$$f_1 = 1$$

Con lo que  $g_1=0.3$  y  $g_0=-0.7$ .

Por tanto el control de varianza mínima (9.16) y la salida (9.18) son:

$$u_k = -\frac{(q - 0.7)}{(q + 1)} \cdot y_k$$

$$y_k = \frac{(q + 1)}{(q + 0.9)} \cdot e_k = \left[ 1 + \frac{0.1}{q + 0.9} \right] \cdot e_k = e_k + \frac{0.1}{q + 0.9} \cdot e_k$$

Usando las fórmulas propuestas en la sección 3.5.4 es posible calcular la varianza de la salida y la varianza de la señal de control:

$$E[y^2] = \frac{20}{19} \cdot \sigma^2 = 1.05 \cdot \sigma^2$$

$$E[u^2] = \frac{257}{19} \cdot \sigma^2 = 14.47 \cdot \sigma^2$$

En la Figura 9.3 se muestra una simulación del sistema controlado con este control de varianza mínima. Se observa claramente que la señal de control ya no se inestabiliza

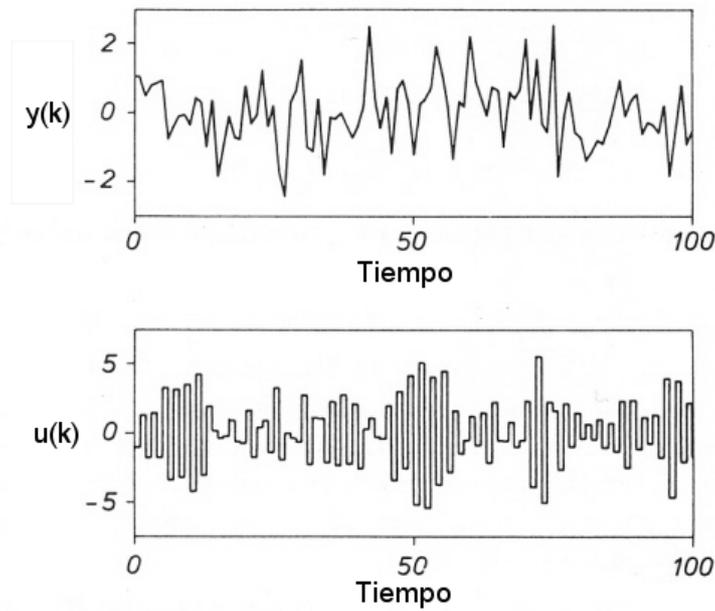


Figura 9.3: Simulación del sistema del Ejemplo 9.8

◆

### 9.4.3 Interpretación del control de varianza mínima como diseño mediante la ubicación de polos

El control de varianza mínima se puede interpretar como un diseño mediante la ubicación de polos. La ecuación (9.1) del sistema y la ecuación del control de varianza mínima (9.11) pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A(q) & -B(q) \\ G(q) & F(q) \cdot B(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(q) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e_k \quad (9.19)$$

Resolviendo el determinante

$$\begin{vmatrix} A(q) & -B(q) \\ G(q) & F(q) \cdot B(q) \end{vmatrix} = 0$$

se obtiene la ecuación característica del sistema en lazo cerrado:

$$A(q) \cdot F(q) \cdot B(q) + G(q) \cdot B(q) = B(q) \cdot [A(q) \cdot F(q) + G(q)] = 0 \quad (9.20)$$

Usando (9.13) la ecuación característica toma la forma:

$$q^{d-1} \cdot B(q) \cdot C(q) = 0 \quad (9.21)$$

El sistema en lazo cerrado es de orden  $2 \cdot n - 1$ . Tiene  $2 \cdot n - d$  polos asociadas a las raíces de  $B(q)$  y  $C(q)$  y  $d-1$  polos en el origen.

El control de varianza mínima se puede interpretar como un diseño mediante ubicación de polos, donde los polos son situados en las raíces dadas por (9.21). Las similitudes con el diseño mediante ubicación de polos se ven mucho más claras si se reescribe la ley de control de varianza mínima en la siguiente forma:

$$u_k = -\frac{S(q)}{R(q)} \cdot y_k \quad (9.22)$$

donde  $S=G$  y  $R=F \cdot B$ .

Si se multiplica los dos miembros de (9.13) por  $B$  se obtiene

$$q^{d-1} \cdot C(q) \cdot B(q) = F(q) \cdot A(q) \cdot B(q) + G(q) \cdot B(q) = A(q) \cdot R(q) + B(q) \cdot S(q) \quad (9.23)$$

Donde  $R(q) = F(q) \cdot B(q)$  y  $S(q) = G(q)$ . Se observa que esta ecuación es un caso especial de la ecuación Diofántica (2.83).

Para el caso en que  $B(z)$  posee raíces inestables el controlador de varianza mínima venía dado por (9.16) entonces la ecuación característica del sistema en lazo cerrado es:

$$q^{d-1} \cdot B^+(q) \cdot [B^-(q)]^* \cdot C(q) = 0 \quad (9.24)$$

Y su ecuación Diofántica asociada es:

$$q^{d-1} \cdot C(q) \cdot [B^-(q)]^* \cdot B^+(q) = A(q) \cdot R(q) + B(q) \cdot S(q) \quad (9.25)$$

donde  $R(q) = F(q) \cdot B^+(q)$  y  $S(q) = G(q)$ .

## 9.5 CONTROL LQG

### 9.5.1 Ecuaciones del control LQG

Considérese el siguiente sistema:

$$A(q) \cdot y_k = B(q) \cdot u_k + C(q) \cdot e_k \quad (9.26)$$

con  $\deg(A) = \deg(C) = n$ .

Se consideran las siguientes suposiciones:

- 1) Todas las raíces del polinomio  $C(z)$  se encuentran dentro del círculo unidad.
- 2) No existen factores comunes entre los polinomios  $A(z)$ ,  $B(z)$  y  $C(z)$ .
- 3) Todas las raíces de los posibles factores comunes de  $A(z)$  y  $B(z)$  están dentro del círculo unidad.

Sea  $P(z)$  un polinomio mónico de grado  $n$  cuyas raíces se encuentran todas dentro del círculo unidad y que es solución de la ecuación de Riccati:

$$r \cdot P(z) \cdot P(z^{-1}) = \rho \cdot A(z) \cdot A(z^{-1}) + B(z) \cdot B(z^{-1}) \quad (9.27)$$

La ley de control admisible que minimiza el criterio

$$J_{lq} = E[y_k^2 + \rho u_k^2] \quad (9.28)$$

se puede demostrar que es:

$$u_k = -\frac{S(q)}{R(q)} \cdot y_k \quad (9.29)$$

Los polinomios  $R(z)$  y  $S(z)$  satisfacen la ecuación Diofántica

$$P(z) \cdot C(z) = A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z) \quad (9.30)$$

que posee solución única con  $\deg(S) < n$  y  $\deg(R) = n$ .

El polinomio  $S^*(z)$  es la solución única de la ecuación:

$$A^*(z) \cdot X(z) + r \cdot P(z) \cdot S^*(z) = B(z) \cdot C^*(z) \quad (9.31)$$

con  $\deg(X) < n$ .

Por su parte el polinomio  $R^*(z)$  satisface la ecuación

$$P^*(z) \cdot X(z) + \rho \cdot A(z) \cdot S^*(z) = R^*(z) \cdot B(z) \quad (9.32)$$

Puesto que  $\deg(X) < \deg(P)$  de (9.32) se deduce que  $\deg(R^*) < n$  si  $\rho=0$  y  $\deg(S^*) < n$  si  $\rho > 0$ .

Con la ley de control (9.29), la salida del sistema en lazo cerrado es:

$$y_k = -\frac{R(q)}{P(q)} \cdot e_k \quad (9.33)$$

Y la señal de control es:

$$u_k = -\frac{S(q)}{P(q)} \cdot e_k \quad (9.34)$$

El valor mínimo de la función de coste (9.28) viene dado por la siguiente integral compleja:

$$\min \{E[y^2 + \rho u^2]\} = \frac{\sigma^2}{2 \cdot \pi \cdot i} \oint \left[ \frac{R(z) \cdot R(z^{-1}) + \rho \cdot S(z) \cdot S(z^{-1})}{P(z) \cdot P(z^{-1})} \right] \cdot \frac{dz}{z} \quad (9.35)$$

La ley de varianza mínima también se puede obtener de (9.29) basta considerar  $\rho=0$ .

Si las leyes de control admisibles tienen un retardo de un periodo de muestreo, entonces la ley de control está dada por (9.29), donde  $R(z)$  y  $S(z)$  son la solución única a la ecuación Diofántica (9.30) con  $\deg(S) < n$ . En este caso:

$$A^*(z) \cdot R^*(z) + z^{d+1} \cdot B^*(z) \cdot S^*(z) = P^*(z) \cdot C^*(z) \quad (9.36)$$

## 9.5.2 Procedimiento computacional

En la sección anterior se han presentado las ecuaciones que permiten obtener un control LQG para sistemas SISO. En esta sección se detalla en forma de procedimiento computacional, la forma y el orden en que deben usarse dichas ecuaciones:

- 1) Reescribir el modelo del proceso y de sus perturbaciones en la forma estándar (9.26), donde el polinomio  $C(z)$  sea un polinomio estable (puede que sea necesario factorizarlo de la forma indicada en la sección 9.2.1).

- 2) Determinar el polinomio  $P(z)$  resolviendo la ecuación (9.27). Si los polinomios  $A$  y  $B$  poseen un factor común estable  $A_2$  los cálculos de la ley de control pueden ser simplificados realizando la siguiente factorización:

$$A = A_1 \cdot A_2$$

$$B = B_1 \cdot A_2$$

Se sigue de (9.27) que  $A_2$  también divide a  $P$ , por lo que éste puede escribirse en la forma:

$$P = P_1 \cdot A_2$$

donde  $P_1$  se obtiene resolviendo la ecuación:

$$r \cdot P_1(z) \cdot P_1(z^{-1}) = \rho \cdot A_1(z) \cdot A_1(z^{-1}) + B_1(z) \cdot B_1(z^{-1})$$

- 3) Existen dos posibilidades para calcular los polinomios  $R(z)$  y  $S(z)$ :

- El polinomio  $S(z)$  puede ser determinado de (9.31). Entonces el polinomio  $R(z)$  es obtenido o de (9.32) o de (9.30).
- Usar (9.31) para determinar el grado de  $S^*(z)$ . Entonces tanto  $R(z)$  como  $S(z)$  pueden ser determinados de (9.30).

◆ **Ejemplo 9.9:**

Considérese un sistema caracterizado por:

$$A(z) = (z + a)$$

$$B(z) = b$$

$$C(z) = z + c$$

Se pide determinar el control LQG.

Se observa que  $n = \deg(A) = \deg(C) = 1$  y  $\deg(B) = 0$ . Además  $A$  y  $B$  no poseen ningún factor común. Además los recíprocos de estos polinomios son:

$$A^*(z) = z^{\deg A} \cdot A(z^{-1}) = z \cdot (z^{-1} + a) = 1 + a \cdot z$$

$$B^*(z) = z^{\deg B} \cdot B(z^{-1}) = b$$

$$C^*(z) = z^{\deg C} \cdot C(z^{-1}) = z \cdot (z^{-1} + c) = 1 + c \cdot z$$

Paso 1: Determinar el polinomio  $P(z)$  de grado  $\deg(P)=n=1$  mediante la resolución de la ecuación (9.27).

$$r \cdot (z + p_1) \cdot (z^{-1} + p_1) = \rho \cdot (z + a) \cdot (z^{-1} + a) + b^2$$

Operando se obtiene

$$r \cdot (1 + p_1^2) + r \cdot p_1 \cdot (z^{-1} + z) = [\rho \cdot (1 + a^2) + b^2] + \rho \cdot a \cdot (z^{-1} + z)$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de  $z$  se obtienen el siguiente par de ecuaciones:

$$r \cdot p_1 = \rho \cdot a \quad (1)$$

$$r \cdot (1 + p_1^2) = \rho \cdot (1 + a^2) + b^2 \quad (2)$$

De (1) se obtiene

$$r = \frac{\rho \cdot a}{p_1} \quad (3)$$

Y sustituyendo (3) en (2) se obtiene la siguiente ecuación de segundo orden para  $p_1$ :

$$\rho \cdot a \cdot p_1^2 - [\rho \cdot (1 + a^2) + b^2] \cdot p_1 + \rho \cdot a = 0$$

La solución de esta ecuación que garantiza que  $P(z)$  está dentro del círculo unidad ( $|p_1| < 1$ ) es:

$$p_1 = \frac{\rho \cdot (1 + a^2) + b^2 + \sqrt{\rho^2 \cdot (1 - a^2)^2 + b^4 + 2 \cdot \rho \cdot b^2 \cdot (1 + a^2)}}{2 \cdot \rho \cdot a} \quad (4)$$

Paso 2: Determinar el polinomio  $S(z)$  a partir de (9.31). Recuérdese que  $\deg(S) < n$  y  $\deg(X) < n$ . Luego como  $n=1$   $S(z)=s_0$  y  $X(z)=x_0$ . El recíproco del polinomio  $S$  es

$$S^*(z) = z^{\deg S} \cdot S(z^{-1}) = z^0 \cdot s_0 = s_0$$

Luego la ecuación (9.31) toma la forma:

$$(1 + a \cdot z) \cdot x_0 + r \cdot (z + p_1) \cdot s_0 = b \cdot (1 + c \cdot z)$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de  $z$  se obtiene:

$$x_0 + r \cdot p_1 \cdot s_0 = b$$

$$a \cdot x_0 + r \cdot s_0 = b \cdot c$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para  $s_0$  y  $x_0$  se obtiene:

$$s_0 = \frac{b \cdot (c - a)}{r \cdot (1 - a \cdot p_1)} \quad (5)$$

$$x_0 = \frac{b \cdot (1 - c \cdot p_1)}{1 - a \cdot p_1} \quad (6)$$

Paso 3: Determinar el polinomio  $R(z)$  a partir de (9.32). El grado del polinomio  $R(z)$  es  $\deg(R)=n=1$ . Se supone que su estructura es:

$$R(z) = r_0 \cdot z + r_1$$

Luego su polinomio recíproco es:

$$R^*(z) = z^{\deg R} \cdot R(z^{-1}) = z \cdot (r_0 \cdot z^{-1} + r_1) = r_0 + r_1 \cdot z$$

Luego la ecuación (9.32) toma la forma:

$$(1 + p_1 \cdot z) \cdot x_0 + \rho \cdot (z + a) \cdot s_0 = (r_0 + r_1 \cdot z) \cdot b$$

Igualando los coeficientes de igual potencia de  $z$  se obtienen el siguiente par de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_0 + \rho \cdot a \cdot s_0 &= r_0 \cdot b \\ p_1 \cdot x_0 + \rho \cdot s_0 &= r_1 \cdot b \end{aligned}$$

Sustituyendo (1) en estas ecuaciones se obtiene el siguiente resultado

$$r_0 = 1 \quad (7)$$

$$r_1 = \frac{c \cdot p_1}{a} \quad (8)$$

Paso 4: Escribir la ley de control LQG dada por (9.29)

$$u_k = -\frac{S(q)}{R(q)} \cdot y_k = -\frac{s_0}{r_0 \cdot z + r_1} \cdot y_k$$

Sustituyendo los valores de  $s_0$ ,  $r_0$  y  $r_1$  obtenidos anteriormente se tiene el siguiente resultado final

$$u_k = -\frac{(p_1 - a) \cdot (a - c)}{a \cdot b} \cdot \frac{q}{q + p_1 \cdot c / a} y_k \quad (9)$$

Comentario 1:

Otra forma de resolver el problema es darse cuenta que  $\deg(S^*)=0$ , entonces la ecuación (9.30) toma la siguiente forma:

$$(z + p_1) \cdot (z + c) = (z + a)(r_0 \cdot z + r_1) + b \cdot s_0 \cdot z$$

Sustituyendo  $z=-a$  en la ecuación anterior se obtiene:

$$s_0 = \frac{(p_1 - a) \cdot (a - c)}{a \cdot b} \quad (10)$$

Usando ahora (9.27) para este ejemplo con  $z=-p_1$  se obtiene que

$$p_1 - a = \frac{b^2 \cdot p_1}{\rho \cdot (a \cdot p_1 - 1)} \quad (11)$$

Sustituyendo (11) en (10) se obtiene la misma expresión (5) para  $s_0$  que anteriormente. Los valores de  $r_0$  y  $r_1$  se obtienen de (9.30).

Comentario 2:

El resultado (9) que se ha obtenido sólo es válido si  $a \neq 0$ . Si  $a=0$  el sistema tendría un retardo temporal y habría que usar (9.31) y (9.36) para determinar  $R(z)$  y  $S(z)$ . Procediendo de esta forma se tendría:

$$s_0 = \frac{b \cdot c}{b^2 + \rho}$$

$$r_0 = 1$$

$$r_1 = \frac{\rho \cdot c}{b^2 + \rho}$$

Luego el control LQG para  $a=0$  es:

$$u_k = -\frac{b \cdot c}{(b^2 + \rho) \cdot q + \rho \cdot c} y_k$$

### 9.5.3 Modos inestables y no controlables

Modelos con la propiedad de que los polinomios  $A(z)$  y  $B(z)$  tienen un factor común que no es un factor de  $C(z)$  son en la práctica importantes. Estos modelos aparecen cuando hay modos que son excitados por las perturbaciones y que no son controlables desde la entrada. Puesto que estos modos no son controlables no se ven influenciados por la realimentación.

La descripción del control LQG realizada en las secciones anteriores considera el caso de los factores comunes estables. Los factores comunes inestables son importantes en la práctica porque posibilitan el obtener reguladores que posean acción integral. En esta sección se extiende la descripción del control LQG para el caso de que los polinomios del modelo posean factores comunes inestables.

Considérese el siguiente sistema:

$$A(q) \cdot y_k = B(q) \cdot u_k + C(q) \cdot e_k \quad (9.37)$$

con  $\deg(A) = \deg(C) = n$ .

Se consideran las siguientes suposiciones:

- 1) Todas las raíces del polinomio  $C(z)$  se encuentran dentro del círculo unidad.
- 2) No existe un polinomio que divida a  $A(z)$ ,  $B(z)$  y  $C(z)$ .
- 3) Sea  $A_2(z)$  el mayor común divisor de  $A(z)$  y  $B(z)$ . Sea  $A_2^-(z)$  con  $\deg(A_2^-) = m$  el factor de  $A_2(z)$  que posee todas sus raíces fuera del círculo unidad o sobre él. Asimismo  $A_2^+(z)$  con  $\deg(A_2^+) = n - m$  es el factor de  $A_2(z)$  que posee todas sus raíces dentro del círculo unidad.
- 4) Para este tipo de problemas el criterio de control o función de coste (9.4) a minimizar debe ser modificado de la siguiente forma:

$$J'_{lq} = E[y_k^2 + \rho \cdot w_k^2] \quad (9.38)$$

donde:

$$w_k = q^{-m} \cdot A_2^-(q) \cdot u_k \quad (9.39)$$

La ley de control admisible que minimiza (9.38) está dada por

$$u_k = -\frac{S(q)}{R(q)} \cdot y_k \quad (9.40)$$

donde

$$\begin{aligned} R(z) &= A_2^-(z) \cdot \tilde{R}(z) \\ S(z) &= z^m \cdot \tilde{S}(z) \end{aligned} \quad (9.41)$$

con  $\deg(R) = \deg(S) = n+m$ .

Los polinomios  $\tilde{R}(z)$  y  $\tilde{S}(z)$  satisfacen el siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A_1(z) \cdot A_2^-(z) \cdot \tilde{R}(z) + z^m \cdot B_1(z) \cdot \tilde{S}(z) &= P_1(z) \cdot C(z) \\ A^*(z) \cdot X(z) + r \cdot P(z) \cdot \tilde{S}^*(z) &= q^m \cdot \tilde{B}(z) \cdot C^*(z) \end{aligned} \quad (9.42)$$

con  $\deg(\tilde{R}) = \deg(\tilde{S}) = n$ ,  $\deg(X) < n$  y  $\tilde{S}(0) = 0$ . Además

$$\begin{aligned} A(z) &= A_1(z) \cdot A_2(z) \\ B(z) &= B_1(z) \cdot B_2(z) \\ \tilde{B}(z) &= B_1(z) \cdot A_2^+(z) \end{aligned}$$

y  $P_1(z)$  con  $\deg(P_1) = \deg(A_1) + \deg(A_2^-)$  es la solución de la siguiente ecuación

$$r \cdot P_1(z) \cdot P_1(z^{-1}) = \rho \cdot A_1(z) \cdot A_2^-(z) \cdot A_1(z^{-1}) \cdot A_2^-(z^{-1}) + B_1(z) \cdot B_1(z^{-1}) \quad (9.43)$$

◆ **Ejemplo 9.10:**

Sea el sistema descrito por:

$$y_k = \frac{B_1(q)}{A_1(q)} u_k + \frac{C_1(q)}{q-1} e_k$$

Este sistema es un caso especial de las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{B_1(q)}{A_1(q)} u_k \\ y_k &= x_k + v_k \end{aligned}$$

con una perturbación de desplazamiento

$$v_k = \frac{C_1(q)}{q-1} \cdot e_k$$

El sistema puede expresarse de la siguiente forma

$$(q-1) \cdot A_1(q) \cdot y_k = (q-1) \cdot B_1(q) \cdot u_k + A_1(q) \cdot C_1(q) \cdot e_k$$

Luego

$$A(q) = (q-1) \cdot A_1(q)$$

$$B(q) = (q-1) \cdot B_1(q)$$

$$A(q) = A_1(q) \cdot C_1(q)$$

El criterio de control (9.38) toma la forma

$$J'_{lq} = E[y_k^2 + \rho \cdot (u_k - u_{k-1})^2]$$

Es decir, se penaliza en la función de coste a  $u_k - u_{k-1}$  luego la ley de control que minimice esta ley de control incluirá acción integral.

◆

### 9.5.4 Obtención de un control LQG mediante la combinación de un filtro de Kalman y un control óptimo

En las secciones anteriores se ha obtenido el control LQG mediante la resolución de ecuaciones polinomiales. En esta sección se obtendrá el control LQG partiendo de las ecuaciones de estado del sistema y usando de forma combinada el filtro de Kalman (estudiado en el Tema 4) y el control óptimo (estudiado en el Tema 7).

Supóngase que se tiene un sistema descrito por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi \cdot x_k + \Gamma \cdot u_k + v_k \\ y_k &= C \cdot x_k + e_k \end{aligned} \tag{9.44}$$

Se desea encontrar el controlador óptimo para este sistema donde las covarianzas de entre  $\{v_k\}$  y  $\{e_k\}$  están dadas por (4.2) y (4.3).

Se desea encontrar la ley de control que minimiza la siguiente función de coste cuadrática

$$J = E \left[ \frac{1}{2} \cdot x_N^T \cdot S \cdot x_N + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T \cdot Q \cdot x_k + x_k^T \cdot R \cdot x_k) \right] \quad (9.45)$$

Esta función de coste es igual a la ecuación (7.12), con la diferencia de que como ahora los estados son procesos estocásticos, se debe considerar el valor medio de la función. Por eso aparece el operador valor medio  $E[ ]$

Se supone además que los controles admisibles son tales que  $u_k$  es una función de los valores anteriores de la señal de medida, es decir,  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ . Esto significa que hay un retardo de cálculo de un periodo de muestreo.

La solución a este problema es la obtenida en el Tema 7 y esta dada por las ecuaciones del Cuadro 7.3 y por el algoritmo del Cuadro 7.2, con el cambio de notación de  $F$  por  $\Phi$  para la matriz de transición de estados y de  $G$  por  $\Gamma$  para la matriz de transmisión del control. Además la ley de control toma la forma:

$$u_k = -K_k \cdot \hat{x}(k | k-1) \quad (9.46)$$

Nótese que como ahora el estado no se conoce la ley de control del sistema trabaja con una estima del estado  $\hat{x}(k | k-1)$ , la cual se obtiene de la ecuación (4.14) del Filtro de Kalman.

En consecuencia se observa que para resolver este problema de control estocástico se deben realizar en paralelo los siguientes cálculos que se resuelven por separado:

- Cálculo del controlador óptimo determinista (sin presencia de ruido en el modelo).
- Cálculo del estimador óptimo del estado por el filtro de Kalman.
- Cálculo de la ley de control (9.46) utilizando la ganancia  $K_k$  obtenida por el controlador óptimo y el estado estimado  $\hat{x}(k | k-1)$  por el filtro de Kalman

En la Figura 9.4 se muestra un diagrama de bloques del sistema para la implementación del control LQG.

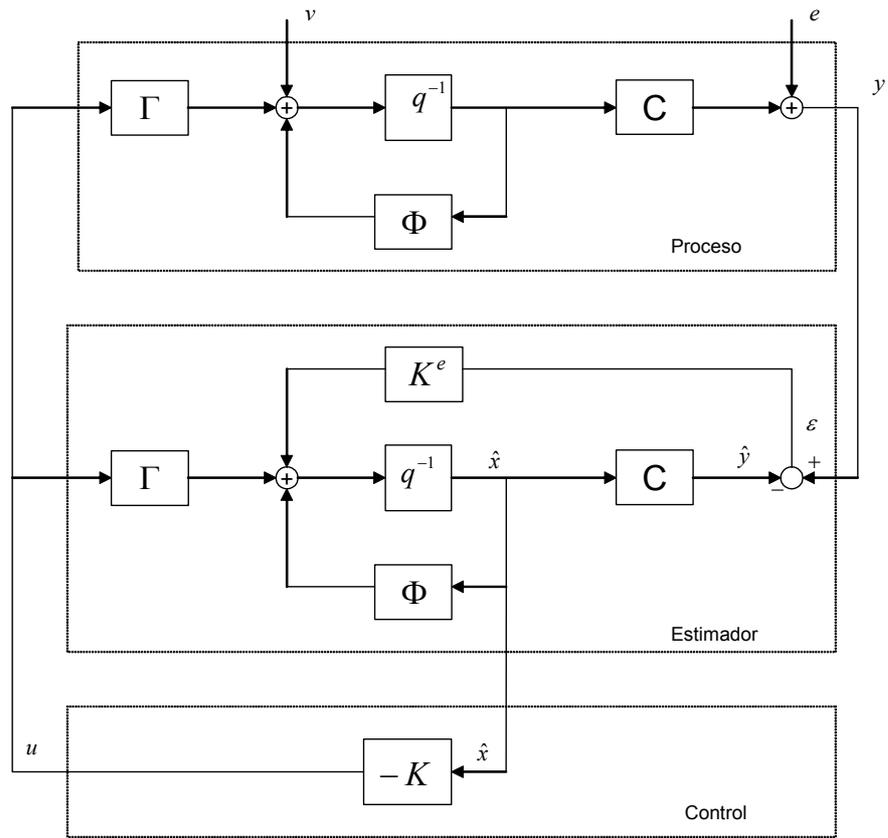


Figura 9.4: Estructura considerada para la implementación del control LQG.

# TEMA 10

## CONTROL ROBUSTO QFT

### 10.1 INTRODUCCION

Uno de los problemas fundamentales en el diseño de un sistema de control es el de controlar de forma precisa las salidas de un proceso (planta) cuya dinámica contiene incertidumbres que son significativas.

Desde la época de la patente de H.S. Black en 1927 que fue quién propuso por primera vez el uso de la realimentación y de elevadas ganancias del sistema en lazo abierto para la solución de diseños precisos en presencia de incertidumbres mucho se ha escrito sobre el tema. No obstante el término de *control robusto* no aparece en la literatura de control sino hasta hace relativamente poco, a comienzos de la década de los 70. Anteriormente el problema se conocía como el *problema del diseño de sensibilidad* o simplemente como *diseño de sistemas de control con incertidumbre en la planta*.

El adjetivo *robusto*, con un significado técnico análogo, había sido utilizado previamente en estadística. La teoría que se desarrolló alrededor del término *control robusto* a partir de 1972 se centró básicamente sobre análisis y síntesis de sistemas multivariables (MIMO) robustos. Por el contrario anteriormente el mayor esfuerzo se había concentrado en sistemas de una entrada-una salida (SISO).

Se entiende por *control robusto* a la teoría de control que estudia los sistemas considerando la existencia de incertidumbres, estableciendo modelos explícitos de las perturbaciones para su tratamiento. Existen diferentes métodos de control robusto:

- *Control robusto  $H_\infty$*  propuesto inicialmente por Zames y Francis a comienzos de los años 80.

- *Método  $\mu$* , es un procedimiento de análisis y síntesis de sistemas de control robusto que se basa en el concepto de *valor singular estructurado* introducido por Doyle en 1982.
- *Métodos de control robusto basados en la Teoría de Kharitonov*, que también han comenzado a recibir una considerable atención a partir de mediados de los 80. Es una elegante teoría algebraica que se puede ver como una extensión de los criterios de Routh-Hurwitz.
- *Teoría de realimentación cuantitativa* o QFT<sup>1</sup> propuesta por I. Horowitz en 1963.

Estas técnicas, al incorporar en el proceso de diseño un modelo de la incertidumbre, intentan garantizar el buen funcionamiento del sistema de control, no sólo para pequeñas desviaciones del proceso de su valor nominal, sino para desviaciones potencialmente grandes, siempre que estén incluidas en el modelo de incertidumbre considerado.

De las técnicas de control robusto anteriormente enumeradas, la más sencilla e intuitiva es la metodología QFT. Este tema se dedica a describir los fundamentos básicos de esta metodología.

## 10.2 CARACTERISTICAS BASICAS DE LA METODOLOGIA QFT

La metodología QFT es una técnica de diseño en el dominio de la frecuencia que permite obtener sistemas de control que aseguren unas prestaciones mínimas, cuantitativamente formuladas, considerando la presencia de perturbaciones y de incertidumbres en la planta.

QFT se caracteriza por ser una técnica de diseño bastante versátil, pudiendo utilizarse sobre sistemas lineales y no lineales, invariantes y variables en el tiempo, continuos y discretos, SISO y MIMO. También se ha utilizado QFT para sistemas con retardo y sistemas de fase no mínima.

La metodología QFT se ha aplicado con éxito para resolver diferentes problemas de control en distintos campos: ingeniería aeronáutica, ingeniería naval, robótica, procesos industriales, etc.

---

<sup>1</sup> QFT es el acrónimo de Quantitative Feedback Theory

Con la teoría QFT I. Horowitz daba respuesta a las dos carencias, que a su juicio, adolecen los diseños clásicos. En primer lugar, la ausencia continua de especificaciones cuantitativas en los problemas planteados en la literatura científica. Por ejemplo, cierto diseño puede atenuar las perturbaciones a costa de una mayor sensibilidad al ruido del sensor, ¿Es éste un buen diseño? ¿Cómo comparar diseños si no se especifican cuestiones tales como nivel de incertidumbre, presencia o no de ruido del sensor, características requeridas en lazo cerrado o perturbaciones esperadas? En segundo lugar, muchas nuevas aportaciones en el campo de la Automática se presentan sin considerar los problemas planteados por las perturbaciones y por la incertidumbre de la planta a controlar, olvidan estos trabajos que la realimentación es necesaria debido a las incertidumbres en la planta y a las perturbaciones que la afectan. De esta forma, el objetivo final del diseño de todo controlador debe ser obtener una función de transferencia en lazo abierto con un ancho de banda adecuado para insensibilizar a la planta y atenuar las perturbaciones.

Las principales ventajas de la metodología QFT son:

- QFT generaliza los conceptos del diseño clásico de controladores en el dominio de la frecuencia.
- El resultado de su aplicación es un controlador robusto que es insensible a las variaciones de la planta.
- Las limitaciones del diseño se ponen de manifiesto desde el comienzo del diseño.
- Requiere de un menor tiempo de desarrollo en comparación con otras técnicas de control robusto.
- La cantidad de realimentación que requiere está adaptada a la cantidad de incertidumbre de la planta y de las perturbaciones, y a las especificaciones de comportamiento.
- Los compromisos entre las especificaciones de estabilidad y comportamiento a una cierta frecuencia son transparentes para el diseñador. Así es posible durante la realización del diseño determinar si una determinada especificación puede ser alcanzada.
- Si se cambian las especificaciones, el controlador puede ser rediseñado rápidamente.

### 10.3 DESCRIPCION DE LAS ETAPAS DE LA METODOLOGIA QFT

La metodología QFT puede esquematizarse en los siguientes pasos:

- 1) *Establecimiento de las especificaciones*. Como punto de partida, es necesario establecer cuál es el comportamiento deseado del sistema en lazo cerrado. Este comportamiento puede ser establecido atendiendo a uno o más de los siguientes criterios: Seguimiento robusto de la referencia, estabilidad robusta, eliminación robusta de perturbaciones a la entrada, eliminación robusta de perturbaciones a la salida, eliminación robusta del ruido del sensor de medida de la salida y minimización del esfuerzo de control. En todos los casos las especificaciones se establecen en el dominio de la frecuencia  $\omega$ , normalmente, en forma de variaciones permitidas de la función de transferencia correspondiente en cada caso.
- 2) *Selección de un conjunto finito de frecuencias*. La planta trabajará en un determinado rango de frecuencias  $\Omega_c$ . Para la realización del diseño mediante la metodología QFT es seleccionar un conjunto finito de frecuencias  $\Omega \subset \Omega_c$ .
- 3) Obtención de las *plantillas (templates)* del proceso para cada frecuencia  $\omega_i \in \Omega$ . Una plantilla es la representación gráfica de la incertidumbre de una planta para una cierta frecuencia, dibujada como una región sobre el plano de Nichols. Recuérdese que éste representa en su eje de abscisas la fase en grados y en su eje de ordenadas la magnitud en decibelios.
- 4) Obtención de las *curvas de restricción (bounds)* para cada frecuencia  $\omega_i \in \Omega$ . Se trata de traducir las especificaciones (normalmente expresadas en el dominio del tiempo) que debe verificar el sistema en lazo cerrado en curvas sobre el plano de Nichols. Estas curvas de restricción delimitan regiones prohibidas para las plantillas con el objetivo de cumplir las especificaciones. Para cada frecuencia existen, por tanto, curvas de restricción de tantos tipos como distintos tipos de especificación se hayan establecido.
- 5) *Ajuste de función de transferencia en lazo abierto (loop-shaping)*. Es esta una etapa de síntesis del controlador  $C$  consistente en ajustar la función de transferencia en lazo abierto en el plano de Nichols para que las plantillas respeten las curvas de restricción.

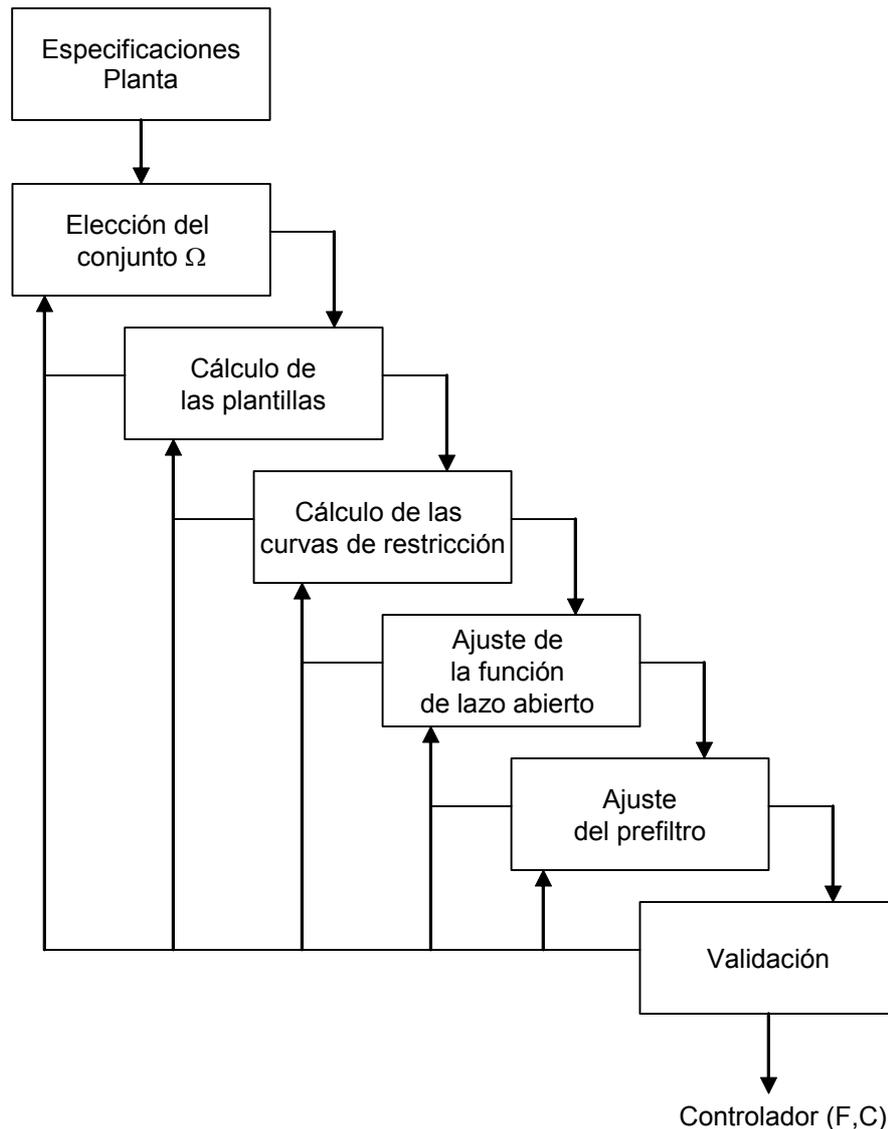


Figura 10.1: Pasos de la metodología QFT

- 6) *Obtención de un prefiltro*. Si el sistema tiene que verificar la especificación de seguimiento robusto, una vez obtenido el controlador, se dispone de una estructura de control que garantiza las variaciones de la función de transferencia en lazo cerrado para el conjunto de frecuencias considerado  $\Omega$ . Es necesario obtener un prefiltro  $F$  para conseguir que esas variaciones se produzcan en el interior de la tolerancia definida por la especificación de seguimiento robusto.
- 7) *Validación del diseño*. Debido a las simplificaciones y/o aproximaciones introducidas a lo largo de cada uno de los pasos del proceso de diseño, es preciso realizar una validación a posteriori del resultado final obtenido. Esta validación consiste en la

verificación de las especificaciones en el dominio de la frecuencia mediante observación directa de los resultados. También puede ser interesante en este punto comprobar los resultados del diseño en el dominio del tiempo mediante simulación del lazo de control final obtenido. A este respecto es importante destacar que la validación propiamente dicha se realiza únicamente en el dominio de la frecuencia, ya que en ningún momento del proceso de diseño se hace uso de especificación alguna en el dominio del tiempo.

La realización de estos pasos no sigue una estructura lineal, puede suceder que tras cualquiera de los pasos sea preciso volver a algún paso anterior en función de los resultados obtenidos. En la Figura 10.1 se muestra un posible esquema de los pasos de la metodología QFT.

Existen varias herramientas software para el diseño con QFT de controladores robustos, siendo la más popular y conocida la “toolbox” para QFT de Matlab. Esta “toolbox” proporciona fundamentalmente herramientas para el cálculo de las curvas de restricción y para el ajuste de la función de transferencia en lazo abierto.

Recientemente ha aparecido una nueva herramienta software QFTIT (<http://ctb.dia.uned.es/asig/qftit/>). Las ventajas que aporta QFTIT con respecto a las otras herramientas software existentes para diseño QFT es su mayor facilidad de uso e interactividad. El usuario se limita a operar con el ratón sobre los diferentes elementos presentes en la ventana de la aplicación. Todas las acciones que se realizan se ven reflejadas inmediatamente en todas las gráficas presentes en pantalla. De esta forma el usuario percibe visualmente los efectos que producen sus acciones durante el desarrollo completo del diseño.

En las siguientes subsecciones se presenta una introducción a la metodología QFT, mediante su aplicación al diseño de un controlador robusto en un sistema SISO con dos grados de libertad.

### 10.3.1 Establecimiento de las especificaciones

Se considera el sistema realimentado de dos grados de libertad de la Figura 10.2.  $F(s)$  es la función de transferencia de un prefiltro sobre la entrada de referencia  $r$ .  $C(s)$  es el compensador que genera en función de una señal de error  $e$ , una señal de control  $u$  sobre la familia de funciones de transferencia  $\mathcal{P}$ , que describe la región de incertidumbre de los parámetros de la planta.  $\mathcal{P}$  puede estar sometida tanto a perturbaciones en su entrada  $v$

como a perturbaciones en su salida  $d$ .  $H$  es el sensor de medida de la señal de salida  $y$ , que puede estar afectada por un ruido de medida  $n$ .

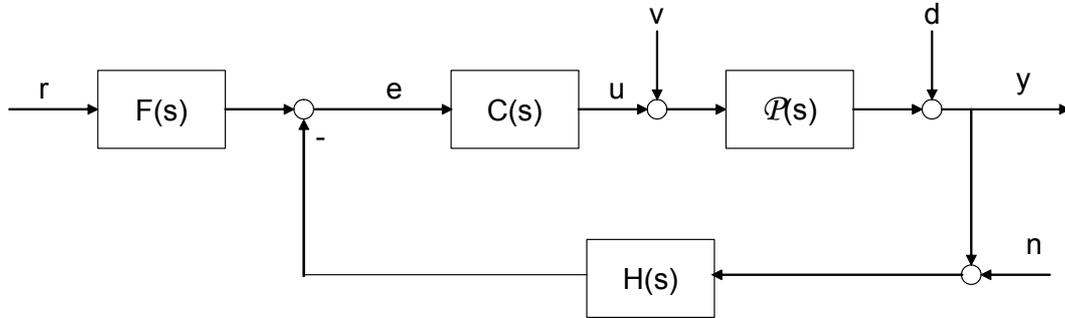


Figura 10.2: Sistema realimentado de dos grados de libertad

La familia de plantas  $\mathcal{P}$  puede presentar incertidumbre paramétrica o no paramétrica. Se va suponer por sencillez que la familia de plantas  $\mathcal{P}$  presenta incertidumbre de tipo paramétrico:

$$\mathcal{P} = \{P(s, \theta), \theta \in \Theta\} \quad (10.1)$$

Donde  $\theta$  es el vector de parámetros inciertos y  $\Theta$  es el espacio de posibles valores de  $\theta$ . De entre las infinitas plantas  $P(s, \theta) \in \mathcal{P}$ , se selecciona una de ellas como planta nominal  $P_0(s, \theta_0)$ .

Se define la *función de transferencia en lazo abierto nominal*  $L_0(j\omega)$  como:

$$L_0(j\omega) = C(j\omega) \cdot P_0(j\omega) \quad (10.2)$$

Se define la *función de transferencia en lazo cerrado nominal*  $T_0(j\omega)$  como<sup>2</sup>:

$$T_0(j\omega) = F(j\omega) \cdot \frac{C(j\omega) \cdot P_0(j\omega)}{1 + C(j\omega) \cdot P_0(j\omega)} \quad (10.3)$$

O equivalentemente

<sup>2</sup> De ahora en adelante, sin pérdida de generalidad, se supone que  $H=1$ .

$$T_0(j\omega) = F(j\omega) \cdot T_l(j\omega) \quad (10.4)$$

donde

$$T_l(j\omega) = \frac{C(j\omega) \cdot P_0(j\omega)}{1 + C(j\omega) \cdot P_0(j\omega)} \quad (10.5)$$

El problema que se plantea es diseñar un controlador  $C(s)$  y un prefiltro  $F(s)$  tal que la salida evolucione según la referencia  $r(s)$  verificando unas especificaciones mínimas a pesar de la presencia de perturbaciones y de incertidumbre en la planta.

El controlador  $C(s)$  se diseña para que el efecto de las perturbaciones y de la incertidumbre sobre  $y(s)$  se encuentre dentro de una cierta tolerancia, mientras que  $F(s)$  se diseña para asegurar el seguimiento de la referencia.

La existencia de un controlador solución es función de las especificaciones que se impongan, ya que algunas de ellas pueden ser mutuamente contradictorias y si se exigen conjuntamente pueden convertir el problema en irresoluble.

### 10.3.1.1 Especificación de estabilidad robusta

La especificación de estabilidad robusta, se sintetiza mediante la expresión:

$$\left| \frac{C(j\omega) \cdot P(j\omega)}{1 + C(j\omega) \cdot P(j\omega)} \right| \leq W_{er}, \omega \in [0, \infty), P \in \mathcal{P} \quad (10.6)$$

Se demuestra que para sistemas SISO el valor  $W_{er}$  se relaciona con el margen de ganancia  $MG$  y con el margen de fase  $MF$ , a través de las siguientes expresiones:

$$MG = 1 + \frac{1}{W_{er}} \quad (10.7)$$

$$MF = 180^\circ - \frac{180^\circ}{\pi} \arccos\left(\frac{0.5}{W_{er}^2} - 1\right) \quad (10.8)$$

Entonces, conocido el valor del  $MG$  y/o del  $MF$  es posible obtener el correspondiente valor de  $W_{er}$ , simplemente despejando de las ecuaciones (10.7) o (10.8)

$$W_{er} = \sqrt{\frac{0.5}{\cos\left(\pi \cdot \left(1 - \frac{MF}{180^\circ}\right)\right) + 1}} \quad (10.9)$$

$$W_{er} = \frac{1}{MG - 1} \quad (10.10)$$

Esta especificación para cada frecuencia  $\omega_i \in \Omega$ , establece en el plano de Nichols una curva cerrada que  $L_0(j\omega_i)$  no debe atravesar (denominado comúnmente círculo-M). Así, estas curvas definen una zona de protección en torno al punto del plano de Nichols  $[-180^\circ, 0_{dB}]$  que debe ser respetada para evitar que el sistema controlado sea inestable, es decir,  $L_0$  no debe entrar dentro de la región de inestabilidad del plano de Nichols (fases menores de  $-180^\circ$  y magnitudes mayores de 0 dB).

Además, esta zona de protección define unos márgenes mínimos de estabilidad relativa para  $L_0$ . Recuérdese que el punto en que  $L_0$  corta al eje de ordenadas del plano de Nichols es justamente el margen de ganancia  $MG$  en decibelios. Mientras que el punto en que  $L_0$  corta al eje de abscisas del plano de Nichols es justamente el margen de fase  $MF$  en grados.

### 10.3.1.2 Especificación de seguimiento robusto

La especificación de seguimiento robusto de la referencia se expresa en términos de la función de transferencia en lazo cerrado:

$$|\alpha(j\omega)| \leq |T(j\omega)|_{dB} \leq |\beta(j\omega)|, \omega \in \Omega, P \in \mathcal{P} \quad (10.11)$$

En esta especificación se establecen ciertas tolerancias en la magnitud de la respuesta en frecuencia de  $T(s)$  en forma de cotas superior  $\beta(s)$  e inferior  $\alpha(s)$ . Por lo tanto, el problema de seguimiento robusto se resumiría en encontrar los compensadores  $F(s)$  y  $C(s)$  tales que satisfagan la ecuación (10.11) para cualquier planta  $P \in \mathcal{P}$ . Hay que realizar por lo tanto dos pasos: primero ajustar el controlador  $C(s)$  de forma que se respeten las variaciones de  $|T(j\omega)|_{dB}$ , segundo ajustar el prefiltro  $F(s)$  para llevar estas variaciones a sus lugares correctos (la zona establecida por las funciones  $\alpha(\omega)$  y  $\beta(\omega)$ ).

◆ **Ejemplo 10.1:**

Considérese la siguiente familia de plantas  $\mathcal{P}$  con incertidumbres de tipo paramétrico en sus coeficientes:

$$\mathcal{P} = \left\{ P(s) = \frac{K}{s(s+a)}, K \in [1,10], a \in [1,10] \right\} \quad (\text{e1})$$

La planta nominal  $P_0(s) \in \mathcal{P}$  es

$$P_0(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (\text{e2})$$

El sistema controlado debe cumplir las siguientes especificaciones:

- *Estabilidad robusta:* Se desea un margen de fase  $MF \geq 50^\circ$ . Sustituyendo en la ecuación (10.9) se obtiene que  $W_{er}=1.2$  en la especificación de estabilidad robusta (10.6).
- *Seguimiento robusto de una referencia.* Se desea que la respuesta temporal se encuentre entre una respuesta subamortiguada (con un máximo sobrepico de 1.2 y un tiempo de asentamiento inferior a 2 segundos) y una respuesta sobreamortiguada (con tiempo de asentamiento inferior a 2 segundos). Esta especificación temporal es equivalente en el dominio de la frecuencia a la especificación (10.11) tomando

$$\alpha(s) = \frac{120}{(s+3)(s+4)(s+10)} \quad \beta(s) = \frac{0.7 \cdot (s+30)}{s^2 + 2 \cdot 0.45 \cdot 4.44s + (4.44)^2} \quad (\text{e3})$$

Debe quedar claro que esta elección de  $\alpha(s)$  y  $\beta(s)$  no es única.

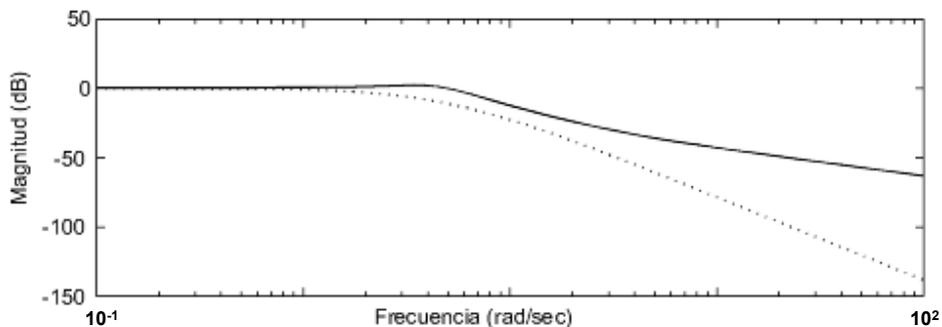


Figura 10.3: Especificación de seguimiento robusto, frontera superior  $|\beta(s)|$  y frontera inferior  $|\alpha(s)|$  (línea discontinua).

En la Figura 10.3 se representan la magnitud de  $\alpha(s)$  y  $\beta(s)$ , que definen la especificación de seguimiento robusto, el diseño de  $C(s)$  y de  $F(s)$  debe realizarse para conseguir que  $|T(j\omega)|_{dB}$  se encuentre comprendida entre ambas curvas en el conjunto de frecuencias  $\Omega$ .

♦

### 10.3.1.3 Otras especificaciones de interés

Otras especificaciones de interés son:

- *Especificación de rechazo de perturbaciones a la entrada de la planta*

$$\left| \frac{P(j\omega)}{1 + C(j\omega) \cdot P(j\omega)} \right| \leq W_{pe}, \omega \in \Omega, P \in \mathcal{P} \quad (10.12)$$

- *Especificación de rechazo de perturbaciones a la salida de la planta*

$$\left| \frac{1}{1 + C(j\omega) \cdot P(j\omega)} \right| \leq W_{ps}(j\omega), \omega \in \Omega, P \in \mathcal{P} \quad (10.13)$$

- *Eliminación robusta del ruido del sensor*

$$\left| \frac{C(j\omega) \cdot P(j\omega)}{1 + C(j\omega) \cdot P(j\omega)} \right| \leq W_{rs}(j\omega), \omega \in \Omega, P \in \mathcal{P} \quad (10.14)$$

- *Minimización del esfuerzo de control*

$$\left| \frac{C(j\omega)}{1 + C(j\omega) \cdot P(j\omega)} \right| \leq W_{ec}(j\omega), \omega \in \Omega, P \in \mathcal{P} \quad (10.15)$$

## 10.3.2 Generación de las plantillas

Las *plantillas (templates)* son regiones del plano de Nichols que representan la incertidumbre de la familia de plantas  $\mathcal{P}$  para cada frecuencia  $\omega \in \Omega$ . Formalmente es posible definir la plantilla de la planta  $P$  a la frecuencia  $\omega$  mediante la siguiente expresión:

$$\mathcal{T}(\omega) = \left\{ \left( \arg[P(j\omega)], |P(j\omega)|_{dB} \right) \mid P \in \mathcal{P} \right\} \quad (10.16)$$

Se denotará por  $\delta\mathcal{I}(\omega)$  al conjunto de puntos de la plantilla que forman parte de su borde exterior o *contorno*.

Los puntos del contorno  $\delta\mathcal{I}(\omega)$  son los puntos verdaderamente importantes de la plantilla ya que son los únicos que se utilizan para calcular las curvas de restricción asociadas a las especificaciones. Los puntos interiores no sirven para nada y suponen un innecesario aumento de la carga computacional. Por lo tanto, si es posible, dada una plantilla  $\mathcal{I}(\omega)$  se debe tratar de obtener los puntos de su contorno  $\delta\mathcal{I}(\omega)$ .

Existen distintos algoritmos en función de la morfología de la planta y su incertidumbre para estimar una buena aproximación de las plantillas  $\mathcal{I}(\omega)$ . Se trata de métodos que funcionan para casos particulares, en los cuales la incertidumbre se encuentra descrita de una determinada manera. Algunos de los más importantes son:

- Algoritmo de Gutman, Baril y Neumann.
- Algoritmo de Bailey y Hui
- Algoritmo de Fu
- Algoritmo de los segmentos de Kharitonov.

El algoritmo de Gutman, Baril y Neumann es muy rápido y genera directamente el contorno de la plantilla. Puede utilizarse si la planta está factorizada de la siguiente forma:

$$P(s) = \frac{K \cdot e^{-\tau s} \cdot \prod_{i=1}^m (s + z_i) \cdot \prod_{j=1}^a (s^2 + 2 \cdot \delta_j \cdot \omega_{0j} + \omega_{0j}^2)}{s^N \cdot \prod_{l=1}^n (s + p_l) \cdot \prod_{q=1}^b (s^2 + 2 \cdot \delta_q \cdot \omega_{0q} + \omega_{0q}^2)} \quad (10.17)$$

Donde  $K$ ,  $\tau$ ,  $z_i$ ,  $\delta_j$ ,  $\omega_{0j}$ ,  $p_l$ ,  $\delta_q$ ,  $\omega_{0q}$  son parámetros independientes entre si que pueden presentar la siguiente incertidumbre en su valor:

$$K \in [K_{\min}, K_{\max}] \subset \mathbb{R}^- \circ \mathbb{R}^+ \quad (10.18)$$

$$\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}] \subset \mathbb{R}^+ \quad (10.19)$$

$$z_i \in [z_{i\min}, z_{i\max}] \subset \mathfrak{R} \quad i = 1, \dots, m \quad (10.20)$$

$$p_l \in [p_{l\min}, p_{l\max}] \subset \mathfrak{R} \quad l = 1, \dots, n \quad (10.21)$$

$$\delta_j \in [\delta_{j\min}, \delta_{j\max}] \subset \mathfrak{R}^- \circ \mathfrak{R}^+ \quad j = 1, \dots, a \quad (10.22)$$

$$\omega_{0j} \in [\omega_{0j\min}, \omega_{0j\max}] \subset \mathfrak{R}^+ \quad j = 1, \dots, a \quad (10.23)$$

$$\delta_q \in [\delta_{q\min}, \delta_{q\max}] \subset \mathfrak{R}^- \circ \mathfrak{R}^+ \quad q = 1, \dots, b \quad (10.24)$$

$$\omega_q \in [\omega_{q\min}, \omega_{q\max}] \subset \mathfrak{R}^+ \quad q = 1, \dots, b \quad (10.25)$$

Por otra parte, los otros tres algoritmos (Bailey & Hui, Fu, segmentos de Kharitonov) pueden utilizarse si la planta posee la siguiente estructura:

$$P(s, \vec{q}, \vec{r}) = \frac{b_m(\vec{q}) \cdot s^m + b_{m-1}(\vec{q}) \cdot s^{m-1} + \dots + b_0(\vec{q})}{a_n(\vec{r}) \cdot s^n + a_{n-1}(\vec{r}) \cdot s^{n-1} + \dots + a_0(\vec{r})} \quad (10.26)$$

donde los coeficientes  $b$  del numerador y  $a$  del denominador son a su vez un polinomio afín de los vectores de parámetros inciertos  $\vec{q}$  y  $\vec{r}$  (cuyas dimensiones son  $pn$  y  $pd$  respectivamente), es decir

$$b_i(\vec{q}) = n_{0i} + \sum_{j=1}^{pn} [MN]_{ij} \cdot q_j \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (10.27)$$

$$a_i(\vec{r}) = d_{0i} + \sum_{j=1}^{pd} [MD]_{ij} \cdot r_j \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (10.28)$$

O equivalentemente en forma matricial:

$$\vec{b} = MN \cdot \vec{q} + \vec{n}_0 \quad (10.29)$$

$$\vec{a} = MD \cdot \vec{r} + \vec{d}_0 \quad (10.30)$$

En las expresiones anteriores:

- MN y MD son unas matrices que definen la contribución de cada parámetro incierto a la incertidumbre de los coeficientes del numerador y del denominador, respectivamente.
- $\vec{n}_0$  y  $\vec{d}_0$ , son unos vectores de términos independientes asociados al numerador y del denominador, respectivamente.

El algoritmo de Bailey y Hui es bastante rápido y genera directamente el contorno de la plantilla. Este contorno es bastante exacto si los parámetros inciertos del numerador y del denominador son independientes entre si, es decir, un mismo parámetro incierto no puede encontrarse simultáneamente en el numerador y en el denominador. Si los parámetros son dependientes da una aproximación del contorno de la plantilla más conservativa.

Por su parte los algoritmos de Fu y Kharitonov no generan de forma directa el contorno de la plantilla, por lo que el cálculo del mismo debe hacerse o bien usando algoritmos adicionales de reconocimiento de contornos o bien seleccionando los puntos del contorno de forma manual. Luego estos algoritmos son más lentos que el algoritmo de Bailey-Hui. Sin embargo, generan una aproximación más exacta de la plantilla cuando existe dependencia entre los parámetros inciertos.

#### ◆ Ejemplo 10.2:

Considérese la siguiente planta con incertidumbre de tipo afin

$$P(s, \vec{q}, \vec{r}) = \frac{(0.1 \cdot q_1 + 2 \cdot q_3 + 1.5) \cdot s + (3 \cdot q_1 + 5 \cdot q_2)}{s^2 + (-5.8 \cdot r_1 - 7) \cdot s + (3 \cdot r_1 + 5 \cdot r_2 + 10)}$$

con  $q_1 \in [1.5, 8.9]$ ,  $q_2 \in [0.25, 4.6]$ ,  $q_3 \in [-3, -1]$ ,  $r_1 \in [10.3, 15.6]$  y  $r_2 \in [-8.0, -3.6]$ .

Se observa que los parámetros inciertos son independientes, puesto que un mismo parámetro incierto no se encuentra simultáneamente en el numerador y el denominador.

Los coeficientes del numerador y del denominador se pueden expresar en la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0.1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5.8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego por comparación con las ecuaciones (10.29) y (10.30) se obtienen las matrices  $MN$  y  $MD$  y los vectores  $n_0$  y  $d_0$ .

$$MN = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0.1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad n_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$MD = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5.8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \quad d_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esta información es fundamental para poder usar los algoritmos de cálculo de plantillas que trabajan con plantas con incertidumbre de tipo afín.

♦

En casos más generales en que la incertidumbre se presenta de forma multilineal o incluso no lineal, no queda más remedio que recurrir a un *algoritmo de barrido en el espacio de parámetros*  $\Theta$ . Este algoritmo va a trabajar con un conjunto finito de  $N$  plantas  $P \in \mathcal{P}$ . La forma de proceder es la siguiente, se fija  $N$  veces un valor para los parámetros  $\theta$  dentro del espacio  $\Theta$ , con lo que se obtienen las  $N$  plantas. Los valores de los parámetros  $\theta$  se deben escoger para barrer con un paso fijo o variable todo el espacio  $\Theta$ , de tal forma que las  $N$  plantas que se utilicen sean una muestra significativa de la familia  $\mathcal{P}$ . Es evidente que cuanto mayor sea  $N$  mejor será la aproximación que se obtiene de las plantillas reales  $\mathcal{I}(\omega)$ .

Este método aunque efectivo supone una gran carga computacional, pues en general para obtener una buena aproximación de las *plantillas* podría ser necesario estudiar un número  $N$  demasiado elevado de plantas  $P \in \mathcal{P}$ . Además este método no genera directamente el contorno de la plantilla.

♦ **Ejemplo 10.3:**

Sea la familia de plantas

$$\mathcal{P} = \left\{ P(s) = \frac{K}{s(s+a)}, K \in [1,10], a \in [1,10] \right\}$$

La planta se puede expresar de la siguiente forma:

$$P(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+a)} = \frac{K}{\omega} \frac{1}{(-\omega+ja)} = -\frac{K}{\omega(\omega^2+a^2)}(\omega+ja)$$

Luego el módulo en dB y la fase en grados vendrán dadas por las siguientes expresiones:

$$|P(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{K}{\omega \sqrt{\omega^2 + a^2}} \right)$$

$$\arg[P(j\omega)] = \frac{180}{\pi} \operatorname{atan} \left( \frac{-a}{-\omega} \right)$$

Para  $\omega=1$  rad/s estas expresiones toman la siguiente forma:

$$|P(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{K}{\sqrt{1+a^2}} \right) \quad (\text{e4})$$

$$\arg[P(j\omega)] = \frac{180}{\pi} \operatorname{atan} \left( \frac{-a}{-1} \right) \quad (\text{e5})$$

Se desea obtener una aproximación para la plantilla  $\mathcal{T}(1)$  usando la técnica del barrido en el espacio de parámetros. Para ello se siguen los siguientes pasos:

- 1) Se selecciona un subconjunto de valores de los parámetros inciertos  $K$  y  $a$ . Por ejemplo:  $a = \{1, 3, 6, 10\}$  y  $K = \{1, 2.5, 6, 10\}$ .
- 2) Se forman todas las posibles combinaciones de valores para los parámetros de la planta. Puesto que el subconjunto de valores de  $a$  y de  $K$  tiene cuatro valores cada uno. El número posible de combinaciones es 16.

3) Finalmente para cada combinación de valores de los parámetros se evalúan las expresiones (e4) y (e5). Se obtienen  $N=16$  puntos (ver Tabla 10.1) para la plantilla  $\mathcal{I}(1)$ .

K	a	arg[P(j1)] (°)	P(j1)  <sub>dB</sub>
1	1	-135	-3.0103
2.5	1	-135	4.9485
6	1	-135	12.553
10	1	-135	16.99
1	3	-108.43	-10
2.5	3	-108.43	-2.0412
6	3	-108.43	5.563
10	3	-108.43	10
1	6	-99.462	-15.682
2.5	6	-99.462	-7.7232
6	6	-99.462	-0.11899
10	6	-99.462	4.318
1	10	-95.711	-20.043
2.5	10	-95.711	-12.084
6	10	-95.711	-4.4802
10	10	-95.711	-0.043214

Tabla 10.1: Puntos calculados para la plantilla  $\mathcal{I}(1)$

Obviamente, existen otras posibles configuraciones de valores de los parámetros  $K$  y  $a$  con los que obtener  $N=16$ . Con la elección que se realice se debe tratar de barrer uniformemente todo el espacio  $\Theta$  de parámetros.

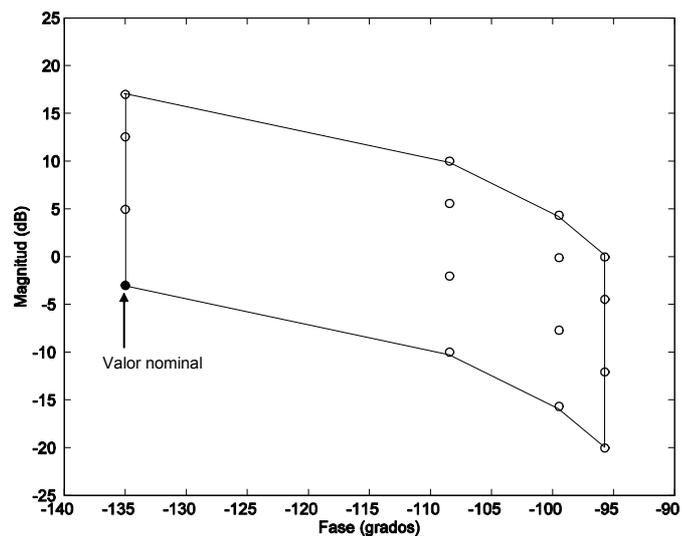


Figura 10.4: Aproximación de la plantilla  $\mathcal{I}(1)$  utilizando el método de barrido en el espacio de parámetros.

En la Figura 10.4 se ha representado los 16 puntos calculados para  $\mathcal{T}(1)$ . También se ha representado el contorno de la plantilla  $\delta\mathcal{T}(1)$ , que es el resultado de unir los 12 puntos exteriores. Además, en la figura se ha resaltado con un punto negro el punto de  $\mathcal{T}(1)$  asociada a la planta nominal ( $a=1, K=1$ ).

♦

Aunque se ha comentado únicamente la incertidumbre de tipo paramétrico, QFT puede manejar también incertidumbre no paramétrica, o una mezcla de ambas. Sin embargo la incertidumbre no paramétrica no se representa mediante plantillas, sino que se tiene en cuenta directamente en el cálculo de las curvas de restricción.

### 10.3.3 Selección del conjunto de frecuencias de trabajo $\Omega$

En la metodología QFT, es necesario seleccionar un conjunto de frecuencias  $\Omega$  donde se van a calcular las plantillas y las curvas de restricción. Una cuestión sin respuesta única, es que frecuencias escoger en el rango comprendido entre cero e infinito. Una regla básica es que para la misma especificación su curva de restricción cambiará si cambia la forma de la plantilla. Por lo tanto, bastaría con considerar aquellas frecuencias donde la forma de la plantilla presente variaciones apreciables en su forma.

En general las plantillas se estrechan a medida que aumenta la frecuencia, de tal forma que para una frecuencia suficientemente grande se aproximan a una línea recta vertical de altura constante  $V$  dB. Este comportamiento se deduce fácilmente observando que la mayoría de sistemas, cuando  $\omega$  tiende a infinito verifican que:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} P(j\omega) = \frac{K}{\omega^e} \quad (10.31)$$

donde  $K$  representa la ganancia a alta frecuencia y  $e$  el exceso de polos sobre ceros.

La expresión (10.31) indica que, a partir de una frecuencia  $\omega_h$  suficientemente grande, las plantillas se aproximan a un segmento de recta vertical de altura  $V$  dB

$$V = 20 \cdot \log_{10} \left| \frac{K_{\max}}{\omega^2} \right| - 20 \cdot \log_{10} \left| \frac{K_{\min}}{\omega^2} \right| = 20 \cdot \log |K_{\max}| - 20 \cdot \log |K_{\min}| \quad (10.32)$$

Normalmente las plantillas se calculan para un número finito de frecuencias de interés  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \in \Omega$  dentro del ancho de banda  $\Omega_c$  de frecuencias en que la planta presenta respuesta. A este conjunto se le suele añadir también  $\omega_h$  con lo que se tendría el conjunto extendido  $\Omega' = \Omega \cup \{\omega_h\}$ . Este conjunto extendido  $\Omega'$  se suele considerar sobre todo en la especificación de estabilidad robusta.

◆ **Ejemplo 10.4:**

Sea la familia de plantas

$$\mathcal{P} = \left\{ P(s) = \frac{K}{s(s+a)}, K \in [1, 10], a \in [1, 10] \right\}$$

El exceso de polos sobre ceros es  $e=2$ , luego

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} P(j\omega) = \frac{K}{\omega^2}$$

Para este sistema se puede comprobar que a partir de  $\omega_h \approx 100$  (rad/s) las plantillas se aproximan a un segmento de recta vertical de altura

$$V = 20 \cdot \log_{10} |K_{\max}| - 20 \cdot \log_{10} |K_{\min}| = 20 \cdot \log_{10} |10| - 20 \cdot \log_{10} |1| = 20 \text{ dB}$$

Supuesto que el rango de frecuencias de la planta es  $\Omega_c = [0.1, 15]$  (rad/s) una posible elección del conjunto de frecuencias de trabajo  $\Omega$  es:

$$\Omega = [0.1, 0.5, 1, 2, 15]$$

Por otra parte, puesto que  $\omega_h = 100$  (rad/s) el conjunto de trabajo extendido sería

$$\Omega' = [0.1, 0.5, 1, 2, 15, 100]$$

◆

Las plantillas para la función de transferencia en lazo abierto  $L(j\omega) = C(j\omega) \cdot P(j\omega)$  son las mismas que las de  $P(j\omega)$  pero desplazadas en magnitud y fase por el controlador  $C(s)$  (puesto que el controlador no presenta incertidumbre). QFT interpreta el diseño del controlador como el proceso de desplazar plantillas sobre el plano de Nichols hacia posiciones deseadas, evitando zonas prohibidas.

### 10.3.4 Cálculo de las curvas de restricción

Las *curvas de restricción* (*bounds*) delimitan las regiones del plano de Nichols que para una frecuencia dada  $\omega_i \in \Omega$  pondrán cota a los posibles valores que la función en lazo abierto  $L_o$  podrá tomar a esa frecuencia (valores de  $L_o(j\omega_i)$ ) con objeto de conseguir el cumplimiento de las especificaciones. Existirán tantas curvas de restricción a la frecuencia  $\omega_i$  como especificaciones se hayan impuesto al diseño, así se distinguen curvas de restricción de seguimiento robusto  $B_{sr}(\omega_i)$ , curvas de restricción de estabilidad  $B_{er}(\omega_i)$ , curvas de restricción de rechazo a perturbaciones en la salida  $B_{ps}(\omega_i)$ , curvas de limitación del esfuerzo de control  $B_{ec}(\omega_i)$ , etc.

Las curvas de restricción para una determinada frecuencia y una determinada especificación se calculan en función de dos cosas, la especificación a esa frecuencia  $\omega_i$  y la incertidumbre de la planta a esa misma frecuencia (representada por el contorno de la plantilla  $\mathcal{I}(\omega_i)$ ). La curva de restricción final  $B(\omega_i)$  se obtendrá mediante la intersección de las curvas de restricción de cada especificación obtenidas a esa misma frecuencia.

Las curvas de restricción de estabilidad robusta  $B_{er}(\omega)$ , delimitan para una frecuencia dada las regiones prohibidas/permitidas del plano de Nichols para el valor de  $L_o(j\omega_i)$ . Estas curvas se calculan siempre en función del punto nominal de la plantilla, correspondiente a la planta elegida como nominal. Su obtención consiste en calcular las regiones del plano de Nichols en la que es posible colocar el punto nominal de la plantilla de modo que ningún punto de ésta caiga dentro del círculo-M que define el límite de estabilidad relativa, dada por la especificación (10.6).

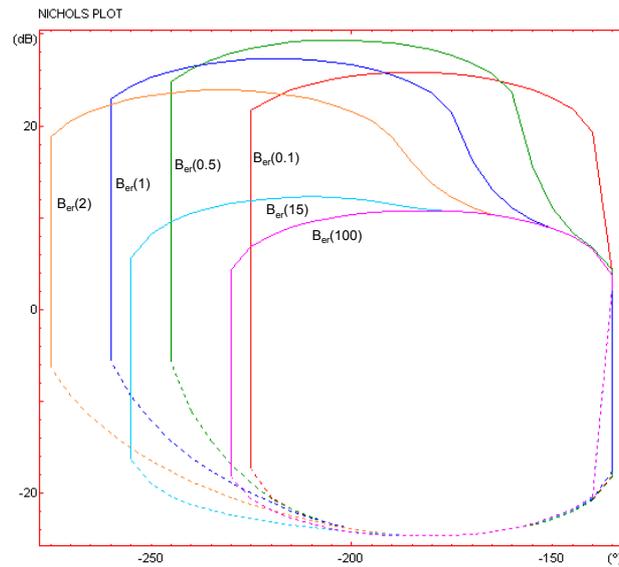
Para obtener las curvas de restricción  $B_{sr}(\omega)$  asociadas a la especificación de seguimiento robusto definida por (10.11) se elige una recta de fase constante en el plano de Nichols. La plantilla  $\mathcal{I}(\omega_i)$  se desplaza a lo largo de esta línea, sin rotar, hasta una posición en que sea tangente a dos de las curvas de valor M constante, tal que la diferencia en los dos valores de M sea  $\Delta|T(j\omega_i)|$ . Esta posición indica un punto límite, ya que no es posible desplazar más abajo la plantilla sin violar la especificación.

El procedimiento de obtención de las curvas de restricción asociadas con otro tipo de especificación es similar al de las curvas de restricción de seguimiento robusto.

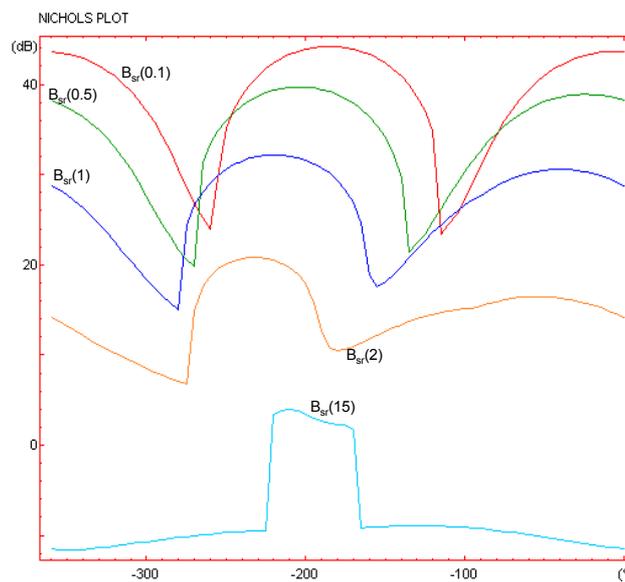
Una vez obtenido para una determinada frecuencia  $\omega_i$ , las curvas de restricción asociadas a cada especificación impuesta, la curva de restricción final  $B(\omega_i)$  se obtendrá

como resultado de la combinación de éstas, uniendo las restricciones que todos ellos imponen. Los métodos de obtención de las diferentes curvas de restricción son fundamentalmente gráficos, aunque también existen algoritmos numéricos.

◆ **Ejemplo 10.5:**



(a)



(b)

*Figura 10.5: Curvas de restricción para la familia de planta (e1) del Ejemplo 10.1. a) Estabilidad robusta a las frecuencias  $\Omega'$ . b) Seguimiento robusto a las frecuencias  $\Omega$ .*

Para la planta de Ejemplo 10.1, las curvas de restricción de estabilidad robusta  $B_{er}(\omega)$  a las frecuencias  $\Omega'=\{0.1,0.5,1,2,15,100\}$  son las que se muestran en la Figura 10.5a. Mientras que las curvas de restricción de seguimiento robusto  $B_{sr}(\omega)$  a las frecuencias  $\Omega=\{0.1,0.5,1,2,15\}$  son las que se muestran en la Figura 10.5b. En la Figura 10.6 se muestran las curvas de restricción finales  $B(\omega_i)$ .

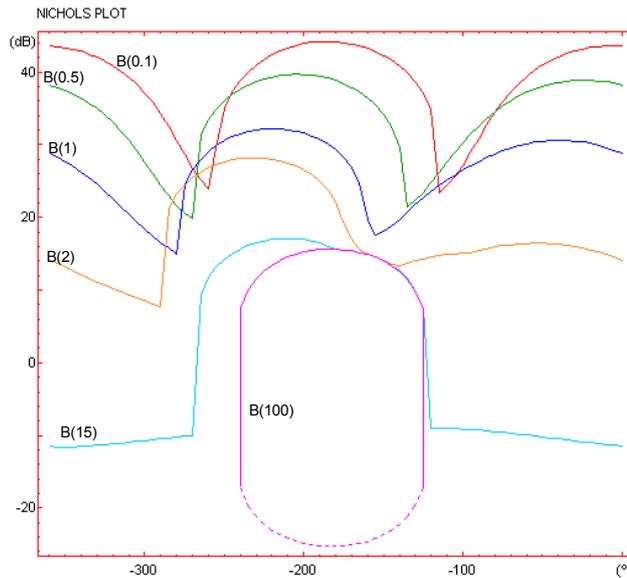


Figura 10.6: Curvas de restricción finales para la familia de planta (e1) del Ejemplo 10.1 a las frecuencias  $\Omega$ .

♦

### 10.3.5 Ajuste de la función de transferencia en lazo abierto

Una vez calculados las curvas de restricción finales  $B(\omega_i)$   $\omega_i \in \Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  el siguiente paso es ajustar la función de transferencia en lazo abierto  $L_0(j\omega)$  a dichas curvas. En el ajuste se deben cumplir las siguientes reglas:

- 1) Si la curva de restricción  $B(\omega_i)$  es cerrada entonces el punto  $L_0(j\omega_i)$  debe situarse fuera de la curva para cumplir las especificaciones a dicha frecuencia
- 2) Si la curva de restricción  $B(\omega_i)$  es abierta y se representa con una línea continua entonces el punto  $L_0(j\omega_i)$  debe situarse por encima de la curva para cumplir las especificaciones a dicha frecuencia

- 3) Si la curva de restricción  $B(\omega_i)$  es abierta y se representa con una línea discontinua entonces el punto  $L_0(j\omega_i)$  debe situarse por debajo de la curva para cumplir las especificaciones a dicha frecuencia.
- 4)  $L_0(j\omega)$  no debe cruzar la zona prohibida del diagrama de Nichols, es decir, la zona de fases menores de  $-180^\circ$  y magnitudes mayores de 0 dB.
- 5)  $L_0(j\omega)$  no debe cruzar nunca las curvas de restricción cerradas

Con respecto a las reglas 1) a 3) se debe de tratar siempre de situar  $L_0(j\omega_i)$  lo más pegado posible de  $B(\omega_i)$  con el objetivo de minimizar el esfuerzo de control y por lo tanto minimizar la saturación de los actuadores.

$L_0$  se desplazará en determinadas direcciones sobre el diagrama de Nichols en función del elemento que se añada al controlador. Se distinguen las siguientes posibilidades

- **Ganancia.** Permite un desplazamiento vertical hacia arriba o hacia abajo.
- **Cero real.** Permite realizar desplazamientos verticales y horizontales hacia la derecha (adelanto de fase).
- **Ceros complejos.** Permite realizar desplazamientos verticales y horizontales hacia la derecha (adelanto de fase).
- **Polo real.** Permite realizar desplazamientos verticales y horizontales hacia la izquierda (retraso de fase).
- **Polos complejos.** Permite realizar desplazamientos verticales y horizontales hacia la izquierda (retraso de fase).

La realización del ajuste de la función de transferencia en lazo abierto es una tarea difícil de realizar de forma automática por un computador. En general las herramientas software existentes requieren de la interacción del usuario para la realización de esta etapa del diseño QFT. En definitiva el ajuste de  $L_0$  es un proceso empírico de prueba y error. Obviamente, la experiencia del diseñador es muy importante para la realización de un buen ajuste.

Existen teoremas que garantizan la existencia de una solución en el caso en que la familia de plantas  $\mathcal{P}$  esté compuesta por plantas lineales invariantes en el tiempo de fase

mínima y que el número de polos en el semiplano derecho sea constante a todas ellas. Por supuesto, no es posible conseguir que  $L_0(j\omega)$  presente un recorrido arbitrario sobre el plano de Nichols, puesto que debe satisfacer la integral de Bode que relaciona magnitud y fase (con un retardo de fase adicional por cada cero situado en el semiplano derecho para sistemas de fase no mínima).

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \arg(L_0(j\omega)) \cdot d \ln \omega = -[\ln|L_0[0]| - \ln|L_0[\infty]|] \quad (10.33)$$

Probablemente son muchos los controladores posibles que permiten a  $L(j\omega)$  cumplir las especificaciones. El diseñador debe entonces escoger el óptimo entre todos ellos. En general interesa que el controlador presente la menor ganancia posible para no amplificar el ruido del sensor. En particular, interesa que el diseño realizado disminuya en ganancia tan rápidamente como sea posible para altas frecuencias (dentro de lo razonable, ya que el exceso de ceros sobre polos está normalmente limitado). Por este motivo se suele definir el controlador óptimo en QFT, como aquel que presenta la mínima ganancia a alta frecuencia.

#### ◆ Ejemplo 10.6:

Se presenta a continuación una posible secuencia de pasos para el ajuste de la función de transferencia en lazo abierto para la familia de plantas  $\mathcal{P}$  definida en el Ejemplo 10.1 cuyas curvas de restricción finales se han obtenido en el Ejemplo 10.5:

- 1) Inicialmente  $L_0(j\omega) = P_0(j\omega)$ , es decir, el controlador es  $C_0=1$ . En la Figura 10.7 se observa que  $L_0(j100)$  está cumpliendo las especificaciones, ya que se encuentra fuera de la curva de restricción cerrada  $B(100)$ . Asimismo  $L_0(j0.1)$ ,  $L_0(j0.5)$ ,  $L_0(j1)$ ,  $L_0(j2)$  y  $L_0(j15)$  no están cumpliendo las especificaciones puesto que se encuentran por debajo de las curvas de restricción abiertas  $B(0.1)$ ,  $B(j0.5)$ ,  $B(1)$ ,  $B(2)$  y  $B(15)$ , respectivamente.
- 2) Se desplaza  $L_0(j\omega)$  verticalmente hacia arriba 34.03 dB. Luego el nuevo controlador es  $C_1=50.3 \cdot C_0$ . Ahora  $L_0(j0.1)$ ,  $L_0(j0.5)$ ,  $L_0(j1)$  y  $L_0(j2)$  también están cumpliendo las especificaciones (ver Figura 10.8) puesto que se encuentran por encima de las curvas de restricción abiertas  $B(0.1)$ ,  $B(0.5)$ ,  $B(1)$  y  $B(2)$ , respectivamente.
- 3) Para que  $L_0(j15)$  se sitúe por encima de  $B(15)$  sin que  $L_0(j\omega)$  atraviese la curva de restricción cerrada  $B(100)$ , es necesario, introducir un adelanto de fase a  $L_0(j\omega)$ , para ello

se añade al controlador un cero real, por ejemplo en  $s=-4.9$  (ver Figura 10.9). Luego el nuevo controlador es  $C_3=50.3 \cdot (s+4.9)$ .

- 4) Aunque con  $C_3$  se están cumpliendo todas las especificaciones, este controlador es no causal ya que tiene más ceros que polos. Para hacerlo causal y de paso aproximar  $L_0(j100)$  a la curva  $B(100)$  se añade al controlador un polo complejo conjugado, por ejemplo de frecuencia natural  $\omega_n=253.1$  y factor de amortiguamiento  $\delta=0.6$  (ver Figura 10.10). Luego el controlador final es

$$C = C_4 = \frac{C_3}{s^2 + 2 \cdot 0.6 \cdot 253.1 \cdot s + 253.1^2} = \frac{50.3(s + 4.9)}{s^2 + 2 \cdot 0.6 \cdot 253.1 \cdot s + 253.1^2} \quad (\text{e.6})$$

Obviamente se podrían aproximar más los puntos  $L_0(j\omega_i)$  a las curvas  $B(\omega_i)$  pero a costa de tener un controlador con una estructura ( $n^\circ$  de polos y  $n^\circ$  de ceros) más compleja.

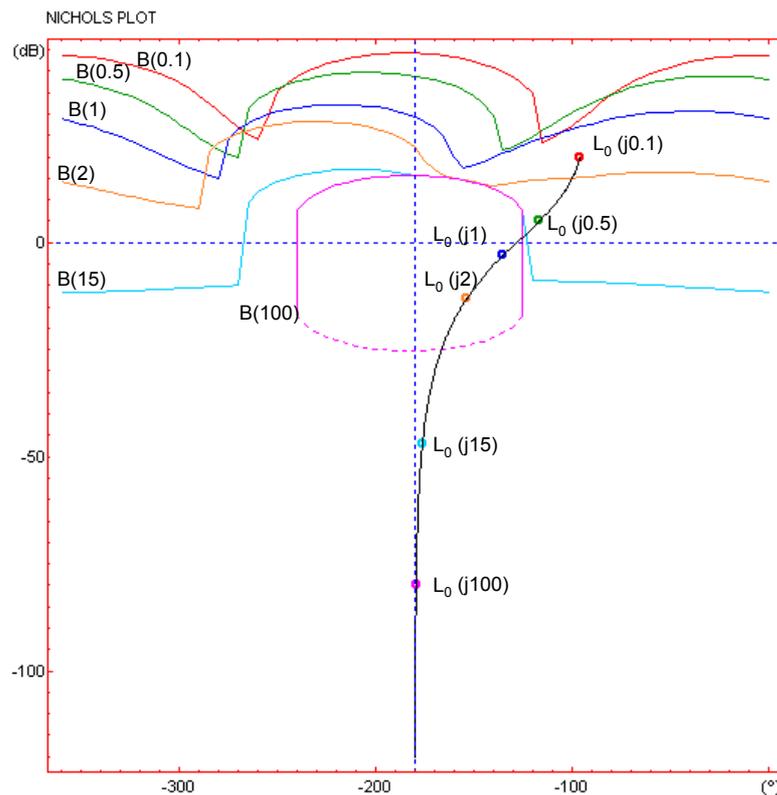


Figura 10.7: Diagrama de Nichols con las curvas de restricción finales  $B(\omega)$  y la representación de la función de transferencia en lazo abierto después de la realización del paso 1.

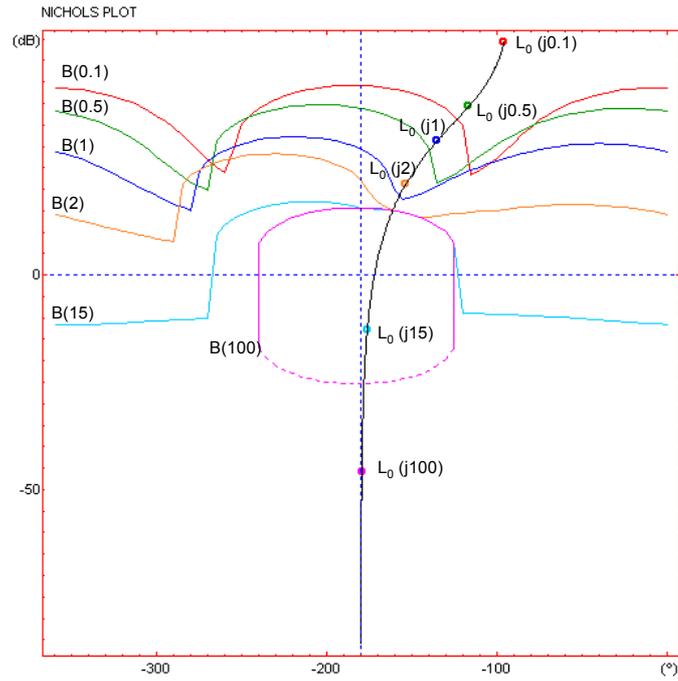


Figura 10.8: Diagrama de Nichols con las curvas de restricción finales  $B(\omega)$  y la representación de la función de transferencia en lazo abierto después de la realización del paso 2.

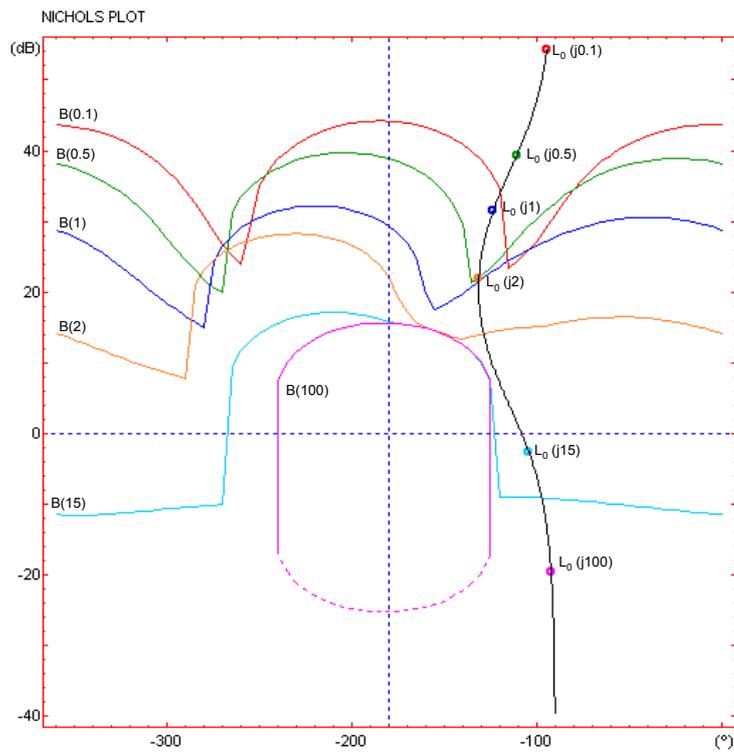


Figura 10.9: Diagrama de Nichols con las curvas de restricción finales  $B(\omega)$  y la representación de la función de transferencia en lazo abierto después de la realización del paso 3.

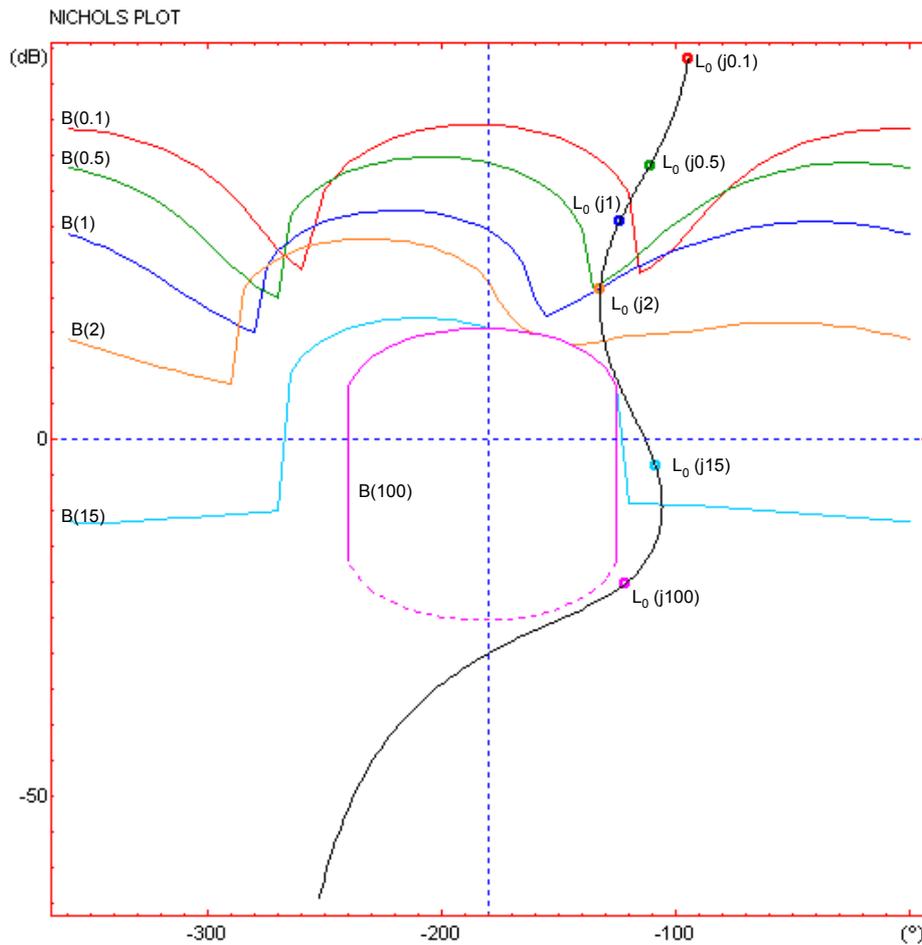


Figura 10.10: Diagrama de Nichols con las curvas de restricción finales  $B(\omega_i)$  y la representación de la función de transferencia en lazo abierto después de la realización del paso 4.

♦

### 10.3.6 Ajuste del prefiltro.

Una vez ajustada la función de transferencia en lazo abierto  $L_0(j\omega)$ , y obtenido el controlador  $C(s)$ , se dispone de una estructura de control que garantiza las variaciones de ganancia de la función en lazo cerrado

$$\Delta|T_l(j\omega_i)|_{dB} = \max\{|T_l(j\omega_i)|_{dB}\} - \min\{|T_l(j\omega_i)|_{dB}\}$$

para el conjunto de frecuencias considerado  $\Omega$ .

El problema ahora es conseguir que estas variaciones se produzcan precisamente en sus valores adecuados, es decir, en el interior de la franja definida por la especificación de seguimiento robusto (10.11). El diseñador debe diseñar un prefiltro  $F$  sobre el diagrama de

magnitud de Bode para conseguirlo. Según el elemento que se añade al prefiltro las curvas  $\max\{|T(j\omega_i)|_{dB}\}$  y  $\min\{|T_i(j\omega_i)|_{dB}\}$  se desplazan en una cierta dirección en el diagrama de magnitud de Bode. Se distinguen las siguientes posibilidades:

- **Ganancia.** Permite un desplazamiento vertical hacia arriba o hacia abajo.
- **Cero real.** Permite realizar desplazamientos verticales hacia arriba.
- **Ceros complejos.** Permite realizar desplazamientos verticales hacia arriba.
- **Polo real.** Permite realizar desplazamientos verticales hacia abajo.
- **Polos complejos.** Permite realizar desplazamientos verticales hacia abajo.

#### ◆ Ejemplo 10.7:

Un posible prefiltro que permite que la familia de plantas (e.1) controlada con (e.6) cumpla la especificación de seguimiento robusto (10.11) con las  $\alpha(s)$  y  $\beta(s)$  definidas por (e.3), es:

$$F(s) = \frac{0.25 \cdot (s + 78)}{s^2 + 2 \cdot 0.7 \cdot 4.4 \cdot s + 4.4^2} \quad (\text{e.7})$$

En la Figura 10.11b se puede comprobar como efectivamente con este prefiltro se cumple la especificación de seguimiento robusto establecida.

◆

### 10.3.7 Validación del diseño

Una vez diseñado el controlador y el prefiltro, el siguiente paso consiste en validar el diseño. A pesar de haber respetado todos los pasos del proceso de diseño, es preciso realizar una validación del resultado por diversas razones:

- 1) No se puede asegurar que las especificaciones de seguimiento robusto y estabilidad robusta se cumplen dentro del rango de frecuencias del sistema para frecuencias  $\omega_i$  distintas a las consideradas en  $\Omega$ .

- 2) Dependiendo del tipo de incertidumbre de la planta, puede que se hayan usado estimaciones no demasiado afortunadas de las plantillas reales de la planta.

Posibles criterios de validación podrían ser los siguientes:

- Comprobación de la especificaciones en frecuencias pertenecientes al rango de frecuencias  $\Omega_c$  del sistema pero distintas a las consideradas en  $\Omega$ .
- Comprobación de la especificación de seguimiento robusto en frecuencias cercanas o superiores a  $\omega_h$ .
- Simulación numérica de la respuesta temporal del sistema en lazo cerrado para distintas instancias del vector de parámetros inciertos de la planta  $\theta \in \Theta$ .

Típicamente, las especificaciones de comportamiento de un sistema en lazo cerrado se suelen expresar como especificaciones en el dominio del tiempo. Como QFT es una metodología que trabaja en el dominio de la frecuencia, dichas especificaciones temporales deben traducirse a especificaciones en el dominio de la frecuencia. Puesto que no existe un método formal de traducción entre estos dos dominios que genere una traducción exacta, puede ocurrir que el diseño realizado mediante la metodología QFT cumpla las especificaciones en el dominio frecuencial pero viole las especificaciones en el dominio temporal. En estos casos, suele ser relativamente sencillo salvar este desacuerdo modificando adecuadamente las especificaciones en el dominio de la frecuencia.

◆ **Ejemplo 10.8:**

En la Figura 10.11 se muestra la validación de la especificación de estabilidad robusta y de seguimiento robusto para la familia de plantas  $\mathcal{P}$  definida en (e1) con los diseños de  $C(s)$  y  $F(s)$  obtenidos en los dos ejemplos anteriores.

En la Figura 10.11a se representa  $|T_i(s)|_{dB}$  y la recta horizontal  $W_{er}=1.2=1.58$  dB. Se observa como se cumple la especificación de estabilidad robusta, al cumplirse en todas las frecuencias que  $|T_i(s)|_{dB} \leq 1.58$  dB.

En la Figura 10.11b se observa como se cumple la especificación de seguimiento robusto ya que tanto  $\max\{|T(j\omega_i)|_{dB}\}$  como  $\min\{|T_l(j\omega_i)|_{dB}\}$  se encuentran dentro de la banda definida por  $\alpha(s)$  y  $\beta(s)$ .

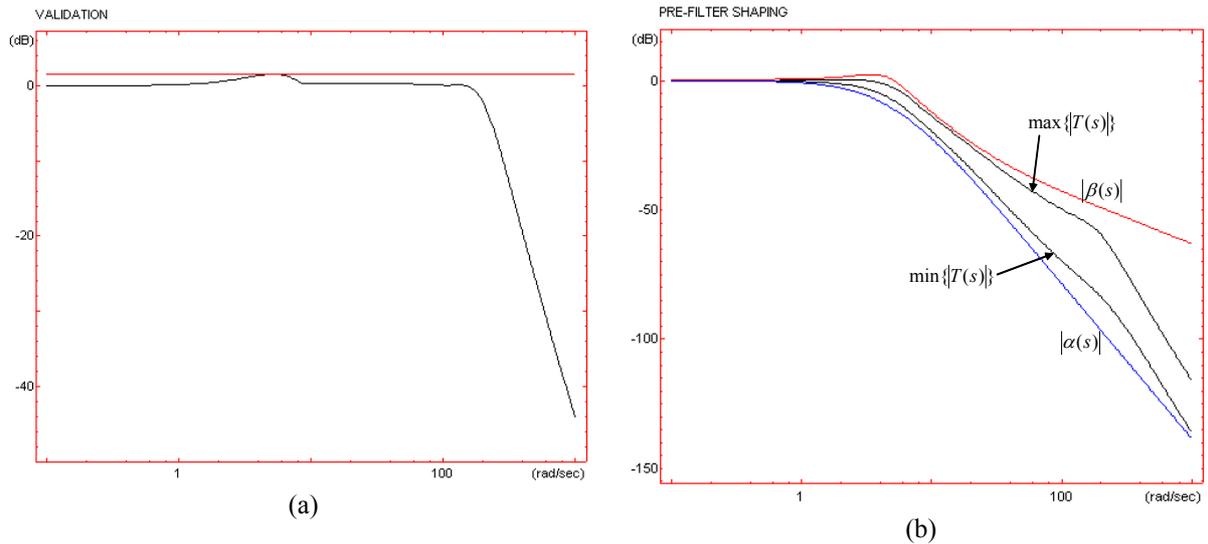


Figura 10.11: Para la familia de plantas  $\mathcal{P}$  (ecuación e.1), el controlador  $C$  (ecuación e.6) y el prefiltro  $F(s)$  (ecuación e.7): (a) Comprobación especificación de estabilidad robusta. (b) Comprobación de la especificación de seguimiento robusto.

◆

# APENDICE B:

## CALCULO DIFERENCIAL EN $\mathbb{R}^n$

### B.1 FORMAS CUADRATICAS Y DEFINITUD

Si  $x \in \mathbb{R}^n$ , es un vector, el *cuadrado de su norma euclidiana* es:

$$\|x\|^2 = x^T x \quad (\text{B.1})$$

Si  $S$  es una transformación no singular cualquiera, el vector  $S \cdot x$  tiene como cuadrado de su norma:  $(S \cdot x)^T \cdot (S \cdot x) = x^T \cdot S^T \cdot S \cdot x$ . Si se denomina  $P = S^T \cdot S$ , se puede escribir la norma al cuadrado de  $S \cdot x$

$$\|x\|_p^2 = x^T \cdot P \cdot x \quad (\text{B.2})$$

A  $\|x\|_p$  se le denomina la *norma de  $x$  con respecto a  $P$* .

Se denomina a

$$x^T \cdot Q \cdot x \quad (\text{B.3})$$

una *forma cuadrática*. Se supone que los elementos de  $Q$  son reales.

Toda matriz real cuadrada  $Q$  puede descomponerse en una parte simétrica  $Q_s$ , (esto es  $Q_s^T = Q_s$ ) y una parte antisimétrica  $Q_a$  (esto es  $Q_a^T = -Q_a$ ):

$$Q = Q_s + Q_a \quad (\text{B.4})$$

donde

$$Q_s = \left( \frac{Q + Q^T}{2} \right) \quad (\text{B.5})$$

y

$$Q_a = \left( \frac{Q - Q^T}{2} \right) \quad (\text{B.6})$$

Si la forma cuadrática  $x^T \cdot A \cdot x$  tiene  $A$  antisimétrica, entonces dicha forma cuadrática debe ser cero ya que  $x^T \cdot A \cdot x$  es un escalar. Luego  $x^T \cdot A \cdot x = (x^T \cdot A \cdot x)^T = x^T \cdot A^T \cdot x = -x^T \cdot A \cdot x$ . Luego para una matriz cuadrada real se tiene:

$$x^T \cdot Q \cdot x = x^T \cdot (Q_s + Q_a) \cdot x = x^T \cdot Q_s \cdot x \quad (\text{B.7})$$

Por lo que se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $Q$  en (B.3) es *simétrica*. Por lo tanto se dice que  $Q$  es:

- *Definida positiva* ( $Q > 0$ ) si  $x^T \cdot Q \cdot x > 0$  para todo  $x \neq 0$ .
- *Semidefinida positiva* ( $Q \geq 0$ ) si  $x^T \cdot Q \cdot x \geq 0$  para todo  $x \neq 0$ .
- *Semidefinida negativa* ( $Q \leq 0$ ) si  $x^T \cdot Q \cdot x \leq 0$  para todo  $x \neq 0$ .
- *Definida negativa* ( $Q < 0$ ) si  $x^T \cdot Q \cdot x < 0$  para todo  $x \neq 0$ .
- *Indefinida* si  $x^T \cdot Q \cdot x > 0$  para algún  $x$  e  $x^T \cdot Q \cdot x < 0$  para otro  $x$ .

Es posible definir *test de definitud* independientemente de los vectores  $x$ . Si  $\lambda_i$  son los autovalores de  $Q$ , entonces:

$$\begin{aligned} Q > 0 & \quad \text{si todo } \lambda_i > 0, \\ Q \geq 0 & \quad \text{si todo } \lambda_i \geq 0, \\ Q \leq 0 & \quad \text{si todo } \lambda_i \leq 0, \\ Q < 0 & \quad \text{si todo } \lambda_i < 0 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Otro test de definitud es el siguiente: Sea  $Q = [q_{ij}] \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ . Los menores principales de  $Q$  son:

$$\begin{aligned} m_1 &= q_{11}, \\ m_2 &= \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}, \\ m_3 &= \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} \\ m_n &= |Q| \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

En término de los menores principales se tiene:

$$\begin{aligned}
 Q > 0 & \quad \text{si } m_i > 0 \quad \forall i \\
 Q \geq 0 & \quad \text{si } m_i \geq 0 \quad \forall i, \\
 Q \leq 0 & \quad \text{si } \begin{cases} m_i \leq 0 \quad \forall i \text{ impar} \\ m_i \geq 0 \quad \forall i \text{ par} \end{cases} \\
 Q < 0 & \quad \text{si } \begin{cases} m_i < 0 \quad \forall i \text{ impar} \\ m_i > 0 \quad \forall i \text{ par} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Cualquier matriz semidefinida positiva  $Q \geq 0$  puede factorizarse en raíces cuadradas bien como:

$$Q = \sqrt{Q} \cdot \sqrt{Q}^T \tag{B.11}$$

o como

$$Q = \sqrt{Q}^T \cdot \sqrt{Q} \tag{B.12}$$

donde  $\sqrt{Q}$  representa una determinada matriz que verifica (B.11) o (B.12).

Las raíces cuadradas (“izquierda” y “derecha”) de (B.11) y (B.12) no son, en general, las mismas. En realidad  $Q$  puede tener varias raíces cuadradas, ya que cada una de las factorizaciones no es única. Si  $Q > 0$ , todas sus raíces cuadradas son no-singulares.

Si  $P > 0$ , es definida positiva, entonces (B.2) es una *norma*. Si  $P \geq 0$ , es semidefinida positiva, se denomina una *seminorma* ya que  $x^T \cdot P \cdot x$  puede ser cero aunque no lo sea  $x$ .

## B.2 CALCULO DE MATRICES

Sean  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathfrak{R}^n$  un vector,  $s \in \mathfrak{R}$  un escalar y  $f(x) \in \mathfrak{R}^m$  un  $m$ -vector función de  $x$ . La diferencial de  $x$  es:

$$dx = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ dx_n \end{bmatrix} \tag{B.13}$$

y la derivada de  $x$  con respecto a  $s$  (que podría ser el tiempo) es:

$$\frac{dx}{ds} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{ds} \\ \frac{dx_2}{ds} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{ds} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Si  $s$  es una función de  $x$ , entonces el gradiente de  $s$  con respecto a  $x$  es el vector columna<sup>1</sup>:

$$s_x \cong \frac{\partial s}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x_1} \\ \frac{\partial s}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial s}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

La diferencial total de  $s$  es:

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^T dx = \sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} dx_i \quad (\text{B.16})$$

Si  $s$  es una función de dos vectores  $x$  e  $y$ , entonces:

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^T dx + \left( \frac{\partial s}{\partial y} \right)^T dy \quad (\text{B.17})$$

El Hessiano de  $s$  con respecto a  $x$  es la derivada segunda:

$$s_{xx} \cong \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{B.18})$$

que es una matriz  $n \times n$  *simétrica*.

En términos del gradiente y del Hessiano, *el desarrollo en serie de Taylor de  $s(x)$  en torno a  $x_0$*  es:

$$s(x) = s(x_0) + \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^T (x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^T \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} (x-x_0) + O(2) \quad (\text{B.19})$$

donde  $O(2)$  representa términos de orden 2, y  $s_x$  y  $s_{xx}$  se calculan en  $x_0$ .

El Jacobiano de  $f$  con respecto a  $x$  es la matriz de  $m \times n$

$$f_x \cong \frac{\partial f}{\partial x} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \quad (\text{B.20})$$

Por lo que la derivada total de  $f$  es

$$df \cong \frac{\partial f}{\partial x} dx = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad (\text{B.21})$$

Utilizando la notación abreviada

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \in R^{n \times m} \quad (\text{B.22})$$

Si  $y$  es un vector y  $A, B, C, D, Q$  son matrices, todas con dimensiones adecuadas que hacen que las siguientes expresiones tengan sentido, se tienen los siguientes resultados de interés:

$$\frac{d(A^{-1})}{dt} = -A^{-1} \cdot \dot{A} \cdot A^{-1} \quad (\text{B.23})$$

Algunos gradientes útiles son:

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^T x) = \frac{\partial}{\partial x} (x^T y) = y \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^T Ax) = \frac{\partial}{\partial x} (x^T Ay) = Ay \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^T f(x)) = \frac{\partial}{\partial x} (f^T(x)y) = f_x^T y \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^T Ax) = Ax + A^T x \quad (\text{B.27})$$

Y si  $Q$  es simétrica, entonces:

---

<sup>1</sup> En otros textos el gradiente se define como un vector fila

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^T Qx) = 2Qx \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[(x-y)^T Q(x-y)] = 2Q(x-y) \quad (\text{B.29})$$

La regla de la cadena para dos funciones es:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f^T y] = f_x^T y + y_x^T f \quad (\text{B.30})$$

Algunos Hessianos útiles son:

$$\frac{\partial^2(x^T Ax)}{\partial x^2} = A + A^T \quad (\text{B.31})$$

Y si Q es simétrica

$$\frac{\partial^2(x^T Qx)}{\partial x^2} = 2Q \quad (\text{B.32})$$

$$\frac{\partial^2((x-y)^T Q(x-y))}{\partial x^2} = 2Q \quad (\text{B.33})$$

Algunos Jacobianos útiles son:

$$\frac{\partial(Ax)}{\partial x} = A \quad (\text{B.34})$$

(comparar con (B.24)), y la regla de la cadena es:

$$\frac{\partial(sf)}{\partial x} = \frac{\partial(fs)}{\partial x} = sf_x + fs_x^T \quad (\text{B.35})$$

(comparar con (B.30)).

Algunas derivadas útiles en términos de traza y determinante son:

$$\frac{\partial(\text{traza}A)}{\partial A} = I \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{\partial(\text{traza}(BAD))}{\partial A} = B^T D^T \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{\partial(\text{traza}(ABA^T))}{\partial A} = 2AB \quad (\text{B.38})$$

$$\frac{\partial(|BAD|)}{\partial A} = |BAD| A^{-T} \quad (\text{B.39})$$

donde  $A^{-T} = (A^{-1})^T$ .



# BIBLIOGRAFIA

- ASTRÖM, K. J. y WITTENMARK, B. Sistemas Controlados por Computador. Ed. Paraninfo, 1996.
- LEWIS, L., Optimal Control, John Wiley, 1986.
- YANIV, O., Quantitative feedback design of linear and nonlinear control systems, Kluwer Academic Publishers : Norwell, Massachusetts, 1999.

