Factores de dificultad de los problemas con sucesiones e implicaciones para el diseño de cursos de cálculo en línea

Ildikó J. Pelczer, Fernando Gamboa Rodríguez

Laboratorio de Interacción Humano-Máquina y Multimedios Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, UNAM, México D.F.

IPelczer@iingen.unam.mx gfer@servidor.unam.mx

Resumen. En el presente artículo se proponen factores de dificultad que se pueden asociar con problemas de análisis matemático, en particular con problemas de secuencias numéricas. El propósito es emplear los factores definidos en un sistema de cómputo de tal manera que la evaluación de la dificultad del problema sea automática. Se proponen dos clases de factores relacionados con dificultades cognitivas y con la complejidad del problema. Los factores de la primera categoría incluyen elementos que reflejan dificultades en el aprendizaje y manejo de los conceptos involucrados en los problemas de secuencias. Los del segundo grupo se relacionan con la complejidad de la expresión del problema y son los siguientes: el factor que designa el número de resultados parciales requeridos por el método aplicado, el número de transformaciones necesarias a la expresión para reducirlo a un problema de tipo conocido y el número de conceptos involucrados en la expresión del problema.

Introducción

De manera tradicional la dificultad de un problema se mide con un factor denominado *proporción dificultad del elemento* ("item difficulty ratio") y se calcula de manera empírica como la fracción entre el número de estudiantes que solucionan correctamente un problema contra el número total de estudiantes (Gronlund, 1981). Aunque es un factor fácil de determinar, presenta el inconveniente de que no necesariamente refleja la dificultad del problema, sino la dificultad de los estudiantes por solucionarlo.

Otras investigaciones se han concentrado en establecer relaciones entre la dificultad de un problema y las variables que afectan el proceso de solución. Por ejemplo, Lane (1991) encontró que la dificultad de los problemas algebraicos de palabras (de tipo "*SEND+MORE=MONEY"*) depende de factores como el número de valores necesarios por determinar, si el valor desconocido necesitaba procesamiento suplementario para responder a la pregunta del problema, si el contexto del problema era familiar o no. Hornke y Habon (1986) consideran que tales factores describen la demanda cognitiva del problema y, por lo tanto, proponen el término "*dificultad cognitiva*" como medida de la dificultad del problema y se refieren a los variables como "variables cognitivas".

Varios investigadores (por ejemplo, Jerman, 1983) han sugerido que los problemas matemáticos son más difíciles de resolver cuando requieren varios pasos para llegar a la solución, cuando exigen obtener resultados parciales y cuando los números involucrados presentan complejidad computacional (por ejemplo, problemas con fracciones). Para estos aspectos se ha usado el término de *complejidad del problema*. Estos factores presentan la ventaja, a diferencia de los factores antes descritos, de ser determinables por un sistema de manera automática.

En (Lee y Heyworth, 2000) los autores proponen cuatro factores que determinan la complejidad de un problema de álgebra: el número percibido de pasos difíciles (que se iguala a errores frecuentes en el proceso de solución de problemas con logaritmos, los cuales exigen simplificaciones de expresiones), el número de pasos necesarios para llegar a

la solución, el número de operaciones en la expresión del problema y la familiaridad de los estudiantes con el tipo de problema (se supone que existe una clasificación de los problemas de logaritmos y que las clases representan niveles consecutivos de dificultad). La complejidad del problema se define entonces como la media ponderada de los factores, donde el peso de cada factor se determina como el promedio de los valores propuestos por los profesores, en una escala de 1 a 5 (de menor a mayor).

En el ámbito de los problemas de análisis no hay trabajos que propongan factores determinables de manera automática por un sistema de cómputo, aunque hay muchos trabajos sobre las varias dificultades que surgen en el aprendizaje del análisis (Sierpinska, 1985; Tall, 1992; Cornu, 1981).

Hay al menos, dos ventajas en tener factores que permitan la evaluación automática de la dificultad del problema. En primer lugar, algunos estudios confirman que en caso de un reactivo con problemas que aumentan de dificultad en orden creciente se logra un mejor desempeño de los estudiantes (Newman, Kundert, Lane y Bull, 1988). Es por ello que con lo factores propuestos sería posible ordenar los problemas en un sistema de cómputo (ya existentes en el sistema o generados por un componente del sistema) según su nivel de dificultad. En segundo término, en el caso de una implementación en un software educativo con un modelo del conocimiento del estudiante sería posible usar los factores para la actualización del modelo y detectar aspectos problemáticos en el aprendizaje del tema. Al considerar que este trabajo se encuadra en un proyecto que tiene como propósito el desarrollo de un modelo computacional de la generación humana de problemas matemáticos, los factores propuestos sirven como guía para la generación de los problemas, es decir, el sistema debería ser capaz de generar problemas que contengan factores especificados.

2. Factores que determinan la dificultad de los problemas con secuencias

Partimos de una definición del término “problema”. Pólya (1967) afirma que tener un problema significa buscar de manera conciente alguna acción adecuada para alcanzar alguna meta, claramente definida, pero no inmediata. Esta observación es importante porque hace la diferencia con los “ejercicios”, en los cuales basta con aplicar fórmulas en una serie de pasos preestablecidos. Usamos el término de problema con el significado especificado por Pólya.

Nesher y Kilpatrick (1990) afirman que los conceptos del análisis matemático tienen una complejidad intrínseca, lo que dificulta su aprendizaje. En el proceso de solución de problemas con secuencias numéricas se reflejan las dificultades relacionadas con el aprendizaje de los conceptos involucrados, además de las dificultades que surgen de la falta de conocimiento general (por ejemplo, conocimiento de algebra, trigonometría) o falta de destreza en el manejo de las expresiones complejas. Por lo tanto para identificar factores de dificultad es importante partir de las investigaciones sobre las dificultades u obstáculos en el aprendizaje de los conceptos básicos de análisis matemático (límite, vecindad, convergencia, etc.).

Factores relacionados con la dificultad cognitiva

2.1. Factor dual (F1)

P.W. Thompson (1985) propone un cuadro teórico en el cual el conocimiento matemático está caracterizado en términos de conceptos y procesos. Los objetos (números, variables, funciones) están interconectados por relaciones y constituyen partes de estructuras de objetos. Los procesos representan operaciones sobre los objetos. Las estructuras no siempre se conservan al aplicar los procesos. Por ejemplo, una función puede ser vista

como una relación entre el dominio y su codominio (por lo tanto, como proceso de asociación de los valores), pero al llegar a operaciones como la diferenciación, la función se convierte en un objeto sobre el que se aplica un proceso de transformación. Una razón por la que se tiene complejidad en el conocimiento matemático es que la mayoría de las nociones pueden tener un rol de objeto o de proceso, dependiendo de la situación presentada en el problema. A medida que un estudiante se familiariza con un proceso, éste es visto como una serie de operaciones que se pueden efectuar en la mente. En la visión de Thompson, la esencia del aprendizaje matemático consiste en transformar procesos en objetos. A partir de las investigaciones de Thompson proponemos un factor que se refiere a la dualidad de los conceptos matemáticos (objeto-proceso) y a la dificultad que esta doble naturaleza causa en el entendimiento de la noción de límite. Se usará el término *factor dual* y se considerará presente en el caso de problemas que involucran la transformación de la expresión del límite (necesaria en caso de algunos problemas que involucran límites de funciones para su solución), composición de funciones, integrales o derivadas de funciones (operaciones sobre funciones en general).

2.2. Factor métrico (*F2*)

La investigadora polaca Ana Sierpinska propuso una lista de cinco obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de la noción de límite (Sierpinska, 1985). Uno de ellos es el "obstáculo geométrico" que se refiere a la visualización geométrica del límite. La interpretación geométrica "atrapa" la atención y deja fuera las consideraciones sobre la estructura topológica del espacio en el cual ocurre el cálculo del límite. Con el *factor métrico* describimos la dificultad intrínseca en manejar métricas diferentes a la euclidiana o espacios diferentes del eje real, y lo consideramos presente en un problema cuando se requiere de manera explícita la convergencia (o el límite) en un espacio con métrica diferente o en un espacio diferente del eje real.

2.3. Factor lógico (F3)

Otro tipo de obstáculo mencionado por Sierpinska es el lógico: en este grupo se encuentran los obstáculos relacionados con los cuantificadores que aparecen en la definición del límite, el orden en el cual aparecen y las dependencias entre ellos. Sierpinska resalta que el papel de los cuantificadores no se entiende de manera natural en los problemas en los que el límite existe o donde podemos adivinarlo. Dubinsky y Elterman (1988) afirman que el uso de los cuantificadores en las definiciones es "uno de los conceptos menos aprendido y rara vez entendido a todos los niveles, a partir de la secundaria – frecuentemente hasta la universidad" (pp. 44). A partir de estos resultados proponemos el *factor lógico* para designar la presencia del uso de cuantificadores. Bajo el término "cuantificadores" incluiremos también las implicaciones lógicas. Consideraremos presente al factor si tenemos un problema teórico, si el problema requiere construir un contraejemplo (con la forma "demuestren que no para todos...es verdad..."), si la forma de la pregunta es negación, si la demostración se refiere a una negación o si requiere determinar el valor de *n* (índice de la secuencia) a partir del cual se cumple una propiedad.

2.4. Factor parámetro (F4)

En (Tall, 1992) se habla de la imagen que los estudiantes tienen sobre el eje de los números reales y subraya la dificultad que tienen en entender la noción del número irracional. Este concepto está definido como la negación del número racional, es decir, no tiene una definición formal, lo que dificulta a los estudiantes desarrollar una imagen de él. Toda la estructura del eje real es demasiado compleja para los estudiantes, sin embargo es el elemento fundamental para el aprendizaje del concepto de límite y, por lo tanto, para la habilidad de resolver problemas (Tall, 1975). Asociamos el F4 con la presencia de un

parámetro en el problema. Estos problemas normalmente exigen un análisis del comportamiento de la secuencia en función de valores del parámetro. Consideramos dos situaciones: cuando la pertenencia del parámetro a un conjunto de números está dada y cuando no hay tal especificación. En la segunda situación el factor tendrá un valor mayor por considerar que la falta de especificación impone al estudiante buscar los subconjuntos interesantes para un parámetro. El factor se puede determinar a partir de la expresión del problema.

2.5. Factor forma (F5)

Los problemas con secuencias que involucren diferentes definiciones para sub-conjuntos de números naturales son más difíciles que otros. Está dificultad se relaciona también con la imagen que muchos estudiantes tienen sobre el concepto de secuencia (Tall, 1992), en particular, que ésta se representa con una sola fórmula (en caso contrario lo consideran como la definición de dos secuencias diferentes). Es por ello que problemas de secuencias definidos a partir de sub-secuencias son más difíciles que los demás. Debido a lo anterior, el factor F5 se considera presente cuando la definición de la secuencia se efectúa con el uso de sub-secuencias, lo cual es posible identificar desde el enunciado del problema.

2.6. Factor razonamiento (F6)

En (Tall y Schwarzenberger, 1978) los autores mencionan que la demostración mediante reducción al absurdo y el razonamiento inductivo presuponen un pensamiento que no es fácil para los estudiantes de preparatoria, ni para la mayor parte de los universitarios del primer año. Definimos el factor F6 para designar estos casos. Consideraremos presente al factor si en el enunciado se exige la demostración de la forma del término general, el término general de una secuencia (el determinante de una matriz) o la determinación de alguna propiedad en la que todos los elementos son especificados. Para el razonamiento de tipo “reducción al absurdo” se incluyen dos situaciones, en la primera el enunciado del problema es de forma: “demuestre que no existe...” y en la segunda: “demuestre que para todos...”

Factores relacionados con la complejidad del problema

2.7. Número de conceptos involucrados en la expresión del problema (f7)

Este factor se puede determinar directamente desde la expresión del problema, al contar con la presencia de expresiones logarítmicas, exponenciales, integrales u otras.

2.8. Número de elementos suplementarios requeridos por el método de solución (f8)

En caso de los problemas con secuencias podemos diferenciar entre métodos de solución propios al dominio (como por ejemplo, reglas que describen condiciones para que la suma de dos secuencias sea convergente) y métodos que no pertenecen a este tipo de problemas (como por ejemplo, aplicar limites de funciones para el calculo del limite de una secuencia numérica). En el grupo de métodos propios al dominio se puede hacer una segunda diferenciación, según los resultados parciales requeridos por el método. Así tenemos métodos que no requieren resultados parciales (ver la regla mencionada como ejemplo) y métodos que sí exigen obtener datos suplementarios para poder aplicarlos (como, por ejemplo, la regla que dice que una secuencia monótona y limitada es convergente). En consecuencia, el factor se considera presente si para resolver el problema hay que aplicar métodos propios del dominio que requieren resultados parciales y en el caso de los métodos no-propios al dominio. En un sistema de cómputo es posible determinar la presencia de este factor si el sistema tiene (o puede llamar) un módulo (externo) para resolver problemas.

2.9. Número de transformaciones necesarias a la expresión del problema (f9)

El factor se refiere al número de pasos que son necesarios para transformar la expresión del problema a una expresión conocida. Por ello entendemos la forma general del problema según una clasificación (por ejemplo: término especificado por una expresión, por relación de recurrencia, etc.). La determinación de este factor es posible si el sistema tiene un módulo para la solución de problemas o una descripción de las transformaciones aplicables a una expresión.

3. Evaluación empírica de los factores propuestos

La evaluación empírica de los factores cognitivos tiene tres propósitos:

1. ver la manera en la que los alumnos y los profesores aprecian la dificultad de los problemas con sucesiones
2. identificar la importancia que los profesores atribuyen a los factores
3. relacionar la dificultad de los problemas con la importancia de los factores.

Para cumplir con las metas propuestas, se diseño una evaluación de la siguiente manera. Se eligieron 12 problemas con sucesiones tal que dos se asocien a cada factor cognitivo. Los pares de problemas se escogieron de modo que para la solución de ambos se requiera el mismo conocimiento, pero uno de los dos problemas contenga además un factor cognitivo. Los alumnos deben resolver cada problema y una vez resueltos evaluar la dificultad en una escala continua de 1 hasta 5 (donde 1 corresponde a muy fácil y 5 corresponde a difícil). Se practicó esta evaluación empírica a una serie de alumnos y profesores que inicialmente debieron completar una hoja con algunos datos personales (por ejemplo, experiencia en la enseñanza, percepción del nivel de preparación, etc.) Los alumnos tuvieron dos horas a su disposición para resolver los problemas. Las evaluaciones de los profesores son similares excepto que ellos no deben resolver los problemas. En el caso de las pruebas a los profesores hay una segunda parte en la evaluación. Esta parte se refiere a la apreciación de la importancia de los factores. Por ello, se describe brevemente cada factor y se pide que califiquen la importancia que le atribuyen en la determinación de la dificultad del problema. Una vez calificados los problemas, los profesores deben evaluar en una escala continua de 1 a 5 la importancia de cada factor propuesto. Al final, los profesores pueden proponer factores adicionales.

Las hipótesis del experimento descrito son las siguientes:

1. en general, los alumnos calificarán como mas difícil los problemas que los profesores;
2. los profesores con mayor experiencia calificarán como más difíciles los problemas;
3. los alumnos que se califican como mejor preparados atribuyen menor dificultad a los problemas;
4. los problemas que contienen el factor cognitivo se perciben como más difíciles en comparación con el problema de mismo tipo, pero sin el factor;
5. hay una manera de relacionar directamente la importancia de los factores con la dificultad atribuida de los problemas, es decir, se puede proponer un indicador global de la dificultad del problema que parte de la importancia de los factores.

Las evaluaciones se aplicaron a 41 estudiantes de la Facultad de Ciencias, UNAM, en la Ciudad de México. Los alumnos cursaban el primer año de la carrera y tomaban el curso de cálculo como parte del tronco común de todas las carreras de esa Facultad. Además, en la evaluación participaron 24 profesores, todos de ellos profesores de cálculo en esa facultad.

Resultados

En la tabla 1 presentamos los resultados obtenidos de los estudiantes y los profesores. La dificultad de un problema se especifica en la tabla como el promedio por grupos de

experiencia (en enseñanza para profesores y de preparación auto-calificada para los alumnos).

Tipo pb.	Pb.	Factor cog. contenido en el problema	Dificultad			
			Alumnos 1	Alumnos 2	Profesores 1	Profesores 2
1	11	--	4.25	4.09	3.5	3.54
1	12	F1 (dual)	4.25	3.09	3.5	3.81
2	4	--	4	3.23	2.61	2.54
2	8	F2 (métrica)	4	3.23	2.61	3.18
3	2	--	2.91	2.86	1.76	2
3	1	F3 (lógica)	2.91	2.68	2.15	2.45
4	3	--	3.11	2.5	2.76	2.09
4	6	F4 (parámetro)	4.11	3.65	3.11	2.81
5	5	--	3.08	2.25	2.38	2.09
5	7	F5 (forma)	3.08	2.6	2.61	2.90
6	9	--	3.75	3.23	2.61	3.09
6	10	F6 razonamiento	3.75	3.30	2.76	3.18

Tabla 1. Resultados de las evaluaciones empíricas de los factores de dificultad cognitiva

En la tabla el tipo de problema designa el hecho que los problemas del mismo tipo fueron escogidos para la evaluación de un factor. Por ejemplo, los problemas 11 y 12 están asociados al factor dual, lo que significa que los dos problemas exigen el mismo conocimiento para su resolución, pero de los dos solamente el problema 12 contiene el factor dual. La dificultad de los problemas se presenta en la tabla por grupos de alumnos y profesores. Se mencionó que tanto los alumnos como los profesores tenían que responder a algunas preguntas acerca de su auto-percepción y experiencia, respectivamente. En caso de los alumnos se pidió que calificaran su preparación en cálculo, en una escala de 1 (muy básico) hasta 5 (muy buena). Los profesores tenían que responder a una pregunta acerca de su experiencia en la enseñanza (donde 1 significa de 0-2 años y 5 significa más de 9 años). Dado el número reducido de respuestas no fue posible hacer un análisis por cada grupo definido, así que se crearon nuevos grupos de modo que un grupo contenga los alumnos y profesores con respuestas de 1 y 2. En la tabla 1, los títulos de los columnas hacen referencia a la última agrupación, es decir, Alumnos 1 agrupa todos los alumnos que se calificaron con preparación muy básica y básica. En el caso de los profesores, el grupo 1 contiene los profesores con experiencia en enseñanza menor a 5 años. Los grupos anotados con 2 son constituidos por el resto de los participantes.

En la tabla 2 presentamos los promedios obtenidos para cada factor en cuanto a su importancia en la determinación de la dificultad.

Prof./factor	Factores cognitivos						Factores de complejidad		
	F1	F2	F3	F4	F5	F6	f1	f2	f3
1	4	3.76	3.46	3.07	3.30	3.61	4.5	4	4.5
2	3.63	3.72	4	3.18	3.45	3.63	4	3.5	4.5

Tabla 2. Evaluación de la importancia de los factores

Análisis de los resultados

Los resultados del análisis de los datos se efectuarán en los términos de las hipótesis planteadas.

En cuanto la primera hipótesis, el promedio de la dificultad asignada por alumnos es mayor al promedio de dificultad calificada por los profesores. En la mayoría de los problemas se confirma la hipótesis dos: los profesores con más experiencia califican como más difícil los problemas. Aunque esta hipótesis pueda parecer contra-intuitiva a primera vista, al analizarla un poco parece explicable. Es posible que los profesores con más experiencia sepan mejor qué tipo de errores cometen los estudiantes frecuentemente y qué elementos les dificulta el entendimiento del problema y su resolución. En relación con la tercera hipótesis hay que decir que todos los problemas fueron calificados como más fáciles por los alumnos con buena percepción de sí mismos en comparación con las calificaciones de los alumnos menos preparados.

El caso de la cuarta hipótesis es muy interesante y merece ser comentado en detalle. En la tabla 1 se puede observar que los alumnos del grupo 1 calificaron los problemas casi igual, independiente de que tengan o no el factor. Una interpretación de tal resultado es que los alumnos con preparación básica o muy básica no ven más allá de los elementos que aparecen en la formulación del problema, es decir su apreciación en cuanto a la dificultad del problema se basa en aspectos superficiales. Tal interpretación es plausible si consideramos que los novatos en general usan aspectos inmediatamente identificables para juzgar un problema. En el caso de tres factores, los alumnos del grupo 2 juzgaron más difíciles los problemas con el factor cognitivo presente (como es el caso de los factores lógico, parámetro, forma y razonamiento). El caso del factor lógico es interesante, dado que los profesores tampoco los juzgaron así, a pesar de considerar el factor muy importante (ver tabla 2).

El caso del factor lógico parece interesante, dado que los profesores consideran más difícil el problema que no contiene este factor. Parece que los profesores asocian la dificultad del problema con la medida en la que el conocimiento necesario para resolverlo es básico y no según la importancia que atribuyen al factor. Así, el problema que exigía el uso de la definición del límite de una secuencia se considera más fácil, a pesar de que ningún alumno resolvió correctamente este problema y a que el factor lógico (relacionado con el manejo de los cuantificadores universal y existencial) se consideró importante en la determinación de la dificultad.

Las diferencias entre la dificultad de los problemas con y sin factor cognitivo son menores en caso de los profesores del grupo 1 en comparación con los del grupo 2. Esto sugiere dos cosas: por una parte, que la experiencia didáctica es un elemento importante en la apreciación de la dificultad de los problemas y, por otra parte, que los profesores se basan más en esta experiencia que en la consideración de los factores cuando evaluan la dificultad de los problemas. Sin embargo, los profesores no propuisieron la inclusión de otros factores. Tal resultado contradice nuestra última hipótesis que estipulaba que hay una manera de relacionar directamente la importancia atribuida de los factores con la dificultad de los problemas.

Hay una última observación en cuanto las atribuciones de los alumnos. Ellos parecen juzgar la dificultad con base en su capacidad de resolver el problema. Es cierto que los alumnos menos preparados juzgan de manera sistemática como más difíciles los problemas que sus contrapartes mejor preparados, pero al mismo tiempo, al analizar las soluciones de los problemas se revela que los problemas de quienes creen que los resolvieron bien (a pesar que no ser así) los juzgan más fáciles que los que no pudieron tratar. Tal resultado puede ser importante cuando se piensa en diseñar cursos para educación a distancia.

4. Implicaciones para el desarrollo de un curso en línea

A pesar que en el contexto de la educación a distancia (o simplemente en el caso de un software matemático) podría ser extremadamente útil tener un indicador global de la dificultad del problema (calculable automáticamente), pero la identificación de tal indicador no es una tarea fácil. El análisis de la sección anterior sugiere mas bien que es necesario tener un módulo que haga seguimiento de la auto-percepción de la preparación del alumno. La percepción del desempeño de sí mismo influye también en la motivación y el interés que el alumno puede tener, lo que da argumentos a favor de incluir de manera explicita tal componente en el sistema. La importancia atribuida a los factores sugiere que, para la parte del cálculo relacionado con problemas de secuencias, seria útil atraer la atención de los alumnos a la existencia de estos factores y hacerles notar las diferencias estructurales entre los problemas que se les dan para resolver. La evaluación de los profesores de los factores relacionados con la complejidad del problema sugiere la importancia de los conocimientos algebraicos para el manejo adecuado de los problemas con sucesiones. El conocimiento previo de un alumno puede ser decisivo en cuanto a su desempeño en un tena nuevo, tal que debería incluirse de manera explicita. El seguimiento estricto de estos componentes (cocimientos previos, auto-percepción del desempeño y de los factores) podrían ayudar a proporcionar al alumno, a cada momento, el problema adecuado de modo tal que se mantenga su interés y motivación en la continuación de la interacción con el software.

Referencias

Akkoç, H. y D. Tall (2005). A mismatch between curriculum design and student learning: the case of the function concept. Sixth British Congress of Mathematics Education, Warwick, UK.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite. Modèles spontanés et modèles propres. Fifth International Conference of International Group of Psychology of Mathematics Education.

Davis, R. B. y S. Vinner (1986). "The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages." The Journal of Mathematical Behaviour **5**: 281-303.

Dubinsky, E. y E. Elterman (1988). "The student's construction of quantification." For the learning of mathematics **8**(2): 44-51.

Fischbein, E., D. Tirosh, et al. (1979). "The intuition of infinity." Educational Studies in Mathematics **14**: 358-414.

Gronlund, N. E. (1981). Measurement and evaluation in teaching. 4th Edition, New York, MacMillan.

Hornke, L. F. y M. W. Habon (1986). "Rule-based bank construction and evaluation within the linear logistic framework." Applied Psychological Measurement **10**(4): 369-380.

Jerman, M. E. (1983). "Problem length as structural variable in verbal arithmetic problems." Educational Studies in Mathematics **5**: 109-123.

Lane, S. (1991). "Use of restricted item response models for examining item difficulty ordering and slope uniformity." Journal of Educational Measurement **28**(4): 295-300.

Lee, F. L. y R. Heyworth (2000). "Problem Complexity: A measure of problem difficulty in algebra by using computer." Educational journal **28**(1): 85-107.

Nesher, P. y J. Kilpatrick (1990). Mathematics and cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Bristol, Cambridge University Press.

Newman, D.L., Kundert, D.K., Lane, D.S. and Bull, K.S. (1998). "Effect of varying item order on multiple-choice test scores: Importance of statistical and cognitive difficulty." Applied Measurement in education, **1**(1), 89-97.

Pólya, G. (1967). Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving, John Wiley & Sons, INC.

Poynter, A. y D. Tall (2005). “Relating theories to practice in the teaching of mathematics”. Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.

Sierpinska, A. (1985). “Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite” Recherches en didactique des mathematiques **6**(1): 5-67.

Sierpinska, A. (1987). “Humanities students and epistemological obstacles related to limits.” Educational Studies in Mathematics **18**: 371-397.

Tall, D. (1975). “A long-term learning schema for calculus and analysis.” Mathematical education for teaching **2**(2).

Tall, D. et al. (1985). The calculus curriculum. Mathematical Association Conference on Microcomputers in the A level Curriculum.

Tall, D. (1986). “The Calculus Curriculum in the Microcomputer Age.” Mathematical Gazette **70**: 123-128.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. Handbook of research on mathematics teaching and learning. D. A. Grouws. New York, MacMillan**:** 495-511.

Tall, D. (1994). Cognitive difficulties in learning analysis. Report on the teaching of analysis. A. Barnard.

Tall, D. y L. E. Schwarzenberger (1978). “Conflicts in the learning of real numbers and limits.” Mathematics Teaching **82**: 44-49.

Thompson, P. W. (1985). Experience, problem solving and learning mathematics: considerations in developing mathematics curricula. Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives. E. Silver. NJ: Lawrence Erlbaum, Hillsdale**:** 189-236.